序　言

这部书的第一卷终于交印了，它既是急就章，又是拖沓篇．1958年匆匆上马，现想现写现印现讲，有时写稿不过三遍，仅仅经过起草、修改、誊正三道手续便拿去付印．有时候校对来不及，就不校对了，因而原讲义上错误百出，疵谬迭见，所以说这是急就章．如果能专心一志地连续地干下去，那还可能比较好些，但又经常为其它工作所打断，因而写一段停一停，改一章放一放的情况又经常出现，所以说是拖沓篇．紧紧松松，赶赶拖拖．因而详略不一，前后不贯，轻重失调，呼应不周等毛病在所难免的了．

情况是如此，虽然经过同志们的帮助和修改重写，但还可能留下不少后遗症．这样的草率工作本来不该交印的，但不少同志热情鼓励，几经踌躇终于把它出版了，希望经过读者的帮助，人多、眼多、想法多，多提意见将来可以改写得更好些．

这个课自始至终是和王元同志合开的，他对原稿的形成与改写都提了不少意见，并且有不少章节都是出诸他的手笔．在共同教学中一些心得已经吸收入我们合著的"积分的近似计算"一书中（科学出版社1961年初版），1961年龚升、吴方等同志又用这讲义教了一遍，修改了不少．最后定稿又经过曾肯成、许以超、史济怀、邓诗涛、李炯生、刘碧梧等同志的细心校阅，提了不少意见．个别章节还获得了戴元本、陆汝钤、韩京清、周永佩、罗祥钰、曹传书、吴松林、江嘉禾、李培信、邵秀民、陈志华、石赫、殷慰萍等同志的帮助，有关这些我在这儿表示谢意．特别应该一提的是：在最后定稿的时候，获得了中山大学吴兹潜、林伟二同志的帮助，他们一字不苟地校阅推敲，使本书避免不少错误．这样的主动地来自其他院校的帮助只能归功于集体主义的优越性．

在写作的过程中参考过熊庆来的"高等算学分析"（1934）；苏步青的"微分几何学"（1947）；赵访熊的"高等微积分"（1949）；孙光远、孙叔平的"微积分学"（1952）；陈建功的"实函数论"（1958）；杨宗磐的"数学分析入门"（1958）；樊映川等的"高等数学讲义"（1958）；陈忞民的"高等数学教程"（1958）；关肇直的"高等数学教程（第一卷）"（1959）；江泽坚的"数学分析"（1960）；北京大学、复旦大学、南京大学及高等数学教科书编审委员会的"高等数学教程"，我在此致谢．其他作为参考的外文书籍不在此一一列举了．

在写作的过程中，曾经有过一些努力，企图能更好地体现党对教学改革的方针，但是由于自己的理论和业务水平，没有能够较好地做到，读者可能发现一些其它书上所没有的材料，也可能发现一些稍有不同的处理方法，但毕竟是太少了．在谈到这一点的时候，感到空虚，并且诚恐会错误百出．大家所公认的、辗转传抄的已经成熟的材料，错误还有时难免，何况第一次写下来的东西，那更使人耽心了，但是还是斗胆地放进书里去，作为引玉之砖，作为试矢之的．特别是一些高的内容放低了，难的内容改易了，繁的内容化简了的部分更希望大家指正．但是我个人深信，只要每本书都有些章节改进，集腋成裘，我们教学改革会汇成巨流的，辛勤的点滴劳动，可能是大丰收的预兆．

大学教书不是照本讲，因此本书也准备了一些可教可不教的材料，教师们可以灵活掌握，余下的材料可以作为学有余力的同学的课外读物．习题应当做，并且适当地要多做些．本书没有组织好习题，希望老师们自己设法组织．习题的目的首先是熟练和巩固学习了的东西；其二是初步启发大家会灵活运用，独立思考；其三是融会贯通，出些综合性的习题把不同部门的数学沟通起来．

在教学过程中深得教学相长的益处，其中不少是由于同学所提意见的影响，我把所得到的一些不成熟的看法写在下面供同志们参考．我讲书喜欢埋些伏笔，把有些重要概念、重要方法尽可能早地在具体问题中提出，并且不止一次地提出．目的在于将来进一步学习的时候会较易接受高深的方法，很可能某些高深方法就是早已有之的朴素简单的方法的抽象加工而已．（有些深化了些，有些并没有深化而仅仅是另一形式而已．）我也喜欢生书熟讲，熟书生温的方法，似乎是在温熟书，但把新东西讲进去了，这是因为一般讲来，生书比旧课，真正原则性的添加并不太多的原故．找另一条线索把旧东西重新贯穿起来，这样的温习方法容易发现我们究竟有哪些主要环节没有懂透．有时分讲合温，或合讲分温，先把一个机器的零件一一搞清，再看全局，或先看全部机器的作用和目的，再分析要造成这个机器需要哪些零件而把条件一一讲明．“数”与“形”的“分”和“合”，“抽象”与“具体”的“分”与“合”都是在反复又反复的过程中不断提高的．同学也要求讲讲“人家怎样想出来的”，因而在讲书时也曾作过尝试，主观地推测一下，这很可能并不是原来的想法，但给出一条“这一步看下步并不难，连看几步就达到目的”的途径，作为同学们的参考．

以上一些肤浅的看法在讲课时都尝试过，但绝大部分写不下来，或者写下来就走了样，因此，同是一部书，可以多样讲，讲义作参考，结合同学的实际情况能灵活掌握才好．拉杂地写了这些意见，与其说是对教师讲的，还不如说是对同学（或自学的人）讲的．

总之，由于水平的限制，虽然黾勉从事，但缺点一定不少，我诚挚地希望读者们多提意见，更希望教师们多多指教.

最后，特别需要提起的是：由于中国科学院数学研究所党组织的支持，才使我有机会讲授基础课和编写讲义；在编写过程中，自始至终得到了中国共产党中国科学技术大学委员会的鼓励、关怀与支持，还给予了具体的帮助，这是我衷心感激的. 有了党的鼓励、关怀与支持，使我这几年来敢于按照自己的一些肤浅的设想来进行教学的尝试，使我这几年来有勇气把第一次写下来的东西放到课堂上去教，使我这几年来能把这项工作坚持下来. 至于中国科技大学教务处、数学系与数学教研室的同事们，在我从事这项工作的时候，一直给我方便与帮助，也在此表示感谢. 对科学出版社的感谢，那就更应当在此一提了，他们花了大量的劳动，在制图、编辑加工、排版印刷、校对等方面都做了细致而深入的工作.

华　罗　庚

1962年6月11日

目　　錄

第一章　实数与复数 ········· 1

§1.　有理数 ········· 1

§2.　无理数的存在 ········· 2

§3.　实数的描述 ········· 3

§4.　极限 ········· 6

§5.　Bolzano-Weierstrass 定理 ········· 9

§6.　复数的定义和矢量 ········· 12

§7.　极坐标及复数乘法 ········· 14

§8.　De Moivre 定理 ········· 16

§9.　复数的完备性 ········· 19

§10.　四元数簡介 ········· 20

补充:

§11.　二进位計算 ········· 22

§12.　循环小数 ········· 25

§13.　有理数接近实数 ········· 26

§14.　誤差 ········· 30

§15.　三、四次方程解法 ········· 34

第二章　矢量代数 ········· 39

§1.　空間坐标系及矢量的定义 ········· 39

§2.　矢量的加法 ········· 40

§3.　矢量的分解 ········· 41

§4.　內积(无向积,数性积) ········· 42

§5.　矢量积(外积) ········· 43

§6.　多重积 ········· 45

§7.　坐标的变换 ········· 47

§8.　平面 ········· 49

§9.　空間直綫方程 ········· 51

补充:

§10.　球面三角的主要公式 ········· 52

§ 11. 对偶原则 ………………………………………… 54
§ 12. 直角三角形与直边三角形的計算規則 ………………………… 55
§ 13. 力,力系,等效力系 ………………………………………… 58
§ 14. 平行力的合并 ………………………………………… 59
§ 15. 力矩 ………………………………………… 60
§ 16. 力偶 ………………………………………… 60
§ 17. 力系的标准形式 ………………………………………… 62
§ 18. 平衡方程及其应用 ………………………………………… 63
第三章　函数与图形 ………………………………………… 67
§ 1. 变量 ………………………………………… 67
§ 2. 函数 ………………………………………… 67
§ 3. 隐函数 ………………………………………… 68
§ 4. 函数的图表法 ………………………………………… 69
§ 5. 几个初等函数 ………………………………………… 70
§ 6. 函数的一些簡单特性 ………………………………………… 73
§ 7. 周期函数 ………………………………………… 75
§ 8. 复变数函数表示举例 ………………………………………… 76
§ 9. 迴归直綫 ………………………………………… 77
§ 10. Lagrange 插入公式 ………………………………………… 80
§ 11. Newton, Bessel, Stirling 插入公式 ………………………………………… 82
§ 12. 經驗公式 ………………………………………… 84
§ 13. 曲綫族 ………………………………………… 90
第四章　极限 ………………………………………… 92
§ 1. 貫的趋限情况 ………………………………………… 92
§ 2. 貫的不趋限情况 ………………………………………… 94
§ 3. 級数 ………………………………………… 96
§ 4. 条件收斂的級数 ………………………………………… 101
§ 5. 祖冲之計算圓周率的方法 ………………………………………… 104
§ 6. Archimedes 求抛物形面积法 ………………………………………… 105
§ 7. 旁压力的計算 ………………………………………… 107
§ 8. 数 e ………………………………………… 107
§ 9. 連續趋限 ………………………………………… 110
§ 10. 几个重要极限 ………………………………………… 112
§ 11. 一些例子 ………………………………………… 113
§ 12. 无穷大之阶 ………………………………………… 115

§13. 符号～，O与o …… 116
§14. 連續函数 …… 119
§15. 間断种种 …… 121
§16. 連續函数的一些基本性質 …… 122
§17. Heine-Borel 定理 …… 124
第五章　微分 …… 126
§1. 微商概念 …… 126
§2. 微商的几何意义 …… 127
§3. 函数的和、差、积、商的微商 …… 129
§4. 初等函数的微商 …… 129
§5. 复合函数的微商 …… 131
§6. 双曲函数 …… 134
§7. 微商的公式表 …… 136
§8. 例題 …… 137
§9. 微分 …… 142
§10. 誤差的估計 …… 143
§11. 高阶微商 …… 146
§12. Leibnitz 公式 …… 149
§13. 高阶微分 …… 151
§14. 函数的差分 …… 154
第六章　微商的应用 …… 156
§1. 曲綫的上升与下降 …… 156
§2. 极大与极小 …… 158
§3. Fermat 定理 …… 164
§4. 中值公式 …… 165
§5. 凸性、凹性与扭轉点 …… 169
§6. 漸近綫 …… 173
§7. 作图要点 …… 176
§8. 参变表示法的曲綫描图 …… 182
§9. 切綫，法綫，子切綫，子法綫 …… 183
§10. 积分公式 …… 186
§11. 隐函数的微分 …… 189
§12. $\frac{0}{0}$ 型的不定式 …… 192
§13. $\frac{\infty}{\infty}$ 型的不定式 …… 193

§14. 其他型的不定式 …… 196
第七章 函数的 Taylor 展开式 …… 199
§1. 多項式的 Taylor 公式 …… 199
§2. 函数的 Taylor 展开式 …… 200
§3. Taylor 級数的余項 …… 201
§4. e^x 的展开式 …… 204
§5. $\sin x$ 与 $\cos x$ 的展开式 …… 205
§6. 二項式展开式 …… 208
§7. $\log(1+x)$ 的展开式 …… 211
§8. $\operatorname{arc\,tg} x$ 的展开式 …… 213
§9. 冪級数，收斂半径 …… 215
§10. 冪級数的四則运算 …… 217
§11. 冪級数的微分与积分 …… 219
§12. 冪級数的唯一性定理及反函数 …… 220
§13. Kummer 判别法，Gauss 判别法 …… 221
§14. 超越几何級数 …… 223
§15. 用冪級数解微分方程 …… 229
第八章 方程的近似解 …… 235
§1. 引言 …… 235
§2. 图解法 …… 235
§3. 迭代法 …… 236
§4. 插值法 …… 240
§5. Newton 法 …… 241
§6. 联合法 …… 244
§7. 賈宪法 …… 245
§8. Лобачевский 法 …… 247
补充：
§9. 实数根的几个定理 …… 250
§10. Sturm 定理 …… 251
第九章 不定积分 …… 254
§1. 換变数法則 …… 254
§2. 分部积分法 …… 256
§3. 分項积分法 …… 259
§4. 有理分式的积分 …… 261
§5. M. B. Остроградский 方法 …… 263

§6. 某些含有根式的函数的积分 ………………………………………… 265
§7. 求积分 $\int R(x, \sqrt{ax^2+bx+c})dx$ ………………………………… 268
§8. Abel 积分 ……………………………………………………………… 270
§9. 一些不能用已知函数表达的积分 ………………………………… 273
§10. 微分方程．分离变量法 ……………………………………………… 274
§11. 换变数法 …………………………………………………………… 276
§12. 积分因子法 ………………………………………………………… 278
§13. 一阶綫性方程 ……………………………………………………… 282
§14. 二阶綫性方程 ……………………………………………………… 286
§15. 常系数綫性方程 …………………………………………………… 288
第十章 定积分 ……………………………………………………………… 291
§1. 求面积 ……………………………………………………………… 291
§2. 定积分的概念 ……………………………………………………… 293
§3. 可积函数的性质 …………………………………………………… 296
§4. 定积分的基本性质 ………………………………………………… 297
§5. 中值公式及积分基本定理 ………………………………………… 300
§6. 第二中值公式 ……………………………………………………… 302
§7. 例子 ………………………………………………………………… 303
§8. 换变数公式 ………………………………………………………… 306
§9. 分部积分 …………………………………………………………… 310
§10. 瑕积分 ……………………………………………………………… 313
§11. 定积分的一些应用 ………………………………………………… 315
§12. 求定积分的特殊方法 ……………………………………………… 316
§13. 面积原理的应用 …………………………………………………… 321
§14. Euler 求和公式及 Euler 函数 …………………………………… 325
§15. 梯形法，矩形法与 Simpson 法 …………………………………… 328
索引一 ……………………………………………………………………… 337
索引二 ……………………………………………………………………… 341

第一章　实数与复数

§1. 有　理　数

数起源于"数",一个一个地数,因而出現了

$$1, 2, 3, 4, 5, \cdots,$$

这叫做自然数.

用自然数来数物件,看来簡单,但是却包含了一些数学中經常用到的基本原則. 例如,一一对应的概念,先后次序的概念等等. 特别值得注意的是,这是数学中第一个用抽象符号来处理具体事物的例子. 拿任何实物做标准(如手指,算珠),都有穷尽的可能,而自然数系却可以說明一切可以数得完的客观事物的件数.

但是,如果眞的要創造出无穷个符号来表达自然数,那不仅不方便而且也不可能. 这样就产生了計数法. 这方法是用有限个数字来表达一切自然数. 我們熟悉的是十进位的表达法,即逢十进一的方法. 左边的一算作右边一位的十,这样我們就有可能用

$$0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9$$

来表达一切自然数了.

人类大都是用十进位,可能是因为人有十个指头. 开始計数时是以指头做标准的. 实质上,符号用得最少的要算二进位,只要用 0 与 1 就可以表达出一切自然数来. 二进位就是逢二进一. 用二进位表示自然数貫,可以依次写成为

$$1, 10, 11, 100, 101, 110, 111, 1000, \cdots.$$

书写时二进位較长,例如,二进位的四位数字 1000 仅代表十进位的 8. 一般講来,一个数字用二进位的位数是用十进位的位数的三倍以上(約 3.3 倍).

这里我們只提一下自然数的两个基本的重要性質:

1) 如果有一批自然数都不大于一个給定的自然数,那末其中一定有一个最大的. 术語:在有上界的自然数集合中一定有一个最大的.

2) "一个有上界的自然数集合不能和它的眞子集合建立起一一对应的关系". 这句术語講得似乎有些玄虛,实質上就是 n 个物件不能和少于 n 个物件成立一一对应的关系. 这样簡单的結果为什么还值得一提呢? 因为这是有限集合的基本性質. 任何一个非有限集合都有可能和它的子集合一一对应. 例如,自然数的集合便可以和偶自然数的集合建立起一一对应来:

$$n \longleftrightarrow 2n.$$

仅有自然数,还远远不能滿足我們的需要. 我們有时需要分,但分不尽怎么办? 因而

产生了分数 $\frac{a}{b}$，称为有理数. $\frac{a}{b}$ 就是 b 个人分 a 件东西，每个人应得的正确答案.

小数只不过是有固定分母的分数的另一种表达形式，它的分母只允許是 $10, 10^2, 10^3, \cdots$ 等等. 例如，

$$0.314 = \frac{3}{10} + \frac{1}{10^2} + \frac{4}{10^3}.$$

因为分母是特殊的，所以我們并不能把任何分数都表为有限小数. 例如，

$$\frac{1}{3} = 0.333\cdots$$

就是一个无穷小数. 但是我們知道，有理数的小数表达是有特殊形式的，就是所謂循环小数. 我們也知道，凡是循环小数都能表成有理数，特别需要注意的是循环小数

$$0.999\cdots$$

实质上代表1.

仅有有理数，还是不能满足我們客观上的需要. 我們有时要减，但不够减怎么办？很自然地就产生了負数.

到了这样的阶段，我們已經得到了正、負有理数. 这些数作为一个整体来講已經达到了某种意义的完备性，这种数的全体称为有理数域. 用一句行話来說，有理数域对四則运算自封；通俗一些說，任意二有理数的和、差、积、商(除数 $\neq 0$)仍然是有理数.

一般講有理数是指所有的正、負有理数，而整数是指 $0, \pm1, \pm2, \pm3, \cdots$. 正整数就是自然数 $1, 2, 3, \cdots$.

任何两个有理数之間有无穷个有理数存在. 要証明这点，先証明两个有理数之間一定有一个有理数存在. 若 $\frac{a}{b} < \frac{a'}{b'}$，則显然有

$$\frac{a}{b} < \frac{a+a'}{b+b'} < \frac{a'}{b'}.$$

旣然两个中間有一个，那末 $\frac{a}{b}$, $\frac{a+a'}{b+b'}$ 中間又至少有一个，等等. 这种做法可以无限制地继續下去，所以就証明了以上所說的話.

§2. 无理数的存在

上节中我們已經說明了在某种意义下有理数域有它的完备性，但是换一个角度来看，便又显示出它的不完备之处. 例如，最簡单的二次方程

$$x^2 = 2 \tag{1}$$

就沒有有理数解. 从几何方面說，連极簡单的几何图形的长度都无法用有理数表达出来. 边是单位长的正方形的对角綫的长度 $\sqrt{2}$ 就不是有理数.

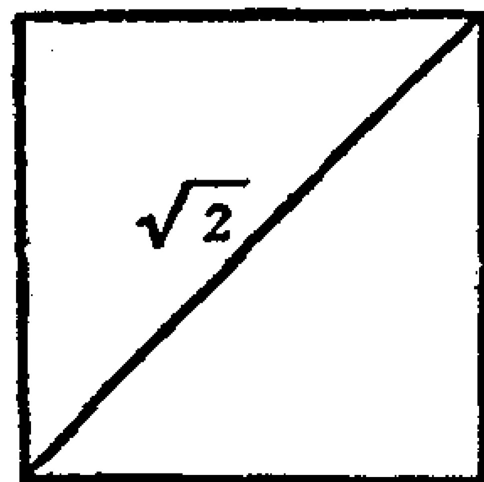


图 1

何以見得方程(1)沒有有理解？我們用反証法. 如果有一个旣約

分数 $\frac{a}{b}$ 是(1)式的解,那末

$$a^2 = 2b^2.$$

右边是偶数,所以左边应当是偶数,故 a 是偶数. 令 $a = 2a'$,则得

$$2(a')^2 = b^2.$$

这又說明 b 应当是偶数. 这与 a/b 是旣約分数的假定相矛盾,因此(1)式沒有有理解,也就是說 $\sqrt{2}$ 不是有理数. 虽然如此,直觉上我們对 $\sqrt{2}$ 并不是毫无所知. 首先,我們知道它是在 1 与 2 之間,計算得精确些,知道它是在 1.4 与 1.5 之間,1.41 与 1.42 之間,1.414 与 1.415 之間. 換言之,$\sqrt{2}$ 可用

$$2,\ 1.5,\ 1.42,\ 1.415,\ \cdots,\ a_n,\ \cdots,$$
$$1,\ 1.4,\ 1.41,\ 1.414,\ \cdots,\ b_n,\ \cdots$$

来无限逼近. 实际上,这样的过程也就定义了 $\sqrt{2}$,因为

$$a_n - b_n = \frac{1}{10^{n-1}},$$

也就是 $\sqrt{2}$ 与 a_n (及 b_n) 的誤差 $< \frac{1}{10^{n-1}}$. n 愈大,誤差也就愈接近于 0. 換言之, $\sqrt{2}$ 可以用 $\{a_n\}$ 从右边接近它,也可以用 $\{b_n\}$ 从左边接近它.

如果仅仅是为了 $\sqrt{2}$ 以及它对四則运算的完备性,我們可用如下的方法来解决問題. 对所有的整数 a, b, c, 形如

$$\frac{a + b\sqrt{2}}{c}$$

的数是对四則运算自封的. 但是我們的目的在于使无限接近成为完全可能,所以我们采用其他的方法.

§3. 实数的描述

現在我們描述性地来說明实数.

我們作一条直綫,取其上一点作为原点,并取一个单位长. 依单位长一段一段地往右边接着量,便得出所有的自然数所对应的点. 由 0 点向左量,便得出負整数(图 2).



图 2

过 0 点作任一直綫(异于原直綫). 在其上取 B 点使 $0B = b$. 連单位点 A(即 $0A$ 的长是单位长)与 B,通过 $0B$ 直綫上的单位点 C 作平行于 AB 的綫交 $0A$ 于 D,則 $0D = \frac{1}{b}$ (图 3). 如此可以在直綫上表出所有的有理数.

从 0 点作一 45° 的角,取单位长得 A 点. 作 $0A$ 的垂綫交原直綫于 B. 在 x 直綫上这样作出的一段,它的长度是 $\sqrt{2}$ (图 4).

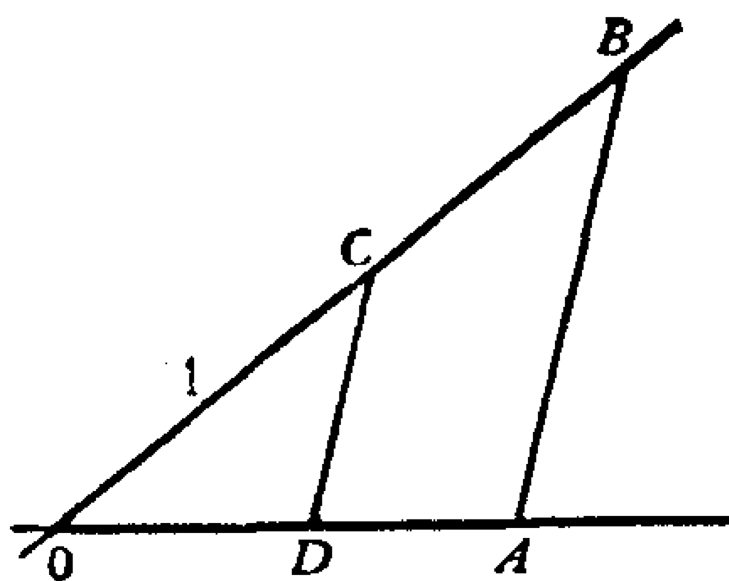


图 3

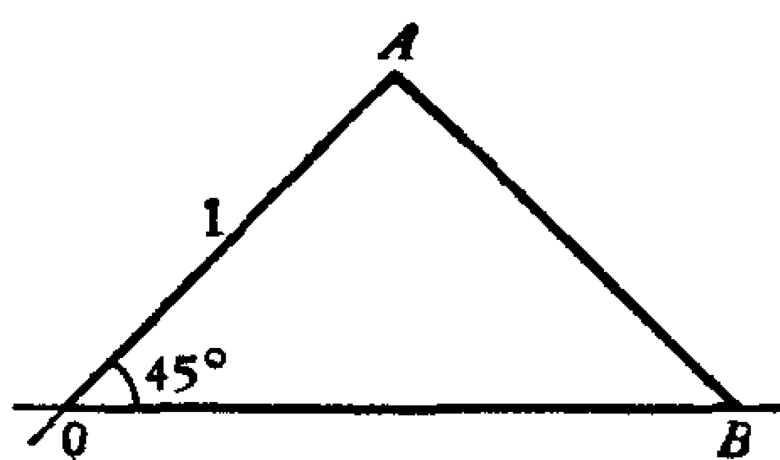


图 4

所以从几何来看，$\sqrt{2}$ 几乎是先驗性地存在着的，也可以把 $\sqrt{2}$ 看作一点，它是可以用有理数点来无限接近的．說得形式化些，給出一个任意小的正数 ε，一定有一个有理数 r，使

$$|\sqrt{2}-r|<\varepsilon.$$

所有的实数都和 $\sqrt{2}$ 一样是直綫上的点；并且每一点也对应于一个实数．我們可以用以下的方法来描述一个实数 α：如果 α 所对应的点可以用有限位小数表达出来，那它是有理数．这我們已經定义好了．现在假定 α 不能用有限位小数表达出来，我們一定可以选出一个整数 $a_m\cdots a_1$，使

$$a_m\cdots a_1 \leqslant \alpha < a_m\cdots a_1+1,\quad 0\leqslant a_\nu \leqslant 9 \tag{1}$$

（这也称为 Archimedes 公設）[1]．把区間(1)分成 10 份，α 一定落在其中之一．命

$$a_m\cdots a_1.b_1 < \alpha < a_m\cdots a_1.b_1+0.1,\quad 0\leqslant b_1\leqslant 9; \tag{2}$$

再把(2)分成 10 份，α 又落在

$$a_m\cdots a_1.b_1b_2 < \alpha < a_m\cdots a_1.b_1b_2+0.01,\quad 0\leqslant b_2\leqslant 9 \tag{3}$$

中．这样一步一步做下去，这手續給出有一个无穷小数

$$a_m\cdots a_1.b_1b_2\cdots b_l\cdots$$

它与实数 α 对应．

我們就用这个表达方法来定义实数．

正实数 α 是由无穷小数表示出来的：

$$\alpha = a_m\cdots a_1.b_1b_2b_3\cdots.$$

但是我們有个約定：如果 α 是有限小数，我們把最右的一个数字减 1，后面添上无穷个 9．例如，$\frac{1}{2}=0.4999\cdots$．

不同的表示代表不同的实数．

这样表示的几何意义是：α 是这样的一个数，它是由 $a_m\cdots a_1$，$a_m\cdots a_1.b_1$，$a_m\cdots a_1.b_1b_2$，$\cdots$ 等无限接近的．

正实数可以比大小．先对准小数点，小数点前位数多的就大．如果位数相等，那末我

1) Archimedes 公設是：給了两个綫段 a 与 b．如果 a 的长度比 b 的长度短，用 a 作为"尺"，量有限次一定能超过 b 的长度．

們就一个数字一个数字地从左往右比，首先出现較大数的便大．我們用 $\alpha \leqslant \beta$ 来代表 α 小于或等于 β．这样的大小概念有以下三个性质：

(i) 任給两个正实数，我們能够判断那个大那个小；

(ii) 如果 $\alpha \leqslant \beta$, $\beta \leqslant \alpha$, 則 $\alpha = \beta$;

(iii) 如果 $\alpha \leqslant \beta$, $\beta \leqslant \gamma$, 則 $\alpha \leqslant \gamma$.

我們定义两个实数的加法，就是对准了小数点一位对一位地相加，但必須注意必要的进位．說得更确切些，命这两个数各为

$$\alpha = a_m \cdots a_1.b_1 b_2 \cdots,$$
$$\beta = a'_l \cdots a'_1.b'_1 b'_2 \cdots.$$

如果从某一位起，两个数的尾巴每一位对应的数字加起来都是 9，卽有 N，当 $n > N$ 时，$b_n + b'_n = 9$，那末 $\alpha + \beta$ 就是 $a_m \cdots a_1.b_1 b_2 \cdots b_N + a'_l \cdots a'_1.b'_1 b'_2 \cdots b'_N$ 然后再添上无限个 9．不然，我們一定有无限个自然数 $n_1 < n_2 < n_3 < \cdots$，使

$$b_{n_\nu} + b'_{n_\nu} \neq 9, \quad (\nu = 1, 2, \cdots).$$

作

$$a_m \cdots a_1.b_1 \cdots b_{n_\nu} + a'_l \cdots a'_1.b'_1 \cdots b'_{n_\nu}.$$

取到 $n_\nu - 1$ 位小数，这就肯定了 $\alpha + \beta$ 到小数第 $n_\nu - 1$ 位．一步一步做下去，我們可以肯定 $\alpha + \beta$ 的任何一位数字．

我們用定义逆运算的方法来定义减法，說得更确切些，假定 $\alpha > \beta$．如果从某一位开始，α 与 β 的尾巴完全相同，那就变为有限小数的减法．如果不是如此，一定有无限个自然数 $n_1 < n_2 < n_3 < \cdots$，使

$$b_{n_\nu} \neq b'_{n_\nu}. \qquad (\nu = 1, 2, 3, \cdots)$$

作

$$a_m \cdots a_1.b_1 \cdots b_{n_\nu} - a'_l \cdots a'_1.b'_1 \cdots b'_{n_\nu}.$$

取到 $n_\nu - 1$ 位小数，这就肯定了 $\alpha - \beta$ 到小数第 $n_\nu - 1$ 位．一步一步做下去，我們就肯定了 $\alpha - \beta$ 的任何一位数字．由减法可以引出負实数．极易看出 (i), (ii), (iii) 对所有的实数(不論正与負)都对．

对一实数 α 我們定义它的絕对值：

$$|\alpha| = \begin{cases} \alpha, & \text{如果 } \alpha \geqslant 0, \\ -\alpha, & \text{如果 } \alpha < 0. \end{cases}$$

不难証明我們有不等式

$$|\alpha + \beta| \leqslant |\alpha| + |\beta|.$$

在此式中用 $\beta = \gamma - \alpha$ 代之，可得

$$|\gamma| \leqslant |\alpha| + |\gamma - \alpha|.$$

所以

$$|\gamma - \alpha| \geqslant \big| |\gamma| - |\alpha| \big|.$$

§4. 极　　限

极限这一个概念在中学里学习循环小数时已經介紹过了. 我国古代早就有了这一概念的萌芽. "一尺之棰,日取其半,万世不竭"就是极限的看法. 这句話的意义是一尺长的一根木棒,第一天拿掉一半,当然还留下1/2尺;第二天取留下的一半,还留下原来的1/4;第三天剩下 $\frac{1}{8}=\frac{1}{2^3}$, $\cdots$, 第 n 天剩下了 $\frac{1}{2^n}$ 尺. 当 n 大时, $\frac{1}{2^n}$ 虽小,但并不是0. 这就是万年不竭的道理. 我們用符号

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2^n}=0$$

来代表这一事实. 它的讀法是:当 n 趋向无穷时, $\frac{1}{2^n}$ 接近于0. 数学中也常用以下的説法:任意給一个很小的正数 $\varepsilon>0$,一定可以选择一个自然数 N,使当 $n>N$ 时,常有

$$0<\frac{1}{2^n}<\varepsilon.$$

(在現在这个情况中, N 是可以具体算出的,它就是一个大于 $\log_{10}\frac{1}{\varepsilon}\Big/\log_{10}2$ 的自然数)

現在我們一般地来定义极限.

定义. 对于一个实数貫(有时也称为敘列)

$$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n, \cdots.$$

如果 α 是一个实数且有以下的性質,我們就称 α 是以上数貫的极限,或称貫 α_n 收斂于 α: 任給一个正数 $\varepsilon>0$,必有一个自然数 N 存在,使当 $n>N$ 时,

$$|\alpha_n-\alpha|<\varepsilon.$$

我們用符号

$$\lim_{n\to\infty}\alpha_n=\alpha$$

来代表.

不难証明

$$\lim_{n\to\infty}(\alpha_n\pm\beta_n)=\lim_{n\to\infty}\alpha_n\pm\lim_{n\to\infty}\beta_n.$$

例1. 数貫

$$0.3,\ 0.33,\ 0.333,\ \cdots$$

以 $\frac{1}{3}$ 为其极限.

例2. 数貫

$$0.9,\ 0.39,\ 0.339,\ 0.3339,\ \cdots$$

也以 $\frac{1}{3}$ 为其极限.

例3. 数貫

$$0.3,\ 0.9,\ 0.33,\ 0.39,\ 0.333,\ 0.339,\ \cdots$$

也以 $\frac{1}{3}$ 为其极限.

例 4. 如果 $q>1$, 則貫 $\left\{\frac{1}{q^n}\right\}$ 以 0 为极限.

例 5. 貫 $\left\{\frac{n^2+3n}{2n^2+1}\right\}$ 以 $\frac{1}{2}$ 为极限.

給了 $\varepsilon>0$. 当 $n>\frac{3}{2\varepsilon}$ 时, $\left|\frac{n^2+3n}{2n^2+1}-\frac{1}{2}\right|=\frac{6n-1}{2(2n^2+1)}<\frac{3}{2n}<\varepsilon$.

任何一个实数 α 都有它的无穷小数表示法:

$$\alpha=a_m\cdots a_1.b_1\cdots b_n\cdots.$$

命

$$\alpha_n=a_m\cdots a_1.b_1\cdots b_n,$$

則

$$|\alpha-\alpha_n|=\frac{b_{n+1}}{10^{n+1}}+\frac{b_{n+2}}{10^{n+2}}+\cdots\leqslant\frac{9}{10^{n+1}}+\frac{9}{10^{n+2}}+\cdots=$$

$$=\frac{9}{10^{n+1}}\left(1+\frac{1}{10}+\frac{1}{10^2}+\cdots\right)=\frac{9}{10^{n+1}}\cdot\frac{10}{9}=\frac{1}{10^n}.$$

給了 $\varepsilon>0$, 我們取 $N=\left[\log_{10}\frac{1}{\varepsilon}\right]+1$ ($[\xi]$表 ξ 的整数部分), 則得

$$N>\log_{10}\frac{1}{\varepsilon},\quad 10^N>\frac{1}{\varepsilon}.$$

故当 $n>N$ 时,

$$\frac{1}{10^n}<\varepsilon.$$

所以任何一个实数都可以看作是它的无穷小数取 n 位所得出的数的极限. 由此显示出,任何一个实数可以表为一个有理数貫的极限. 非有理的实数也称为无理数.

由此也可看出, 存在着以有理数为元素的貫, 它的极限超出有理数域的范围 (例如 $\sqrt{2}$ 所代表的无穷小数). 于是就产生了下面的問題: 如果以实数为元素作貫, 能否通过取极限而得出实数以外的新数来. 在下节中, 我們将証明它不可能 (見下节定理 2). 我們先引进收斂貫的定义.

定义. 一个实数貫 $\{\alpha_l\}$ 如果适合以下条件, 就称为收斂貫或称 Cauchy 貫: 对任一正数 $\varepsilon>0$, 有自然数 $L(=L(\varepsilon)$, 这表示 L 与 ε 有关) 存在, 使当 l 与 k 都大于 L 时,

$$|\alpha_l-\alpha_k|<\varepsilon.$$

如果一貫收斂于 α, 則这貫就是收斂貫. 所根据的理由是

$$|\alpha_l-\alpha_k|\leqslant|\alpha_l-\alpha|+|\alpha_k-\alpha|.$$

如果将收斂貫的定义换为"对任一 $\varepsilon>0$, 有一自然数 N 存在, 使当 $n>N$ 时,

$$|\alpha_{n+l}-\alpha_n|<\varepsilon,$$

此处 l 不超过某一常数 c", 則 $\{\alpha_n\}$ 可能沒有极限. 例如 $\alpha_n=\log_{10}n$. 取 $N=\left[\frac{c}{10^\varepsilon-1}\right]$,

则当 $n > N$ 时，

$$|\log_{10}(n+l) - \log_{10}n| < \log_{10}\left(1 + \frac{c}{n}\right) < \varepsilon.$$

但对于任意自然数 N，当 $n > 10^{2N}$ 时，$\log_{10}n > 2N$，所以 $\log_{10}n$ 没有极限.

定理 1. 一个单调上升的贯：

$$\alpha_1 \leqslant \alpha_2 \leqslant \alpha_3 \leqslant \cdots \leqslant \alpha_n \leqslant \cdots,$$

如果它受限于上，也就是有一常数 M 与 n 无关，使

$$\alpha_n \leqslant M, \quad n = 1, 2, \cdots,$$

则这个贯一定有极限.

证. 先比较整数部分. 由于都不大于 M，所以除掉前面若干(有限)项外，从某一项开始一定是一个不再变化的数；再论第一位小数，也一定从某一项起都相同，这样继续进行，我们便一步一步地决定出一个无穷小数. 因此得出本定理.

同样地，一个单调下降的贯，如果受限于下的话，这个贯也一定有极限.

例 6. 贯 $x_n = \left(1 - \frac{1}{2}\right)\left(1 - \frac{1}{4}\right)\cdots\left(1 - \frac{1}{2^n}\right)$ 为单调下降的贯，且有下限零，所以有极限.

例 7. 试证贯 $x_n = \sqrt{2 + \sqrt{2 + \cdots + \sqrt{2}}}$ (n 重根式)有极限.

先证明 $x_n < 2$. 当 $n = 1$ 时，$\sqrt{2} < 2$. 假定 $x_k < 2$，则 $x_{k+1} = \sqrt{2 + x_k} < 2$. 故由归纳法可知 $x_n < 2$. 另一方面，x_n 为单调上升贯. 故有极限.

例 8. 贯 $x_n = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots \frac{1}{n!}$ 趋一极限 $e(=2.7\cdots)$. 由 $n! \geqslant 2^{n-1}$ 可知，$x_n < 1 + 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{2^{n-1}} < 3$，所以 x_n 是有上限且单调上升的贯，故有一极限. 这 e 是自然对数的基数.

从实数

$$\alpha = a_m \cdots a_1 \cdot b_1 b_2 \cdots$$

的表示法，我们可以得到一个单调上升的贯

$$\alpha_n = a_m \cdots a_1 \cdot b_1 b_2 \cdots b_n.$$

这个贯的极限就是 α. 从 β 也可以作一个单调上升的贯 β_n. 乘积

$$\alpha_n \beta_n$$

也是一个单调上升的有理数贯，并且受限于上，它有一个极限. 这极限就定义为实数 α 与 β 的乘积.

不难证明

$$\lim_{n\to\infty}(\alpha_n\beta_n) = (\lim_{n\to\infty}\alpha_n)(\lim_{n\to\infty}\beta_n)$$

及对任一自然数 q，有

$$\lim_{n\to\infty}(\alpha_n^q) = (\lim_{n\to\infty}\alpha_n)^q.$$

又如果 $\alpha > 0$,则必有一自然数N存在,使当 $n > N$ 时

$$\alpha_n \neq 0,$$

于是 $\frac{1}{\alpha_n}$ 成为一个单調递减的貫,并且受限于下,因而有一极限存在,命之为 β. 不难証明 $\alpha\beta = 1$. 我們写成 $\beta = \alpha^{-1}$.

命 q 表任一自然数,我們一定有一自然数 l 使 $\alpha \leqslant 10^{lq}$. 現在 $10^{nq}\alpha_{nq}$ 是一自然数,我們有一唯一的自然数 P_n 使

$$P_n^q \leqslant 10^{nq}\alpha_{nq} < (P_n + 1)^q.$$

命 $\beta_n = P_n/10^n$,如此得出的是一递增貫,而且由 $\alpha_{nq} \leqslant \alpha \leqslant 10^{lq}$ 可知 $\beta_n \leqslant 10^l$,因此

$$\lim_{n\to\infty}\beta_n = \beta$$

存在. 由 $\beta_n^q \leqslant \alpha_{nq} \leqslant \left(\beta_n + \frac{1}{10^n}\right)^q$ 可知

$$\beta^q = \lim_{n\to\infty}\alpha_{nq} = \alpha,$$

即

$$\beta = \alpha^{\frac{1}{q}}.$$

我們由此可以定出 α 的 p/q 次方.

对任一正实数 β,研究 α^{β_n} 的单調性,由此可以定义实数 α^β.

不难証明,实数对四則运算自封,也可以說所有的实数构成一个域. 加法的交換、結合律依旧正确,乘法的交換、結合律也正确,加乘之間的分配律也正确. 在下节中,我們还将証明它对极限运算也是封閉的.

§5. Bolzano-Weierstrass 定理

从实数貫

$$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n, \cdots \tag{1}$$

中我們任意取出一部分

$$\alpha_{n_1}, \alpha_{n_2}, \cdots, \alpha_{n_k}, \cdots, \tag{2}$$

此处 $n_1, n_2, \cdots$ 是自然数,且

$$n_1 < n_2 < \cdots < n_k < n_{k+1} < \cdots.$$

貫(2)称为貫(1)的子貫.

若貫(1)有极限 α, 則子貫(2)也以同一 α 为其极限.

如果 α 是(1)的极限,那末对任一 $\varepsilon > 0$,必有一自然数 N,使当 $n > N$ 时

$$|\alpha_n - \alpha| < \varepsilon.$$

因此可得当 $n_k > N$ 时,有

$$|\alpha_{n_k} - \alpha| < \varepsilon,$$

即有一K存在,当 $k > K$ 时上式成立. 这就証明了我們的命題.

以上命題的逆命題是不对的,換言之,子貫有极限并不能說明原来的貫有沒有极限.

例如, $x_n=(-1)^{n+1}$ 是一貫,它的两个子貫:

$$x_1=1,\ x_3=1,\ \cdots,\ x_{2k-1}=1,\ \cdots$$

及

$$x_2=-1,\ x_4=-1,\ \cdots,\ x_{2k}=-1,\ \cdots$$

都有极限,但原貫沒有极限.

我們还可以有更复杂的例子:

$$1,\ 1,2,\ 1,2,3,\ 1,2,3,4,\ 1,2,3,4,5,\cdots,$$

这一个貫有一个子貫以 1 为极限,也有子貫以 2 为极限,也有子貫以 3 为极限等等.

定理 1 (Bolzano-Weierstrass). 在一有界的无穷点集中,一定可以选出一个有极限的子貫.

証. 由假定可設一切数都在 a, b 之間. 适合于 $a\leqslant x\leqslant b$ 的实数称之为区間(或閉区間),以 $[a, b]$ 表之. 我們把区間 $[a, b]$ 平分,其中一定有一半含有无穷个点. 假定包有无穷个点的一半是 $[a_1, b_1]$, 显然有

$$b_1-a_1=\frac{1}{2}(b-a);$$

同法,把区間 $[a_1, b_1]$ 分为二等分,則它的一半 $[a_2, b_2]$ 中亦有无穷个点;等等. 第 k 次分出的区間 $[a_k, b_k]$ 照样包含有无穷多个点.

这些区間的每一个都包含在前一个中,并且第 k 个区間的长度

$$b_k-a_k=\frac{1}{2^k}(b-a)$$

随着 k 的增大而趋向于 0, 如此得出两个单調貫

$$a_1\leqslant a_2\leqslant a_3\leqslant\cdots$$

与

$$b_1\geqslant b_2\geqslant b_3\geqslant\cdots,$$

它們都有极限. 又由 $b_k-a_k\to 0$ 可知,这两个极限相等,命之为 α, 即

$$\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}b_n=\alpha.$$

$[a_k, b_k]$ 中含有点集的无穷个元素,我們任取其中一个,命之为 α_k, 則由于

$$a_k\leqslant\alpha_k\leqslant b_k$$

及

$$\lim_{n\to\infty}|a_n-b_n|=0,$$

所以知道

$$\lim_{n\to\infty}\alpha_n=\alpha.$$

定理已經証明.

这証明中包括了一个很重要的原則,即逐步平分的原則,也称为 Bolzano 原則.

現在我們来說明上节最后一句話,也就是証明

定理 2 (基本定理). 实数范围内任一收斂貫一定收斂于一实数.

証. 由假定,給一任意的 $\varepsilon > 0$, 必有自然数 N 存在,使当 $l, k > N$ 时,常有

$$|\alpha_k - \alpha_l| < \varepsilon.$$

固定 l, 則对所有的 $k > N$, 当有

$$\alpha_l - \varepsilon < \alpha_k < \alpha_l + \varepsilon.$$

換言之,在 $[\alpha_l - \varepsilon, \alpha_l + \varepsilon]$ 之間有无穷个点 α_k. 依 Bolzano-Weierstrass 定理可知,有一子貫 $\{\alpha_{n_k}\}$ 使

$$\lim_{k\to\infty} \alpha_{n_k} = C.$$

現在仅須証明, α_n 也趋向于 C. 我們可以选取充分大的 n_k, 使

$$|\alpha_{n_k} - C| < \varepsilon;$$

又同时当 $n > N$ 时

$$|\alpha_n - \alpha_{n_k}| < \varepsilon,$$

所以得到当 $n > N$ 时

$$|\alpha_n - C| \leqslant |\alpha_n - \alpha_{n_k}| + |\alpha_{n_k} - C| \leqslant 2\varepsilon.$$

这就是說,

$$\lim_{n\to\infty} \alpha_n = C.$$

例 1. 貫 $x_n = \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{2^n}$ 有极限.

給了 $\varepsilon > 0$, 当 $n > \left[\frac{\log_{10}\frac{1}{\varepsilon}}{\log_{10} 2}\right]$ 及 $l \geqslant 0$ 时,

$$|x_{n+l} - x_n| = \frac{1}{2^{n+1}}\left(1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{2^{l-1}}\right) = \frac{1}{2^{n+1}} \cdot \frac{1 - \frac{1}{2^l}}{1 - \frac{1}{2}} < \frac{1}{2^n} < \varepsilon,$$

故貫 x_n 有极限.

例 2. 貫 $x_n = 1 + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{n^2}$ 也有极限.

給了 $\varepsilon > 0$, 当 $n > \left[\frac{1}{\varepsilon}\right]$ 及 $l \geqslant 0$ 时,由于 $\frac{1}{n^2} < \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}$ $(n = 2, 3, \cdots)$, 所以

$$|x_{n+l} - x_n| = \left|\frac{1}{(n+1)^2} + \cdots + \frac{1}{(n+l)^2}\right| <$$

$$< \left|\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} + \cdots - \frac{1}{n+l}\right| < \frac{1}{n} < \varepsilon,$$

故貫 x_n 有极限.

定义. 如果 α 适合以下的条件,則称为一实数集合的确上限: 集合中的任意一个数都不大于 α, 但对任意的 $\varepsilon > 0$, 集合中至少有一个数大于 $\alpha - \varepsilon$.

类似地,如果 β 适合以下的条件,就称为一个实数集合的确下限: 集合中任意一个数都不小于 β, 但对任意的 $\varepsilon > 0$, 集合中至少有一个数小于 $\beta + \varepsilon$.

例 1. 貫 $1-\frac{1}{n}$ 以 1 为确上限.

例 2. $1,-1,1,-1,1,-1,\cdots$ 以 1 为确上限.

例 3. $\frac{1}{n}\ (n=1,2,\cdots)$ 也以 1 为确上限.

例 4. 自然数貫沒有确上限.

定理 3. 受限于上的实数集合一定有一个确上限.

証. 限于上的意义就是所有的数都不超过某一定数 β. 在集中任取一点 α,把 $[\alpha,\beta]$ 分为二等分: $\left[\alpha,\frac{1}{2}(\beta+\alpha)\right]$ 和 $\left[\frac{1}{2}(\beta+\alpha),\beta\right]$. 如果后者包有原集合的点,我們就命之为 $[\alpha_1,\beta_1]$; 如果后者并不包有原集合的点,我們就把 $[\alpha_1,\beta_1]$ 表前一分区間. 此法續行,得出 $[\alpha_2,\beta_2],\cdots,[\alpha_k,\beta_k],\cdots$. 我們可以知道

$$\lim_{k\to\infty}\alpha_k=\lim_{k\to\infty}\beta_k=C.$$

这个 C 就是确上限了,因为对任何 k, 有 $\alpha_k\leqslant C\leqslant\beta_k$, 且在区間 $[\alpha_k,\beta_k]$ 內至少包有原集合的一个点,而 β_k 之右再沒有原集合的点.

同法可証受限于下的实数集合一定有一确下限.

§6. 复数的定义和矢量

实数域对加、減、乘、除自封,对极限手續也自封. 但依旧有不完备的地方,就是連极簡单的方程

$$x^2+1=0$$

在实数范围內都还沒有解. 由于这样的客观情况,我們很自然地便要求进一步扩充数的范围,引出新数,使旣包有实数,又保留实数的基本运算定律.

我們先来說明平面直角坐标系. 在平面上取两根相交于一点 0 而且相互垂直的直綫,分别称它們为 x 軸与 y 軸, 0 又称为原点. 使每根軸上的点都与实数一一对应起来(如 §3 所示),原点对应于零. 我們用下面的方向来确定 x 軸与 y 軸的正方向,即由 x 軸的正向逆时針轉 90° 即得 y 軸之正向.

过平面任意一点 P,作两条直綫,分别垂直于 x 軸与 y 軸. 設垂足对应的二实数分别是 x_1 与 y_1,于是 P 点便决定了一实数对 (x_1,y_1). 反之,如果有一实数对 (x_1,y_1),我們分别过 x 軸与 y 軸上的点 x_1 与 y_1, 作两条分别垂直于 x 軸与 y 軸的直綫,这两条直綫相交于一点 P. 因此实数对与平面上的点成为一一对应. 称 (x_1,y_1) 为点 P 的座标,其中 x_1 又称为橫座标, y_1 为縱座标. 上述座标系統叫做直角座标系統,也称为 Descartes 座标系統.

x 軸与 y 軸将平面分成四个象限,这四个象限中点的座标的符号为

复数(或称复虛数) α 就是一个实数对 (a,b). 命 $\beta=(c,d)$ 是另一复数,这两数的加法定义为

坐标 \ 符号 \ 象限	I	II	III	IV
x	+	−	−	+
y	+	+	−	−

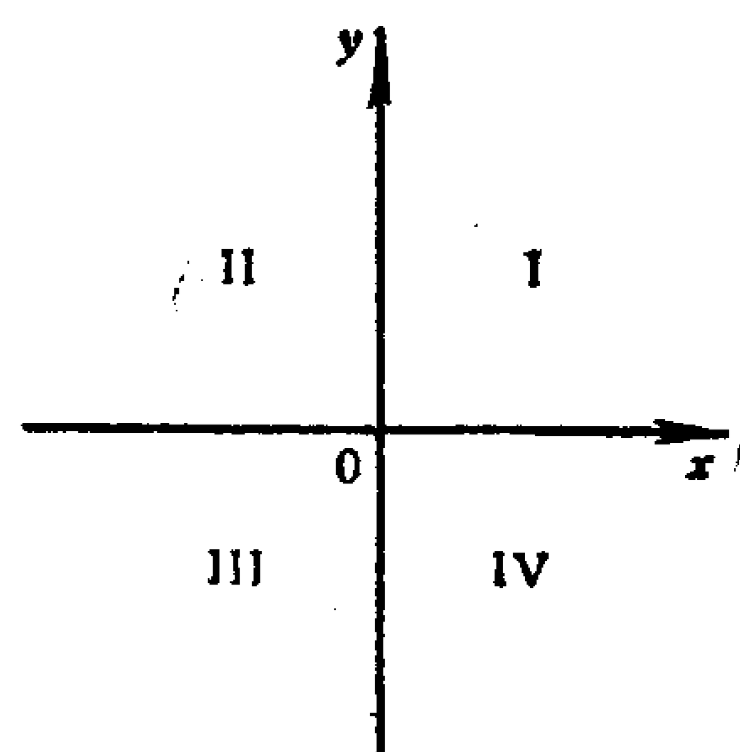


图 5

$$\alpha+\beta=(a+c,\ b+d).$$

而乘法的定义是

$$\alpha\beta=(a,\ b)(c,\ d)=(ac-bd,\ ad+bc).$$

定义矢量为平面上有方向有长短的綫段．我們现在討論的矢量是指有以下意义的自由矢量：同方向等长度的矢量不加区别地看成为一个矢量． 例如，由原点出发到 $(a,\ b)$ 点的矢量和由 $(\xi,\ \eta)$ 点出发到 $(a+\xi,\ b+\eta)$ 点的矢量就被看成为同一矢量．所以，一个复数代表一个矢量，并且一个矢量也代表一个复数．

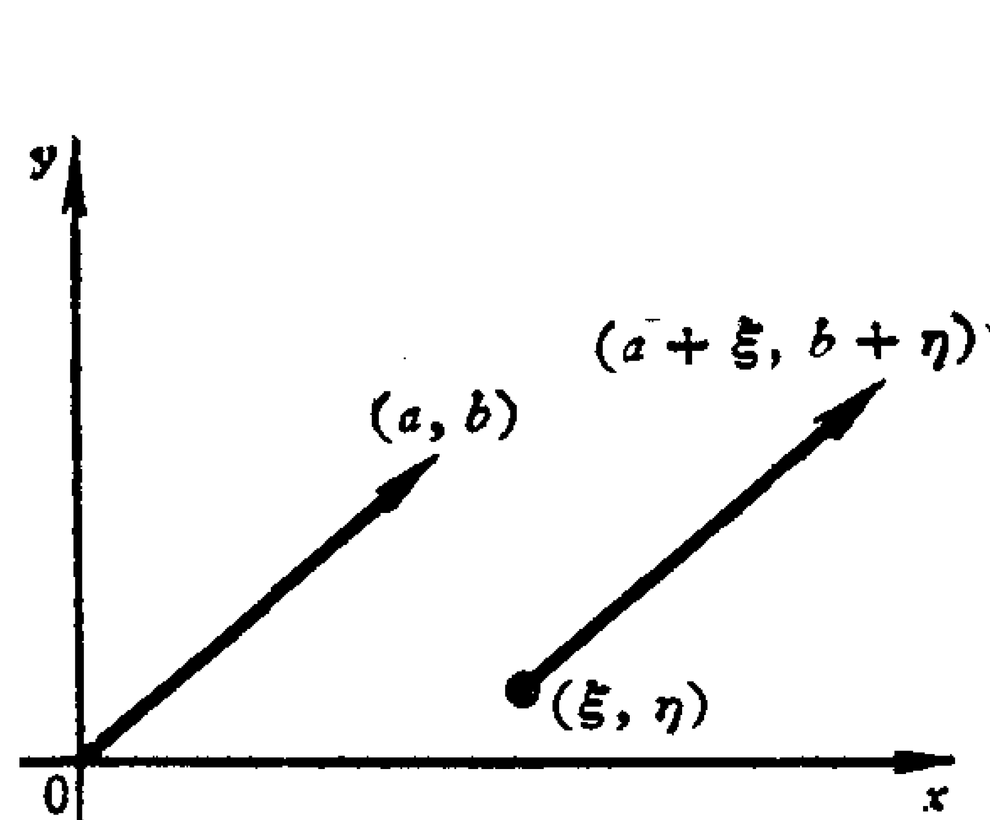


图 6

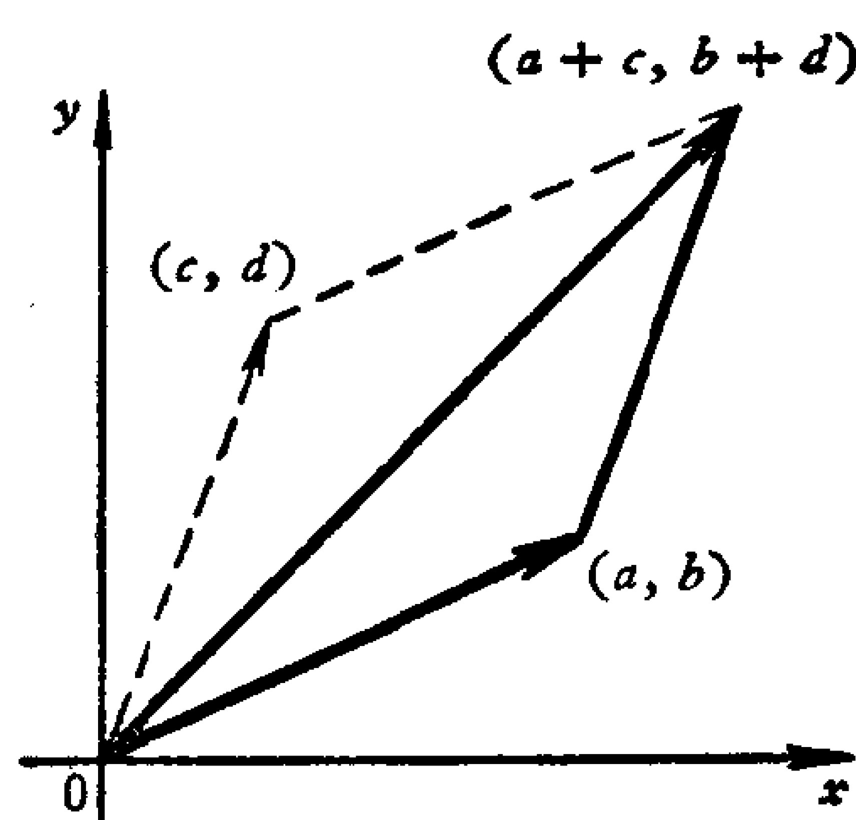


图 7

两个矢量的和的定义：把第二个矢量的起点接在第一个矢量的終点上，由第一矢量的起点到第二矢量的終点的矢量便是这两个矢量的和．第一个矢量用 $(a,\ b)$ 表示，第二个用 $(c,\ d)$ 表示．把第二个矢量移成为从点 $(a,\ b)$ 到点 $(a+c,\ b+d)$ 的綫段．显然可見，这两矢量的和矢量 $(a+c,\ b+d)$ 就是以矢量 $(a,\ b)$ 及 $(c,\ d)$ 为边的平行四边形的对角綫．这叫做平行四边形法則．由此可見，矢量的加法和复数的加法是完全一致的．

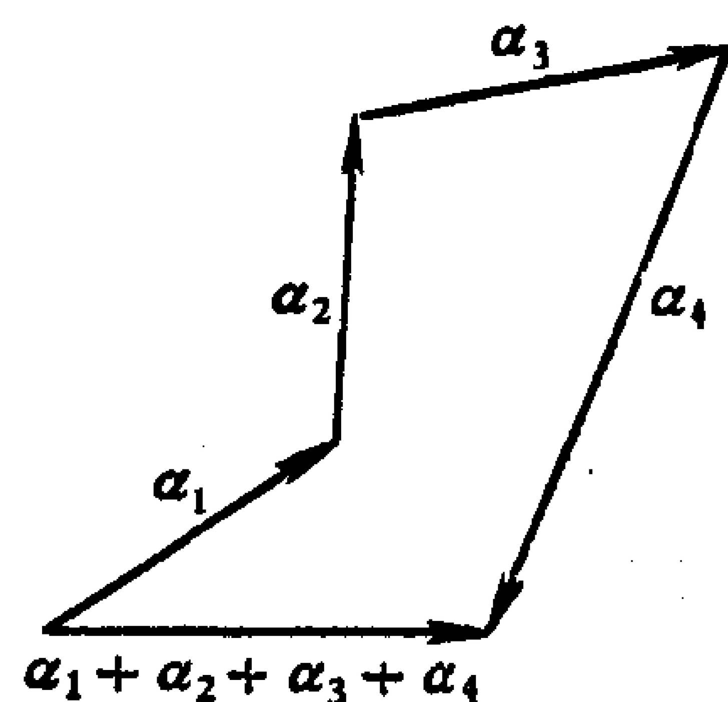


图 8

n 个复数

$$\alpha_k=(a_k,\ b_k),\quad k=1,\ 2,\ \cdots,\ n$$

的和等于

$$\alpha_1+\cdots+\alpha_n=(a_1+\cdots+a_n,\ b_1+\cdots+b_n).$$

它的几何意义就是把所对应的各个矢量一个接着一个地画下来，从 α_1 的起点到 α_n 的終点連成一个矢量，这个矢量就

代表了我們的复数之和.

不难看出,复数的和并不依賴于各項的先后次序(交換律,就是 $\alpha+\beta=\beta+\alpha$); 各項可以任意組合地先求和或后求和(結合律,就是 $\alpha+(\beta+\gamma)=(\alpha+\beta)+\gamma$).

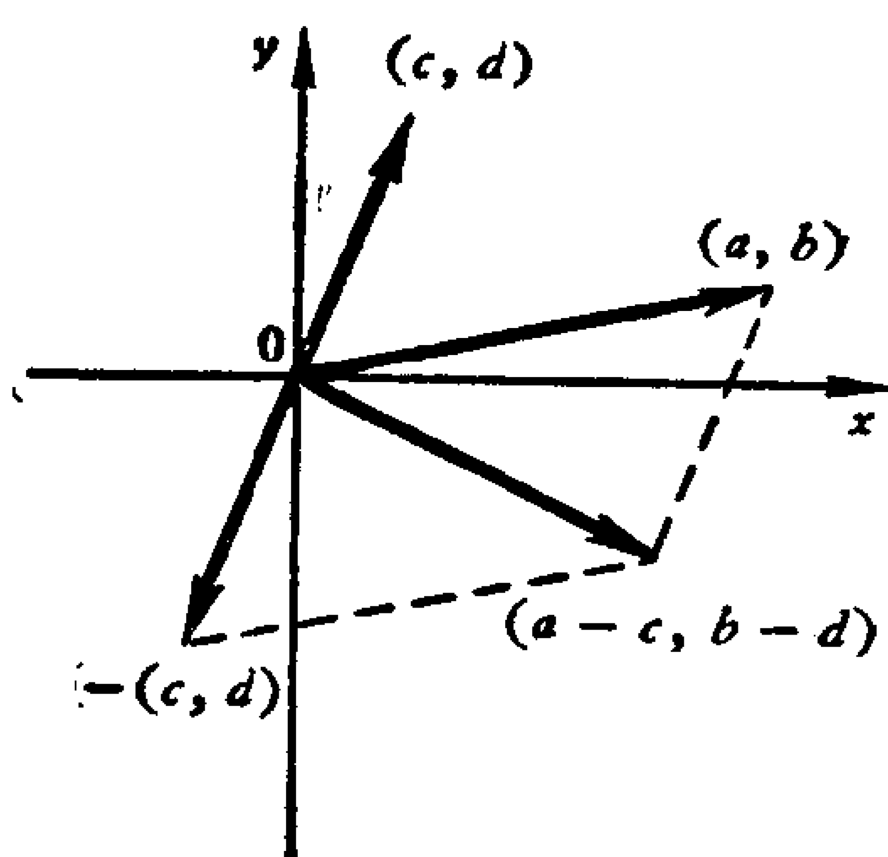


图 9

減法就是加法的逆运算. 两个矢量的差为

$$(a, b)-(c, d)=(a-c, b-d),$$

这就是做一个与 (c, d) 方向相反的矢量 $(-c, -d)$, 把它加在 (a, b) 上.

由勾股定理可知,矢量 (a, b) 的长度(即原点 $(0, 0)$ 至点 (a, b) 的距离)等于 $\sqrt{a^2+b^2}$,它称为矢量的模数,也称为所对应的复数 α 的絕对値. 用 $|\alpha|$ 表它. 同样可知,点 (a_1, b_1) 至点 (a_2, b_2) 的距离为

$$\sqrt{(a_1-a_2)^2+(b_1-b_2)^2}. \tag{1}$$

因为三角形两边长之和不小于另一边长,可知

$$|\alpha|+|\beta| \geqslant |\alpha+\beta|. \tag{2}$$

这一公式的解析表达式是

$$\sqrt{a^2+b^2}+\sqrt{c^2+d^2} \geqslant \sqrt{(a+c)^2+(b+d)^2}. \tag{3}$$

讀者試自己直接証明一下. 一般說来,上式是取不等号的,只有当两矢量同向的时候,才取等号.

同样可知

$$|\alpha_1+\cdots+\alpha_n| \leqslant |\alpha_1|+\cdots+|\alpha_n|,$$

且仅当 $\alpha_1, \cdots, \alpha_n$ 都同向时才取等号.

命 $\gamma=(e, f)$, 在式(2)中以 $\gamma-\alpha$ 代 β,可知

$$|\alpha|+|\gamma-\alpha| \geqslant |\gamma|.$$

所以得出

$$|\gamma-\alpha| \geqslant \big||\gamma|-|\alpha|\big|.$$

从而我們得出

$$\big||\alpha|-|\beta|\big| \leqslant |\alpha-\beta| \leqslant |\alpha|+|\beta|.$$

§7. 极坐标及复数乘法

在說明复数乘法之前,先介紹复数 $\alpha=(a, b)$ 的另一表示法,即极坐标表示法. 用 ρ 表示矢量的长度 $\sqrt{a^2+b^2}$,用 θ 表示矢量和 x 軸所夾的角度,称为輻角. 現在任何一点 (a, b) 都可以表成为

$$a=\rho\cos\theta, \quad b=\rho\sin\theta, \quad 0 \leqslant \rho, \quad 0 \leqslant \theta < 2\pi,$$

就是 $\alpha=(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta)$. 除掉原点 $(0, 0)$ 以外, 其他任一点一定有唯一的一組 ρ, θ, 并且对适合以上条件的不同的 ρ, θ 組,对应的点也各不相同.

如果

$$\beta=(\tau\cos\psi,\ \tau\sin\psi),$$

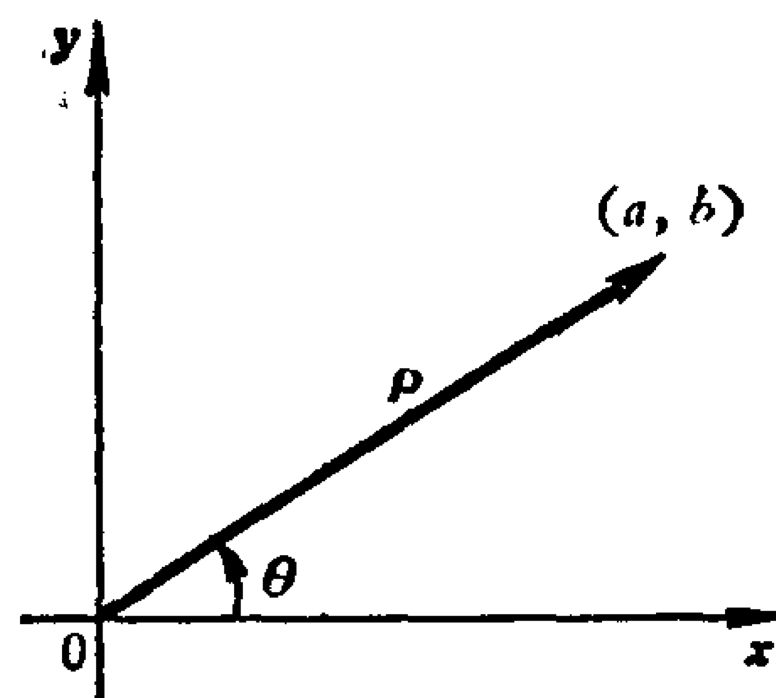


图 10

則乘积

$$\begin{aligned}\alpha\beta &= (ac-bd,\ ad+bc)=\\ &=(\rho\tau(\cos\theta\cos\psi-\sin\theta\sin\psi),\\ &\quad \rho\tau(\cos\theta\sin\psi+\sin\theta\cos\psi))=\\ &=(\rho\tau\cos(\theta+\psi),\ \rho\tau\sin(\theta+\psi));\end{aligned}$$

換言之，两个复数乘积的絕对值是各因子絕对值的乘积，其輻角等于各因子輻角的和.

当然可以推广为：几个复数乘积的絕对值等于其各个因子絕对值的乘积，其輻角等于各个輻角的和.

由此可見，复数的乘法并不依賴于各項的先后次序（交換律，就是 $\alpha\beta=\beta\alpha$），也不依賴于任意組合地先求积或后求积（結合律，就是 $\alpha(\beta\gamma)=(\alpha\beta)\gamma$），也不难看出分配律

$$(\alpha_1+\alpha_2)\beta=\alpha_1\beta+\alpha_2\beta$$

成立. 讀者試自証之.

除法是乘法的逆运算. 我們有

$$\frac{\alpha}{\beta}=\frac{(\rho\cos\theta,\ \rho\sin\theta)}{(\tau\cos\psi,\ \tau\sin\psi)}=\frac{\rho}{\tau}(\cos(\theta-\psi),\sin(\theta-\psi)),\quad (\tau\neq 0).$$

把 $\bar{\alpha}=(a,-b)$ 定义为 α 的共軛数，显然有

$$\alpha\bar{\alpha}=(a,b)(a,-b)=(\rho^2,0)$$

及

$$\overline{\alpha+\beta}=\bar{\alpha}+\bar{\beta},\quad \overline{\alpha\beta}=\bar{\alpha}\bar{\beta}.$$

由乘法的性质可知，在研究复数时，我們有两个重要的单位

$$(1,0),\quad (0,1).$$

第一个单位具有

$$(1,0)(a,b)=(a,b)$$

的性質，所以我們就用 1 来表它. $(a,0)$ 对应于 a. 所有的 $(a,0)$ 与实数系統完全一致，我們也就簡单地用 a 来代表 $(a,0)$.

第二个单位用以下的符号：

$$i=(0,1).$$

显然有

$$i^2=-1.$$

形如 $(0,b)$ 的复数，我們就用 bi 来表它，如此任一复数都可以写成为

$$\alpha=(a,b)=a+bi.$$

运算法則可以写成为

$$\alpha+\beta=(a+bi)+(c+di)=a+c+(b+d)i,$$

$$\alpha\beta = (a + bi)(c + di) = ac - bd + (ad + bc)i,$$
$$\alpha\bar{\alpha} = (a + bi)(a - bi) = a^2 + b^2 = |\alpha|^2.$$

a 称为复数 α 的实数部分，有时用符号 $\Re\alpha$ 表它；b 称为虚数(或純虛数)部分，用 $\Im\alpha$ 表它．我們称 x 軸为实軸，y 軸为虛軸．

我們現在談一下复数乘积的几何意义．

定义． 二矢量 $\alpha = (a, b)$ 与 $\beta = (c, d)$ 的內积为

$$\alpha \cdot \beta = (a, b) \cdot (c, d) = ac + bd.$$

用极坐标，內积就是

$$\rho\tau(\cos\theta\cos\psi + \sin\theta\sin\psi) = \rho\tau\cos(\theta - \psi),$$

这儿 $\theta - \psi$ 是两矢量的夾角．

$\alpha \cdot \alpha = a^2 + b^2$ 是矢量 α 的长度的平方，矢量 α 与 β 的夾角的余弦也可以表示为

$$\cos(\theta - \tau) = \frac{ac + bd}{\sqrt{a^2 + b^2}\sqrt{c^2 + d^2}} = \frac{\alpha \cdot \beta}{\sqrt{\alpha \cdot \alpha}\sqrt{\beta \cdot \beta}}. \tag{1}$$

由此可見，如果二矢量的內积为零，則它們是互相垂直的．

对应于 (a, b) 与 (c, d) 的复数命之为 α 与 β，則

$$\alpha\bar{\beta} = (ac + bd) + (bc - ad)i.$$

所以該二矢量的內积也就是 $\alpha\bar{\beta}$ 的实数部分，也就是

$$(a, b) \cdot (c, d) = \frac{1}{2}(\alpha\bar{\beta} + \bar{\alpha}\beta).$$

由此可以得出余弦定律

$$|\alpha - \beta|^2 = |\alpha|^2 + |\beta|^2 - \alpha\bar{\beta} - \bar{\alpha}\beta = |\alpha|^2 + |\beta|^2 - 2|\alpha||\beta|\cos(\theta - \psi).$$

$\alpha\bar{\beta}$ 的虛数部分是

$$\frac{1}{2i}(\alpha\bar{\beta} - \bar{\alpha}\beta) = bc - ad = \rho\tau(\sin\theta\cos\psi - \cos\theta\sin\psi) = \rho\tau\sin(\theta - \psi),$$

这就是以矢量 (a, b) 与 (c, d) 做边的平行四边形的面积．

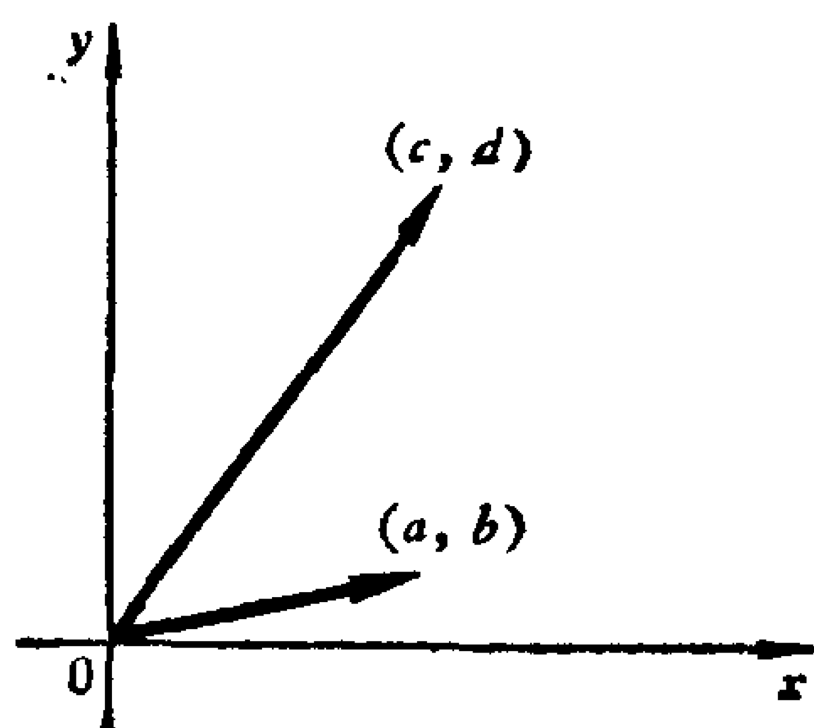


图 11

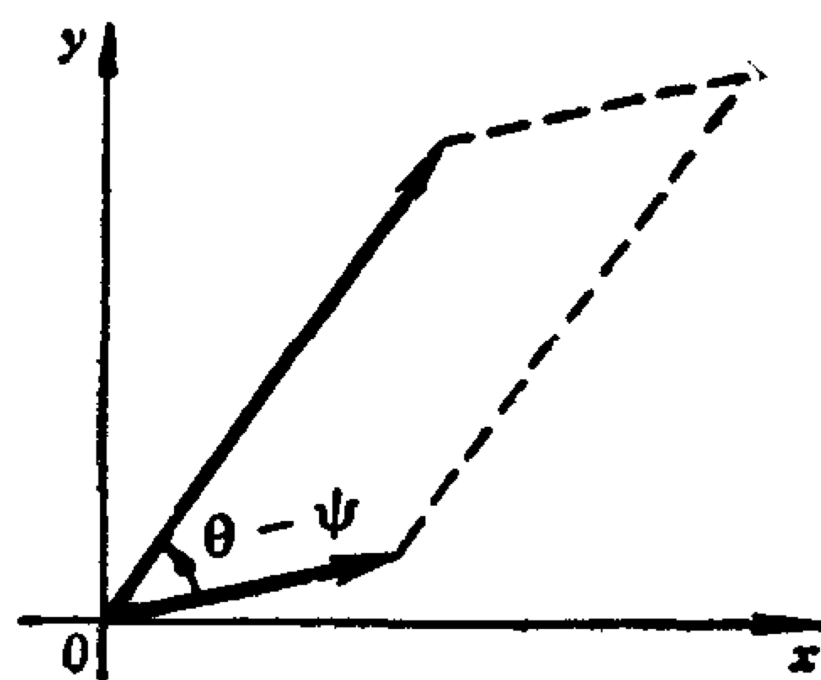


图 12

§ 8. De Moivre 定理

我們立刻可以把乘法公式推广到几个复数．命 $\alpha_k = \rho_k(\cos\theta_k + i\sin\theta_k)$, $k = 1, 2,$

$\cdots, n$，則

$$\alpha_1\cdots\alpha_n = \rho_1\cdots\rho_n(\cos(\theta_1+\cdots+\theta_n) + i\sin(\theta_1+\cdots+\theta_n)).$$

可以用归納法来証明这一結果．当 $n=2$ 时，由 §7 可知本結論正确．假定这一結論当 $n-1$ 时正确，則

$$\begin{aligned}(\alpha_1\cdots\alpha_{n-1})\alpha_n &= \rho_1\cdots\rho_{n-1}(\cos(\theta_1+\cdots+\theta_{n-1}) + \\ &+ i\sin(\theta_1+\cdots+\theta_{n-1}))\rho_n(\cos\theta_n + i\sin\theta_n) = \\ &= \rho_1\cdots\rho_n(\cos(\theta_1+\cdots+\theta_n) + i\sin(\theta_1+\cdots+\theta_n)).\end{aligned}$$

特別当 $\rho_1=\cdots=\rho_n=\rho$，$\theta_1=\cdots=\theta_n=\theta$ 时，我們有

De Moivre 定理．对任一自然数 n，常有

$$(\rho(\cos\theta + i\sin\theta))^n = \rho^n(\cos n\theta + i\sin n\theta). \tag{1}$$

又由

$$(\cos\theta + i\sin\theta)(\cos\theta - i\sin\theta) = 1,$$
$$(\cos\theta + i\sin\theta)^{-1} = (\cos(-\theta) + i\sin(-\theta))$$

可知，式(1)对負整数 n 也正确．

利用 De Moivre 定理我們可以解方程

$$x^n = 1. \tag{2}$$

或者更一般些，解方程

$$x^n = \alpha,\quad \alpha = \rho(\cos\psi + i\sin\psi),\quad \rho > 0,\quad 0 \leqslant \psi < 2\pi. \tag{3}$$

命 $x = r(\cos\theta + i\sin\theta)$，則得

$$r^n = \rho,\quad n\theta = \psi + 2\pi k, \tag{4}$$

此处 k 是一整数，由此得出

$$r = \rho^{\frac{1}{n}},\quad \theta = \frac{1}{n}(\psi + 2\pi k),\quad k = 0, 1, 2, \cdots, n-1.$$

它們都是方程(3)的不同的解，一共有 n 个．

特別是方程(2)，它的 n 个根就是单位圓的內接正 n 边形的頂点．命

$$\varepsilon = \cos\frac{2\pi}{n} + i\sin\frac{2\pi}{n},$$

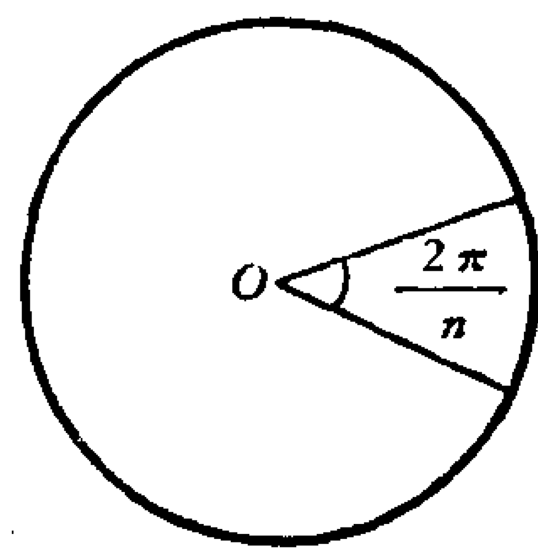


图 13

則其他諸根可以写成为

$$\varepsilon, \varepsilon^2, \varepsilon^3, \cdots, \varepsilon^{n-1},\quad \varepsilon^n = 1.$$

一般說来，如果 x_0 是式(3)的一个根，則 $x_0\varepsilon$，$x_0\varepsilon^2$，$\cdots$，$x_0\varepsilon^{n-1}$ 也都是式(3)的根．

当 $n=3$ 时，

$$\varepsilon = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2},\quad \varepsilon^2 = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2},\quad \varepsilon^3 = 1.$$

当 $n=4$ 时，

$$\varepsilon = i,\quad \varepsilon^2 = -1,\quad \varepsilon^3 = -i,\quad \varepsilon^4 = 1.$$

De Moivre 的定理有以下的应用.

例 1. 由

$$\cos 2\theta + i\sin 2\theta = (\cos\theta + i\sin\theta)^2 = \cos^2\theta - \sin^2\theta + 2i\sin\theta\cos\theta,$$

比較实数部分与虛数部分,得出倍角公式

$$\cos 2\theta = \cos^2\theta - \sin^2\theta, \quad \sin 2\theta = 2\sin\theta\cos\theta.$$

一般地說,从

$$\cos n\theta + i\sin n\theta = (\cos\theta + i\sin\theta)^n$$

可得

$$\cos n\theta = \cos^n\theta - \binom{n}{2}\cos^{n-2}\theta\sin^2\theta + \\ + \binom{n}{4}\cos^{n-4}\theta\sin^4\theta + \cdots + (-1)^k\binom{n}{2k}\cos^{n-2k}\theta\sin^{2k}\theta + \\ + \cdots + \begin{cases} (-1)^{\frac{n}{2}}\sin^n\theta, & \text{当 } n \text{ 是偶数}, \\ (-1)^{\frac{1}{2}(n-1)}\cos\theta\sin^{n-1}\theta, & \text{当 } n \text{ 是奇数} \end{cases}$$

及

$$\sin n\theta = \binom{n}{1}\cos^{n-1}\theta\sin\theta - \binom{n}{3}\cos^{n-3}\theta\sin^3\theta + \\ + \cdots + (-1)^k\binom{n}{2k+1}\cos^{n-2k-1}\theta\sin^{2k+1}\theta + \\ + \cdots + \begin{cases} (-1)^{\frac{1}{2}(n-2)}\cos\theta\sin^{n-1}\theta, & \text{当 } n \text{ 是偶数}, \\ (-1)^{\frac{1}{2}(n-1)}\sin^n\theta, & \text{当 } n \text{ 是奇数}. \end{cases}$$

例 2. 求和

$$A_n = 1 + r\cos\theta + r^2\cos 2\theta + \cdots + r^{n-1}\cos(n-1)\theta,$$
$$B_n = r\sin\theta + r^2\sin 2\theta + \cdots + r^{n-1}\sin(n-1)\theta.$$

作复数 $A_n + iB_n$,由 De Moivre 定理可知

$$A_n + iB_n = 1 + r(\cos\theta + i\sin\theta) + \\ + r^2(\cos 2\theta + i\sin 2\theta) + \cdots + r^{n-1}(\cos(n-1)\theta + i\sin(n-1)\theta) = \\ = 1 + r(\cos\theta + i\sin\theta) + r^2(\cos\theta + i\sin\theta)^2 + \cdots + r^{n-1}(\cos\theta + i\sin\theta)^{n-1} = \\ = \frac{1 - r^n(\cos n\theta + i\sin n\theta)}{1 - r(\cos\theta + i\sin\theta)} = \\ = \frac{1 - r^n(\cos n\theta + i\sin n\theta)}{1 - r(\cos\theta + i\sin\theta)} \cdot \frac{1 - r\cos\theta + ir\sin\theta}{1 - r\cos\theta + ir\sin\theta} = \\ = \frac{r^{n+1}\cos(n-1)\theta - r^n\cos n\theta - r\cos\theta + 1}{r^2 - 2r\cos\theta + 1} + \\ + \frac{r^{n+1}\sin(n-1)\theta - r^n\sin n\theta + r\sin\theta}{r^2 - 2r\cos\theta + 1}i.$$

比較实数部分及虛数部分可知

$$A_n=\frac{r^{n+1}\cos(n-1)\theta-r^n\cos n\theta-r\cos\theta+1}{r^2-2r\cos\theta+1},$$
$$B_n=\frac{r^{n+1}\sin(n-1)\theta-r^n\sin n\theta+r\sin\theta}{r^2-2r\cos\theta+1}.$$

§9. 复数的完备性

关于极限的概念也十分容易地推广到复数范围。

定义 1. 一个复数貫

$$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n, \cdots,$$

如果复数 α 具有以下性质，则称 α 为这个复数貫的极限：任給 $\varepsilon>0$，存在一个自然数 N，使当 $n>N$ 时，

$$|\alpha_n-\alpha|<\varepsilon.$$

定义 2. 适合以下条件(称为 Cauchy 判别条件)的复数貫

$$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n, \cdots$$

称为收斂貫：任給 $\varepsilon>0$，存在一个自然数 N，使当 l, m 都大于N时，有

$$|\alpha_l-\alpha_m|<\varepsilon.$$

定理 1. 凡收斂貫一定收斂于一个复数.

这定理的証明很容易. 由条件可知，α_n 的虚、实部分各成一收斂貫，然后由实数的性質立刻得出本定理.

定理 2. 在一有界的无穷点集中一定可以选出一个有极限的子貫.

所以复数具有实数所有的一切完备性：对极限自封，对加、减、乘、除自封，并且还多了一个性質，就是 $x^2+1=0$ 是可解的. 是否还有方程在复数范围内不可解？如有，我們还可能扩张复数系統. 不必再扩张了，因为任何方程在复数范围内都可解.

定理 3(代数方程基本定理). 任何一个复系数方程一定至少有一个复数根. 換言之，在复数范围内沒有一个方程是不可解的.

我們不在此証明这一定理，以后講复变数函数論时再加以論証.

如果 x_1 是代数方程

$$f(x)=\alpha_n x^n+\alpha_{n-1}x^{n-1}+\cdots+\alpha_1 x+\alpha_0=0$$

的一个根，也就是 $f(x_1)=0$，則由

$$x^m-x_1^m=(x-x_1)(x^{m-1}+x^{m-2}x_1+\cdots+x_1^{m-1})$$

可知多項式

$$f(x)=\alpha_n x^n+\alpha_{n-1}x^{n-1}+\cdots+\alpha_1 x+\alpha_0=$$
$$=f(x)-f(x_1)=\alpha_n(x^n-x_1^n)+\alpha_{n-1}(x^{n-1}-x_1^{n-1})+\cdots+\alpha_1(x-x_1)+\alpha_0-\alpha_0=$$
$$=(x-x_1)(\alpha_n(x^{n-1}+\cdots+x_1^{n-1})+\alpha_{n-1}(x^{n-2}+\cdots+x_1^{n-2})+\cdots+\alpha_1),$$

即 $f(x)$ 有一个因子 $(x-x_1)$. 換句話說，如果 $f(x_1)=0$，則 $(x-x_1)$ 一定除得尽

$f(x)$. 去掉因子$(x-x_1)$之后,仍然得一多項式,用以上方法又可求出另一因子$(x-x_2)$,等等. 依此方法續行,可知在复数范围內任一多項式可分解为

$$f(x)=\alpha_n(x-x_1)\cdots(x-x_n).$$

也就是說,如果連重根的个数也計算在內,那末**一个 n 次方程一定有 n 个根,并且不能再多.**

这說明了复数域有代数自封性.

从以上所得的結果也可以看到,

$$\alpha_n x^n+\cdots+\alpha_1 x+\alpha_0=\alpha_n(x-x_1)\cdots(x-x_n)=$$
$$=\alpha_n[x^n-\sigma_1 x^{n-1}+\cdots+(-1)^k\sigma_k x^{n-k}+\cdots+(-1)^n\sigma_n],$$

此处 σ_k 是从 $x_j\,(j=1,2,\cdots,n)$ 中任取 k 个所得乘积的总和,也就是

$$\sigma_1=x_1+\cdots+x_n,\ \sigma_2=x_1x_2+x_1x_3+\cdots+x_2x_3+\cdots+x_{n-1}x_n,\cdots,\ \sigma_n=x_1x_2\cdots x_n.$$

比較系数可見

$$\sigma_1=-\alpha_{n-1}/\alpha_n,\quad \sigma_2=\alpha_{n-2}/\alpha_n,\cdots,$$
$$\sigma_k=(-1)^k\alpha_{n-k}/\alpha_n,\cdots,\quad \sigma_n=(-1)^n\alpha_0/\alpha_n.$$

我們現在考虑实系数多項式

$$f(x)=\alpha_n x^n+\alpha_{n-1}x^{n-1}+\cdots+\alpha_1 x+\alpha_0.$$

如果 $f(x)$ 有一个复根 $\alpha+\beta i$,即

$$f(\alpha+\beta i)=0,$$

則 $\alpha-\beta i$ 也是一根,所以 $f(x)$ 可以被

$$[x-(\alpha+\beta i)][x-(\alpha-\beta i)]=(x-\alpha)^2+\beta^2=x^2+px+q,$$
$$(p=-2\alpha,\quad q=\alpha^2+\beta^2)$$

除尽. 用 x^2+px+q 除 $f(x)$,得出

$$f(x)=(x^2+px+q)f_1(x).$$

再研究 $f_1(x)=0$, 陆續进行可得以下的

定理 1. 一个实系数多項式可以分解为一次与二次的实因子.

所以一个实系数方程的复根是共軛地成对出現的,并且一对复根的重数相等;由此也推出,实系数的奇次多項式至少有一个实根.

§10. 四元数簡介

上面我們已經看到了把实数扩充到复数的过程,并且已經知道复数对四則运算自封、对代数运算自封和对极限也自封諸性質. 在代数的研究中,我們还可以把复数再扩展,扩展成为一个更大的系統,称为四元数. 复数仅有两个单元 1 与 i, 而四元数有四个单元 $1, i, j, k$. 一般的四元数的形式是

$$\alpha=a+bi+cj+dk,$$

此处 a, b, c, d 是实数. 两个四元数的和与差定义如下:設

$$\beta = a' + b'i + c'j + d'k,$$

則

$$\alpha \pm \beta = (a \pm a') + (b \pm b')i + (c \pm c')j + (d \pm d')k.$$

乘法的規則依賴于

$$i^2 = j^2 = k^2 = -1, \quad ij = -ji = k,$$

$$jk = -kj = i, \quad ki = -ik = j.$$

一般講来

$$\alpha\beta = (a + bi + cj + dk)(a' + b'i + c'j + d'k) = (aa' - bb' - cc' - dd') +$$
$$+ (ab' + ba' + cd' - dc')i + (ac' + ca' + db' - bd')j +$$
$$+ (ad' + da' + bc' - cb')k.$$

四元数的加法也适合交換律和結合律. 我們不难証明,乘法虽然适合結合律,但是并不适合交換律,这是和复数与实数最显著的不同. 換言之,我們有

$$\alpha(\beta\gamma) = (\alpha\beta)\gamma,$$

但是一般講来,

$$\alpha\beta \neq \beta\alpha.$$

而乘、加之間的分配律依然正确.

現在先研究怎样的 α 能使任一四元数 β 常有 $\alpha\beta = \beta\alpha$. 由 $\alpha i = i\alpha$ 可知 $c=d=0$; 又由 $\alpha j = j\alpha$ 可知 $b = d = 0$, 卽当 α 是实数 a 时才可能与所有的四元数交换. 实数域是四元数域的一部分,它是和所有的四元数都可以交换的数的集合.

我們定义

$$\bar{\alpha} = a - bi - cj - dk$$

为 α 的共軛数,实数

$$\alpha + \bar{\alpha} = 2a; \quad \alpha\bar{\alpha} = a^2 + b^2 + c^2 + d^2$$

各称为 α 的迹和 α 的模,各以 $S(\alpha)$ 与 $N(\alpha)$ 表之. 显然有

$$S(\alpha + \beta) = S(\alpha) + S(\beta).$$

我們現在証明

$$N(\alpha\beta) = N(\alpha) \cdot N(\beta).$$

在証明此式之前,我們先提出另一重要性質

$$\overline{\alpha\beta} = \bar{\beta}\bar{\alpha}.$$

这可以从乘法公式直接推出来,由此立得

$$N(\alpha\beta) = (\alpha\beta)(\overline{\alpha\beta}) = (\alpha\beta)(\bar{\beta}\bar{\alpha}) = \alpha(\beta\bar{\beta})\bar{\alpha} = N(\alpha) \cdot N(\beta).$$

如果 $N(\alpha) = 0$, 卽 $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 0$, 則 $a = b = c = d = 0$,因而 $\alpha = 0$.

又若 $\alpha\beta = 0$ 而 $\alpha \neq 0$, 在此式两边同乘以 $\bar{\alpha}$, 則得

$$N(\alpha) \cdot \beta = 0,$$

所以 $\beta = 0$; 同法若 $\beta \neq 0$, 可以得到 $\alpha = 0$. 換言之, 从 $\alpha\beta = 0$ 可知 $\alpha = 0$ 或

$\beta = 0$.

又 α 适合方程

$$x^2 - S(\alpha)x + N(\alpha) = 0,$$

原因是如果把 $x = \alpha$ 代进去，則得

$$\alpha^2 - (\alpha + \bar{\alpha})\alpha + \alpha\bar{\alpha} \equiv 0.$$

同样 $x = \bar{\alpha}$ 也是一根. 但与复数域中不同的是二次方程往往不止两个根，例如，最簡单的方程

$$x^2 = -1,$$

一眼就看出它至少有 $x = \pm i, \pm j, \pm k$ 六个根，实际上它有无穷个根，适合于 $p^2 + q^2 + r^2 = 1$ 的实数 p, q, r 常使

$$(pi + qj + rk)^2 = -(p^2 + q^2 + r^2) = -1.$$

关于四元数的一些几何意义将見于下章中.

补　　充

§11. 二进位計算

在§1里已提到二进位，卽只要用 0, 1 两个符号就可以表达出一切自然数来. 当然在书写的时候，二进位最长. 但由于可以用电路的开来表示 1，电路的关来表示 0，所以用二进位最便于化成机器的动作. 因此二进位制已經成为非常实用的了. 下面介紹二进位的一般运算.

例 1. 101011.1011 + 111.0011 = 110010.111. 算式是

$$\begin{array}{r} 101011.1011 \\ +\quad 111.0011 \\ \hline 110010.1110 \end{array}$$

例 2. 101011.1011 − 111.0011 = 100100.1. 算式是

$$\begin{array}{r} 101011.1011 \\ -\quad 111.0011 \\ \hline 100100.1000 \end{array}$$

例 3. 1101.1 × 10.1 = 100001.11. 算式是

$$\begin{array}{r} 1101.1 \\ \times\quad 10.1 \\ \hline 11011 \\ 110110 \\ \hline 100001.11 \end{array}$$

例 4. 110010 ÷ 101 = 1010. 算式是

```
        1010
101 / 110010
      101
      ------
        101
        101
      ------
          0
          0
          --
          0.
```

怎样化一个十进位数为二进位数？須把这数的整数部分与小数部分分开来算.

先介紹把十进位的整数化为二进位的方法. 用 2 除余 1 記 1，余 0 記 0 作为个位；再用 2 除所得的商，把余数記在上数之左；再用 2 除商，把余数記在上数之左等等.

例 5. 十进位的 25 等于二进位的 11001. 它的算式是

```
2 | 25 …… 1
   2 | 12 …… 0
      2 | 6 …… 0
         2 | 3 …… 1
              1.
```

将十进位小数化为二进位的方法是将小数乘以 2，得出的整数部分記作小数的第一位；留下的分数部分再乘以 2，把整数部分記作小数的第二位等等.

例 6. 十进位的 0.6145 等于二进位的 0.10011101…. 它的算式是

	0.6145
1	2290
0	4580
0	9160
1	8320
1	6640
1	3280
0	6560
1	3120.

所以，十进位的 25.6145 等于二进位的 11001.10011101….

把一个二进位数表为十进位数的方法也是相同的，須把这数的整数部分与小数部分分开来算. 整数部分的算法为除以 1010（即十进位的 10），所得余数化为十进位数記作个位；再除以 1010，所得余数化为十进位数記作十位；如此續行，即得出百位、千位，以至我們所需要的位数.

例 7. 二进位的 1110111001 等于十进位的 953. 算式是

```
1110111001 | 1010
1010       |--------------
---------- | 1011111 | 1010
 10011     | 1010    |------
  1010     |---------| 1001
---------- |   1111  |(百位)
  10011    |   1010  |
   1010    |---------|
---------- |    101  |
   10010   |  (十位) |
    1010   |
---------- |
    10000  |
     1010  |
---------- |
      1101 |
      1010 |
---------- |
        11 |
    (个位) |
```

将二进位小数化为十进位小数的方法是将小数乘以1010，得出的整数部分化为十进位数記作小数的第一位；留下的部分再乘以1010，把整数部分化为十进位数記作小数的第二位等等。

現在我們把求平方的方法介紹如下：与十进位数开方的方法相似，也是先将欲計算的数分段。但由于在二进位中

$$(a+b)(a+b)=a\cdot a+10a\cdot b+b\cdot b,$$

所以在原来乘20的地方换上乘100。

例8. $\sqrt{110001}=111$. 算式是

```
             11 | 00 | 01 | 111
              1 |    |    |------
-----------------------------
100 × 1  |   10   00
    + 1  |    1   01
-----------------------------
100 × 11 |        11   01
    + 1  |        11   01
-----------------------------
                           .
```

例9. $\sqrt{10}=1.011\cdots$. 算式是

```
              10 | 1.011
               1 |--------
-------------------
100         | 100
            | 000
            |--------
1000 + 1    | 10000
            |  1001
            |---------
10100 + 1   |  11100
            |  10101
            |---------
                 111 .
```

讀者不难由此推出任意 r 进位的四則运算以及将 r 进位表为 s 进位数的方法。

§ 12. 循环小数

若有自然数 n 及 λ 使 $b_{n+l\lambda+k}=b_{n+k}$ $(k=1,2,\cdots;\ l=1,2,\cdots)$，則称小数 $\alpha=a_m a_{m-1}\cdots a_1.b_1b_2\cdots$ 为循环小数，簡記为

$$\alpha=a_m\cdots a_1.b_1\cdots b_n\dot{b}_{n+1}\cdots\dot{b}_{n+\lambda}.$$

定理 1. 每一循环小数均为有理数.

証. 記

$$\alpha_s=a_m\cdots a_1.b_1\cdots b_s,\quad \beta=0.\overbrace{00\cdots0}^{n\text{位}}b_{n+1}\cdots b_{n+\lambda},$$

則

$$\alpha_{n+l\lambda}=\alpha_n+\beta+\frac{\beta}{10^\lambda}+\cdots+\frac{\beta}{10^{(l-1)\lambda}}=\alpha_n+\frac{\beta\left(1-\dfrac{1}{10^{l\lambda}}\right)}{1-\dfrac{1}{10^\lambda}}.$$

由例 4.4 可知

$$\alpha=\lim_{l\to\infty}\alpha_{n+l\lambda}=\alpha_n+\frac{\beta}{1-\dfrac{1}{10^\lambda}},$$

故 α 为有理数. 定理証完.

定理 2. 有理数都是循环小数.

証. 我們只討論正有理数 $\frac{p}{q}$ 的情形，p，q 都是正整数. 用 q 除 p，得商数 a，余数 r_1；乘 10 于 r_1，再以 q 除之，得商数 b_1，余数 r_2；再乘 10 于 r_2，并以 q 除之，又得商数 b_2，余数 r_3，$\cdots$ 等等. 用式子表示，就是

$$\begin{aligned}p&=aq+r_1,&&0\leqslant r_1<q,\\10r_1&=b_1q+r_2,&&0\leqslant r_2<q,\\10r_2&=b_2q+r_3,&&0\leqslant r_3<q,\\&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots.\end{aligned}$$

a 就是 $\frac{p}{q}$ 的整数部分；b_1，b_2，b_3，$\cdots$ 則是 $\frac{p}{q}$ 的小数表示中的第一、二、三、$\cdots$位小数. 如果有自然数 n 与 λ，使 $r_n=r_{n+\lambda}$，那末乘它們以 10，再以 q 除之，所得的商数与余数应当相同，也就是說

$$b_{n+1}=b_{n+\lambda+1},\quad r_{n+1}=r_{n+\lambda+1}.$$

同理

$$\begin{aligned}&b_{n+2}=b_{n+\lambda+2},\quad r_{n+2}=r_{n+\lambda+2},\\&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\&b_{n+\lambda}=b_{n+2\lambda},\quad r_{n+\lambda}=r_{n+2\lambda},\\&b_{n+\lambda+1}=b_{n+2\lambda+1},\quad r_{n+\lambda+1}=r_{n+2\lambda+1},\\&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots,\end{aligned}$$

所以 $b_{n+l\lambda+k}=b_{n+k}$ ($k=1, 2, \cdots; l=1, 2, \cdots$). 因此 $\frac{p}{q}$ 的小数表示是循环的. 由于 $0 \leqslant r_i < q$ ($i=1, 2, \cdots$), 所以在 $q+1$ 个余数 $r_1, \cdots, r_{q+1}$ 中,一定有两个相等. 于是根据上面的說明, $\frac{p}{q}$ 一定是循环小数.

§13. 有理数接近实数

用小数来接近实数当然也就是用有理数接近实数的一种特殊形式. 在应用中,有时我們要用分母最小的有理数来接近实数. 我們现在还是从$\sqrt{2}$說起, $\xi=\sqrt{2}-1$ 在 0 与 1 之間. $\frac{1}{\xi}=\sqrt{2}+1$ 大于 1, 它的整数部分等于 2, 而分数部分等于 ξ. 換言之,有等式

$$\frac{1}{\xi}=2+\xi,$$

也就是

$$\xi=\frac{1}{2+\xi}.$$

用 0 和 $\frac{1}{2}$ 来比, $\frac{1}{2}$ 更接近于 ξ. 既然如此,上式右边如采用 $\frac{1}{2}$ 代 ξ 应当比 0 代 ξ 更精密些. 算出了 $\frac{1}{2+\frac{1}{2}}=\frac{2}{5}$, 也就是說, $\frac{2}{5}$ 比 $\frac{1}{2}$ 更接近于 ξ 些; 右边代以更精密的 $\frac{2}{5}$, 左边 $\frac{1}{2+\frac{2}{5}}=\frac{5}{12}$ 对 ξ 一定更精密些. 用这样办法算出一批分数

$$\frac{1}{2}, \frac{2}{5}, \frac{5}{12}, \frac{12}{29}, \frac{29}{70}, \frac{70}{169}, \frac{169}{408}.$$

如此得出的

$$\frac{169}{408}=0.414215$$

准到了五位小数. 这个方法使用簡单(指比开方法),并且收斂得也不慢,同时象 $\frac{169}{408}$ 还是分母不大于 408 的分数中与$\sqrt{2}-1$ 最接近的近似値.

以上的方法还体現了分析学上的一个重要方法——迭代法的原則.

現在我們把上面的結果予以推广.

命 ξ 表一正的实数, a_0 是它的整数部分;又命 $\xi-a_0=\frac{1}{\xi_1}$, 則 ξ_1 也是正实数, 而且大于 1. 再命 a_1 是 ξ_1 的整数部分及 $\xi_1-a_1=\frac{1}{\xi_2}$; 如此續行, 命 ξ_{n-1} 的整数部分是

a_{n-1}, 而

$$\xi_{n-1} - a_{n-1} = \frac{1}{\xi_n}.$$

如此就得出了一个分数

$$a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \ddots + \cfrac{1}{a_{n-1} + \cfrac{1}{\xi_n}}}}.$$

这样的写法占的篇幅太多,我們簡写为

$$a_0 + \frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \cdots + \frac{1}{a_{n-1}} + \frac{1}{\xi_n}$$

或

$$[a_0, a_1, a_2, \cdots, a_{n-1}, \xi_n].$$

經过計算易得

$$[a_0] = \frac{a_0}{1}, \quad [a_0, a_1] = \frac{a_0 a_1 + 1}{a_1},$$

$$[a_0, a_1, a_2] = \frac{a_2 a_1 a_0 + a_2 + a_0}{a_2 a_1 + 1}.$$

普通命

$$[a_0, \cdots, a_n] = \frac{p_n}{q_n} = \alpha_n,$$

称为 ξ 的第 n 个漸近分数或漸近值.

定理 1. 漸近分数的分母与分子之間有以下的关系:

$$p_0 = a_0, \quad p_1 = a_1 a_0 + 1, \cdots, \quad p_n = a_n p_{n-1} + p_{n-2},$$
$$q_0 = 1, \quad q_1 = a_1, \cdots, \quad q_n = a_n q_{n-1} + q_{n-2}.$$

証. 我們用归納法. 当 $n = 2$ 时,上面的結論显然正确. 假定已經知道以上的結論对 m 已經成立,由

$$\frac{p_{m+1}}{q_{m+1}} = [a_0, a_1, \cdots, a_{m+1}] = \left[a_0, a_1, \cdots, a_{m-1}, a_m + \frac{1}{a_{m+1}}\right] =$$

$$= \frac{\left(a_m + \frac{1}{a_{m+1}}\right) p_{m-1} + p_{m-2}}{\left(a_m + \frac{1}{a_{m+1}}\right) q_{m-1} + q_{m-2}} = \frac{a_m p_{m-1} + p_{m-2} + \frac{1}{a_{m+1}} p_{m-1}}{a_m q_{m-1} + q_{m-2} + \frac{1}{a_{m+1}} q_{m-1}} =$$

$$= \frac{p_m + \frac{1}{a_{m+1}} p_{m-1}}{q_m + \frac{1}{a_{m+1}} q_{m-1}} = \frac{a_{m+1} p_m + p_{m-1}}{a_{m+1} q_m + q_{m-1}}$$

可得定理.

定理 2. p_n 与 q_n 还适合以下的公式:

$$p_n q_{n-1} - p_{n-1} q_n = (-1)^{n-1}, \quad n \geqslant 1 \tag{1}$$

及

$$p_nq_{n-2}-p_{n-2}q_n=(-1)^na_n,\quad n\geqslant 2. \tag{2}$$

證. 当 $n=1$ 时,(1)式显然成立. 現在行归納法,由定理 1 可知

$$p_nq_{n-1}-p_{n-1}q_n=(a_np_{n-1}+p_{n-2})q_{n-1}-(a_nq_{n-1}+q_{n-2})p_{n-1}=$$
$$=p_{n-2}q_{n-1}-q_{n-2}p_{n-1}=(-1)\cdot(-1)^n,$$

故得(1)式. 由此并定理 1 又可得出

$$p_nq_{n-2}-p_{n-2}q_n=(a_np_{n-1}+p_{n-2})q_{n-2}-p_{n-2}(a_nq_{n-1}+q_{n-2})=$$
$$=a_n(p_{n-1}q_{n-2}-p_{n-2}q_{n-1})=(-1)^na_n.$$

由(2)立刻得出一个单調递升貫

$$\alpha_0<\alpha_2<\alpha_4<\cdots$$

及一个单調递降貫

$$\alpha_1>\alpha_3>\alpha_5>\cdots,$$

并且由(1)立刻得出

$$\alpha_{2n}<\alpha_{2n-1}.$$

我們現在来証明

定理 3.

$$\lim_{n\to\infty}\alpha_{2n}=\lim_{n\to\infty}\alpha_{2n-1}=\xi.$$

因为 $q_n=a_nq_{n-1}+q_{n-2}\geqslant q_{n-1}+1\geqslant(q_{n-2}+1)+1\geqslant\cdots$, 所以这定理又可以是下述定理的推論.

定理 4.

$$\left|\xi-\frac{p_n}{q_n}\right|\leqslant\frac{1}{q_nq_{n+1}}<\frac{1}{q_n^2}.$$

証. 我們有

$$\xi=\left[a_0,\cdots,a_{n-1},a_n+\frac{1}{\xi_{n+1}}\right],$$

$$\xi=\frac{\xi_{n+1}p_n+p_{n-1}}{\xi_{n+1}q_n+q_{n-1}},\quad \xi_{n+1}\geqslant a_{n+1}\geqslant 1,$$

所以

$$\left|\xi-\frac{p_n}{q_n}\right|\leqslant\frac{|(\xi_{n+1}p_n+p_{n-1})q_n-p_n(\xi_{n+1}q_n+q_{n-1})|}{(\xi_{n+1}q_n+q_{n-1})q_n}\leqslant$$
$$\leqslant\frac{1}{(a_{n+1}q_n+q_{n-1})q_n}=\frac{1}{q_nq_{n+1}}.$$

例 1.

$$\left|\sqrt{2}-1-\frac{169}{408}\right|\leqslant\frac{1}{408\times(408\times 2+169)}=\frac{1}{408\times 985}<\frac{1}{4\times 10^5}.$$

$\sqrt{2}-1$ 与$\frac{169}{408}$的误差不超过四十万分之一.

例 2. 圓周率

$$\pi=[3,7,15,1,292,1,1,\cdots]$$

的漸近分数是

$$\frac{3}{1},\ \frac{22}{7},\ \frac{333}{106},\ \frac{355}{113},\ \frac{103993}{33102},\cdots.$$

在我国五世紀时，祖冲之以 $\frac{22}{7}$ 作为疏率，$\frac{355}{113}$ 作为密率，由以上的定理可知

$$\left|\pi-\frac{355}{113}\right|\leqslant\frac{1}{113\times 33102}<\frac{1}{10^6},$$

故取 π 为 $\frac{355}{113}$ 将准到小数六位.

附記．实質上，$\frac{p_n}{q_n}$ 是分母 $\leqslant q_n$ 的一切有理数中与 ξ 最接近的数. 关于此点，我們这儿不加証明(可参考数論导引，p. 271—272).

例 3. 为什么四年一閏，每隔四年添一天？为什么第一百年又少閏一天？

地球繞太阳一周需 365 天 5 小时 48 分 46 秒，也就是

$$365+\frac{5}{24}+\frac{48}{24\times 60}+\frac{46}{24\times 60\times 60}=365\frac{10463}{43200}.$$

展开为連分数得

$$365\frac{10463}{43200}=365+\frac{1}{4+}\ \frac{1}{7+}\ \frac{1}{1+}\ \frac{1}{3+}\ \frac{1}{5+}\ \frac{1}{64},$$

算法为

		43200
10463	4	41852
9436	7	1348
1027	1	1027
963	3	321
64	5	320
64	64	1

它的分数部分的漸近分数是

$$\frac{1}{4},\ \frac{7}{29},\ \frac{8}{33},\ \frac{31}{128},\ \frac{163}{673},\ \frac{10463}{43200}.$$

这說明四年加一天是初步的最好的逼近. 但 29 年加 7 天更精密些；33 年加 8 天又精密些(也就是 99 年加 24 天，我們的算法是 100 年加 24 天)；128 年加 31 天更精密(这就是說，头三个 33 年加 8 天，后一个 29 年加 7 天，共 $29+33\times 3=128$ 年加 31 天. 在四百年內，有三个 128 年，四个 4 年，所以四百年加 $3\times 31+4\times 1=97$ 天，这与我們的算法相同)；等等.

由上看来，我們的历法是相当精确的.

例 4. 农历月大月小是怎样来的?

从太阳上看月亮繞地球一周所需要的时間为 29.5306 天,展成連分数得

$$0.5306=\frac{1}{1}+\frac{1}{1}+\frac{1}{7}+\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{33}+\frac{1}{1}+\frac{1}{2},$$

它的漸近分数是

$$\frac{1}{1},\ \frac{1}{2},\ \frac{8}{15},\ \frac{9}{17},\ \frac{26}{49},\ \frac{867}{1634},\cdots.$$

故就一个月来說,最近似的 30 天,2 个月就应当一大一小,15 个月中应当 8 大 7 小,17 个月中 9 大 8 小等等.就 49 个月来說,前两个 17 个月里,均有 9 个大月,再 15 个月里有 8 个大月,共 49 个月中有 26 个大月.

例 5. 怎样算农历的閏月?

$$\frac{365.2422}{29.5306}=12.37\cdots.$$

将 0.37 展开成連分数,得

$$0.37=\frac{1}{2}+\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{1}+\frac{1}{3},$$

它的漸近分数为

$$\frac{1}{2},\ \frac{1}{3},\ \frac{3}{8},\ \frac{7}{19},\ \frac{10}{27}.$$

因此,二年一閏太多,三年一閏太少,八年三閏太多,十九年七閏太少,等等.

例 6. 月蝕的周期是多少?

朔望月就是相同的月面位相隔的时間,它等于 29.5306 日.交点月就是月球在它軌道上从"交点"("交点"就是月亮繞地球軌道与地球繞太阳軌道的交点)开始繞地球一周再回到这个"交点"所需的时間,它等于 27.2123 日.

$$\frac{29.5306}{27.2123}=1+\frac{1}{11}+\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{1}+\frac{1}{4}+\frac{1}{2}+\frac{1}{9}+\frac{1}{1}+\frac{1}{25}+\frac{1}{2}.$$

考虑 $1+\frac{1}{11}+\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{1}+\frac{1}{4}=\frac{242}{223}$,即經过 223 个朔望月或 242 个交点月,这就是月蝕的周期,它等于 223×29.5306 天 $=6585$ 天 $=18$ 年零 11 天.

例 7. 火星离地球最近的一年叫火星的大冲,已知火星公轉一周是 687 日.因为

$$\frac{687}{365.25}=1+\frac{1}{1}+\frac{1}{7}+\frac{1}{3}+\frac{1}{1}+\frac{1}{4}+\frac{1}{2},$$

考虑 $1+\frac{1}{1}+\frac{1}{7}=\frac{15}{8}$,所以每隔 15 年有一次大冲.

§14. 誤 差

上面我們用无穷小数来描述实数,但在实际計算时,我們总是用有限部分来計算的,

这种取舍之間便产生誤差. 取近似值的方法有两种：一种是取到小数第 n 位，以下的都舍弃掉，如此就得

$$0 \leqslant \alpha - \alpha_n < \frac{1}{10^n};$$

另一种是四舍五入法地取到小数第 n 位，这样的近似值 p_n 适合于

$$-\frac{1}{2}\frac{1}{10^n} \leqslant \alpha - p_n < \frac{1}{2}\frac{1}{10^n}.$$

在实际計算时，我們必須注意两件事：(1)原資料数字的精确程度；(2)在計算时可能产生的誤差. 如果我們用位数过多的并不可靠的数字入算，是徒劳无功的，因而也是完全不必要的. 我們現在不討論原資料所产生的可能誤差，而只談計算誤差. 在計算的时候，我們必須先注意所入算的数字的可靠性；另一方面，我們也必須了解对答案的精确度的要求. 这样，針对前者，我們可以不算沒有把握的計算，而对于后者，我們可以免去不必要的計算.

我們現在只准备說明几条最簡单的估計方法.

定义. 若量 A 以数 a 为其近似值，则 A 与 a 的差的絕对值称为 a 的絕对誤差，又相对誤差是 a 的絕对誤差和它本身的絕对值的比值，就是 $|A-a|/|a|$[1].

絕对誤差和相对誤差都是沒有实用价值的概念. 一般講来，我們应用最大絕对誤差(或称外絕对誤差)或最大相对誤差(或称外相对誤差). 所謂最大相对誤差，就是指 $|A-a|/|a|$ 的某一有把握的上界. 例如，用四舍五入取 n 位小数所得的最大相对誤差就是 $\frac{1}{2a}\frac{1}{10^n}$.

例. 3.14 是 π 的漸近值，它的絕对誤差是 0.00159…，0.0016 可以用作最大絕对誤差，而

$$\frac{0.0016}{3.14} = 0.00051$$

是最大相对誤差.

我們用 δ_a 表 A 对 a 的最大相对誤差，则得

$$A = a + a\theta\delta_a, \quad |\theta| \leqslant 1.$$

今后我們用 θ 代表一个絕对值 $\leqslant 1$ 的数，但是每次不一定代表同一个数.

从

$$B = b + b\theta\delta_b, \quad |\theta| \leqslant 1$$

可得

$$A + B = a + b + (a+b)\theta\left(\frac{a}{a+b}\delta_a + \frac{b}{a+b}\delta_b\right) \leqslant a + b + (a+b)\max(\delta_a, \delta_b);$$

另一方面

$$A + B \geqslant a + b - (a+b)\max(\delta_a, \delta_b),$$

因而得出

1) 有时也将絕对誤差与量 A 的絕对值的比值 $|A-a|/|A|$ 定义作用 a 来近似 A 的相对誤差.

甲

乙

$$\delta_{a+b} \leqslant \max(\delta_a, \delta_b),$$

此处 $\max(\alpha, \beta, \cdots)$ 代表这些数中最大的一个.

又从

$$AB = ab(1+\theta\delta_a)(1+\theta\delta_b) = ab(1+\theta(\delta_a+\delta_b+\delta_a\delta_b))$$

可知

$$\delta_{ab} \leqslant \delta_a + \delta_b + \delta_a\delta_b,$$

但是一般講来, δ_a, δ_b 都是很小的数,所以 $\delta_a\delta_b$ 更小,因此我們也不妨写成为

$$\delta_{ab} \leqslant \delta_a + \delta_b. \tag{2}$$

同样,对任一自然数 m 有

$$\delta_{a^m} \leqslant m\delta_a. \tag{3}$$

又

$$\frac{A}{B} = \frac{a}{b}\,\frac{1+\theta\delta_a}{1+\theta\delta_b} = \frac{a}{b}\left(1+\theta\,\frac{\delta_a-\delta_b}{1+\theta\delta_b}\right).$$

由于

$$1+\theta\delta_b \geqslant 1-\delta_b$$

及

$$\frac{1}{1-\delta_b} = 1+\delta_b+\frac{\delta_b^2}{1-\delta_b}$$

可知,如果略去 $\delta_b\delta_a$, δ_b^2, $\dfrac{\delta_a\delta_b^2}{1-\delta_b}$ 与 $\dfrac{\delta_b^3}{1-\delta_b}$ 即得

$$\delta_{a/b} \leqslant \delta_a + \delta_b. \tag{4}$$

例 1. 在求方柱体积 $V = r^2h$ 时, $\delta_V = 2\delta_r + \delta_h$.

例 2. A 与 B 用四舍五入所得的数値各为 3.14 与 2.32, 求 $A+B$, $A-B$, AB 与 A/B 的誤差.

命

$$A = 3.14 + \frac{1}{2}\,\frac{1}{10^2}\theta, \quad B = 2.32 + \frac{1}{2}\,\frac{1}{10^2}\theta.$$

由

$$A + B = 5.46 + \frac{\theta}{10^2}$$

可知 $5.45 \leqslant A+B \leqslant 5.47$. $A+B$ 的准确小数值是 5.4,准两位. 而 $A-B=0.82+$ $+\dfrac{\theta}{10^2}$, $0.81 \leqslant A-B \leqslant 0.83$,所以 $A-B$ 的准确小数是 0.8. 同法, $7.25 \leqslant AB \leqslant 7.31$, $AB = 7.3$. $1.36 \leqslant A/B \leqslant 1.38$, $A/B = 1.4$.

定义. 从左方数过来第一个非 0 的数字叫做第一位有效数字. 例如, 0.034 中第一位有效数字是 3. 一般說来,一个数字有 n 位有效数字的意义是:在第 n 位以前的数字与精确数字相同,只有第 n 位数字可能与精确数值的同位数字有所不同,但差别也不大于一个单位.

例 1. 3.1416 是 π 按四舍五入法来計算出的五位有效数字,而 3.1415 是略去尾巴而

得出的五位有效数字.

祖冲之首先指出

$$3.1415926 < \pi < 3.1415927.$$

这对有效数字和誤差是极好的例子,是数学史上极光輝的貢献.

例 2. 任何一[厘米]^3 气体所含的分子数目是 2.683×10^{19} 个，它有四位有效数字(Loschmidt 数). Avogadro 数

$$6.023 \times 10^{23} [\text{克分子}]^{-1}$$

(卽一[克分子]中質点的数目)有四位有效数字.

例 3. $\log 2 = 0.3010$ 有四位有效数字.

例 4. 一浬等于 3.704 华里,它有四位有效数字.

現在証明：如果 A 的近似值 a 具有 n 位有效数字，则 a 的最大相对誤差 δ_a 不超过 $\frac{1}{z \cdot 10^{n-1}}$ (不用四舍五入法)或者 $\frac{1}{2z \cdot 10^{n-1}}$ (用四舍五入法)，其中 z 是 a 的第一位有效数字.

假定 a 的第一位有效数字是 $z \cdot 10^m$,从假定可知

$$|A - a| \leqslant 10^{m-n+1},$$

所以

$$\delta_a = \frac{10^{m-n+1}}{a} \leqslant \frac{10^{m-n+1}}{z \cdot 10^m} = \frac{1}{z \cdot 10^{n-1}}.$$

反之,如果 s 是满足不等式

$$(z + 1)\delta_a \leqslant 10^{-s}$$

的最大指数,则 a 是 A 的至少具有 $n = s + 1$ 位有效数字的近似值.

原因是从

$$|A - a| \leqslant a\delta_a \leqslant (z + 1)10^m\delta_a \leqslant 10^{m-s}$$

卽得所述結果.

例 1. 已知 $e = 2.7\cdots$ 具有 0.5% 的相对誤差,可取多少位有效数字. 若已知 e 的第一位是 2，那末

$$(2 + 1)\frac{0.5}{100} \leqslant \frac{1}{10},$$

故可取二位数字.

注意，由 $\delta_a < \frac{1}{z \cdot 10^s}$ 还不能推出 a 有 $s + 1$ 位有效数字.

例 2. $A = \sqrt[3]{90} = 4.4814\cdots$, $a = 4.47$,

$$\delta_a < \frac{0.0115}{4.47} < \frac{1}{4 \times 10^2}.$$

但 a 只有二位有效数字.

进行四则运算之后的有效数字的法则如次:

1. 加法：項数不多时，全部和数中仍保留最大項的数字位数作为和的位数，在不利的情形下，可能減少一位。

例 1. 求和 $a = 3454.70 + 386.350 + 32.4350 + 1.24430$. 各有六位有效数字，最大項取六位，其他可以保留的数字就大大地減少了。抹去千分位，加之如下式：

$$\begin{array}{r} 3454.70 \\ 386.35(0) \\ 32.43(50) \\ 1.24(430) \\ \hline 3874.72 \end{array}$$

2. 減法：如果被減数与減数相差很大，仍如加法的情況。但如果两者相差很小，則有效数字将大大地縮減。一般在計算中最好避免相差极小的数相減。

例 2. $1234 - 1231 = 3$. 原来的有效数字各四位，而減后仅有一位 3.

3. 乘法和除法：許多接連的乘法与除法运算的結果，参加运算的数字最小位数要少一位，至多少两个有效数字。

这些法則都可以从(1)，(2)，(3)推出。

§ 15. 三、四次方程解法

二次方程的代数解法已为大家所熟知，我們自然会提出高次方程的代数解法問題。所謂代数解法，就是由方程的系数經有限次四則运算和开方运算得出根来的方法。我們已知三、四次方程的代数解法，我們也知道五次及更高次的方程沒有一般的代数解法。后者属于方程論的范围，我們不加叙述。在此我們只講三、四次方程的解法。

三次方程的一般形式是

$$y^3 + a_1y^2 + a_2y + a_3 = 0. \tag{1}$$

用新未知数 $x = y - \alpha$ 替代 y，則得

$$x^3 + (3\alpha + a_1)x^2 + (3\alpha^2 + 2a_1\alpha + a_2)x + (\alpha^3 + a_1\alpha^2 + a_2\alpha + a_3) = 0.$$

取 $\alpha = -\frac{1}{3}a_1$，可使 x^2 項消失，如此得出

$$x^3 + px + q = 0, \tag{2}$$

此处 $p = a_2 - \frac{1}{3}a_1^2$, $q = a_3 - \frac{1}{3}a_1a_2 + \frac{2}{27}a_1^3$. 命

$$x = u + v.$$

則得

$$x^3 = u^3 + v^3 + 3uv(u + v) = u^3 + v^3 + 3uvx.$$

和(2)式比較系数可知

$$3uv = -p, \quad u^3 + v^3 = -q.$$

u^3 与 v^3 是二次方程

$$z^2 + qz - \left(\frac{p}{3}\right)^3 = 0$$

的根，就是

$$u^3 = -\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}} = R_1,$$

$$v^3 = -\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}} = R_2.$$

因而得出 Cardan 公式

$$x = \sqrt[3]{R_1} + \sqrt[3]{R_2}. \tag{3}$$

每一立方根有三个不同的值，本来应得出九种可能性，但是因为 $uv = -\frac{p}{3}$，所以仅有以下三种可能性：x 等于

$$\sqrt[3]{R_1} + \sqrt[3]{R_2}; \quad \sqrt[3]{R_1}\,\omega + \sqrt[3]{R_2}\omega^2; \quad \sqrt[3]{R_1}\omega^2 + \sqrt[3]{R_2}\omega,$$

此处

$$\omega = \cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3} = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i, \quad \omega^2 = \bar{\omega}.$$

当 p, q 均为实数时，我們分四种情形来討論方程(2)：

1) 假定

$$\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27} < 0,$$

当然有 $p < 0$. (3)式中的 R_1, R_2 是共軛虛数. 命

$$-\frac{q}{2} \pm \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}} = -\frac{q}{2} \pm i\sqrt{-\frac{q^2}{4} - \frac{p^3}{27}} = r(\cos\varphi \pm i\sin\varphi),$$

此处

$$r = \sqrt{-\frac{p^3}{27}}, \qquad \cos\varphi = -\frac{q}{2r}. \tag{4}$$

代入 Cardan 公式可知

$$x = \sqrt[3]{r}\left(\cos\frac{\varphi + 2k\pi}{3} + i\sin\frac{\varphi + 2k\pi}{3}\right) + $$

$$+ \sqrt[3]{r}\left(\cos\frac{\varphi + 2k\pi}{3} - i\sin\frac{\varphi + 2k\pi}{3}\right) = 2\sqrt[3]{r}\cos\frac{\varphi + 2k\pi}{3}, \qquad k = 0, 1, 2 \tag{5}$$

所以方程(2)有三个实根.

2) 假定

$$\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27} > 0 \quad 及 \quad p < 0,$$

由此可知

$$0 < \sqrt{-\frac{p^3}{27}} < \sqrt{\frac{q^2}{4}} = \frac{|q|}{2}.$$

引进輔助角 ω:

$$\sqrt{-\frac{p^3}{27}} = \frac{q}{2}\sin\omega, \quad \sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}} = \frac{q}{2}\cos\omega.$$

于是

$$\sqrt[3]{-\frac{q}{2}+\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}} = \sqrt[3]{-\frac{q}{2}+\frac{q}{2}\cos\omega} = -\sqrt{-\frac{p}{3}}\sqrt[3]{\operatorname{tg}\frac{\omega}{2}};$$

$$\sqrt[3]{-\frac{q}{2}-\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}} = \sqrt[3]{-\frac{q}{2}-\frac{q}{2}\cos\omega} = -\sqrt{-\frac{p}{3}}\sqrt[3]{\operatorname{ctg}\frac{\omega}{2}}.$$

再引进角度

$$\operatorname{tg}\varphi = \sqrt[3]{\operatorname{tg}\frac{\omega}{2}},$$

我們得到实根

$$x_1 = -\sqrt{-\frac{p}{3}}(\operatorname{tg}\varphi + \operatorname{ctg}\varphi) = -\frac{2\sqrt{-p/3}}{\sin 2\varphi}, \tag{6}$$

其他二根是虚根

$$\frac{\sqrt{-p/3}}{\sin 2\varphi} \pm i\sqrt{-p}\operatorname{ctg} 2\varphi. \tag{7}$$

在此情况下，(2)式有三根，一实二虚.

3）假定

$$\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27} > 0 \text{ 及 } p > 0.$$

与2）相似，但是 $\sqrt{\frac{p^3}{27}}$ 可能小于 $\left|\frac{q}{2}\right|$，也可能大于 $\left|\frac{q}{2}\right|$. 我們現在引进 ω:

$$\sqrt{\frac{p^3}{27}} = \frac{q}{2}\operatorname{tg}\omega, \quad \sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}} = \frac{q}{2}\frac{1}{\cos\omega},$$

于是

$$\sqrt[3]{-\frac{q}{2}+\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}} = \sqrt[3]{\frac{q\sin^2\frac{1}{2}\omega}{\cos\omega}} = \sqrt{\frac{p}{3}}\cdot\sqrt[3]{\operatorname{tg}\frac{\omega}{2}},$$

$$\sqrt[3]{-\frac{q}{2}-\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}} = -\sqrt[3]{\frac{q\cos^2\frac{1}{2}\omega}{\cos\omega}} = -\sqrt{\frac{p}{3}}\cdot\sqrt[3]{\operatorname{ctg}\frac{\omega}{2}}.$$

再引进角度

$$\operatorname{tg}\varphi = \sqrt[3]{\operatorname{tg}\frac{\omega}{2}},$$

最后有实根

$$x_1 = \sqrt{\frac{p}{3}}(\operatorname{tg}\varphi - \operatorname{ctg}\varphi) = -2\sqrt{\frac{p}{3}}\operatorname{ctg} 2\varphi, \tag{8}$$

其二虚根为

$$\sqrt{\frac{p}{3}}\operatorname{ctg} 2\varphi \pm \frac{i\sqrt{p}}{\sin 2\varphi}. \tag{9}$$

4）假定

$$\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}=0.$$

在此情形下 Cardan 公式变为

$$2\sqrt[3]{-\frac{q}{2}},\quad -\sqrt[3]{-\frac{q}{2}},\quad -\sqrt[3]{-\frac{q}{2}} \tag{10}$$

三个实根，两个等根的情况。

用这些三角公式，并利用三角对数表，可以算出三次方程的根，且有高度准确性。

例 1. 解 $x^3+9x^2+23x+14=0$.

命 $x=y-3$，则方程化为

$$y^3-4y-1=0.$$

此方程有三个实根，分别記为 y_1, y_2, y_3. 由 1）可知

$$\cos\varphi=\frac{\sqrt{27}}{16},\quad \log_{10}\cos\varphi=\bar{1}.51156,\quad \varphi=71°2'56''.\quad \frac{\varphi}{3}=23°40'59'',$$

$$\frac{\varphi+2\pi}{3}=143°40'59'',\quad \frac{\varphi+4\pi}{3}=263°40'59''.$$

又

$$\log_{10}2\sqrt[3]{r}=\log_{10}\frac{4}{\sqrt{3}}=0.3635,$$

故得

$$y_1=2\sqrt[3]{r}\cos\frac{\varphi}{3}=2.1149,$$

$$y_2=2\sqrt[3]{r}\cos\frac{\varphi+2\pi}{3}=-1.8608,$$

$$y_3=2\sqrt[3]{r}\cos\frac{\varphi+4\pi}{3}=-0.2541.$$

原方程之三根为 -0.8851, -4.8608, -3.2541.

例 2. 解 $x^3-3x+5=0$.

由 2）可知方程有二个复根与一个实根，又由 2）得

$$\log_{10}\sin\omega=\bar{1}.60206,\quad \omega=23°34'41'',\quad \frac{\omega}{2}=11°47',$$

$$\log_{10}\operatorname{tg}\varphi=\bar{1}.77009,\quad 2\varphi=60°59'34'',$$

$$\log_{10}\frac{1}{\sin 2\varphi}=0.05821,\quad \frac{1}{\sin 2\varphi}=1.1434.$$

又

$$\log_{10}\sqrt{-p}\operatorname{ctg} 2\varphi=\bar{1}.98244,\quad \sqrt{-p}\operatorname{ctg} 2\varphi=0.96037,$$

故得三根为 -2.2868，$1.1434\pm0.96037i$.

虽然以下的解四次方程的方法在实际中并不应用，但为了完备，我們仍然簡单地介紹如下，在介紹中不涉及根的性质的討論。

一般的四次方程的形式是

$$y^4+a_1y^3+a_2y^2+a_3y+a_4=0. \tag{11}$$

以 $y=x-\frac{a_1}{4}$ 代入，則方程(11)化为

$$x^4+px^2+qx+r=0, \tag{12}$$

此处

$$p=-\frac{3}{8}a_1^2+a_2,\quad q=\frac{1}{8}a_1^3-\frac{a_1a_2}{2}+a_3,$$

$$r=-\frac{3}{256}a_1^4+\frac{1}{16}a_1^2a_2-\frac{1}{4}a_1a_3+a_4.$$

由于恆等式

$$x^4+px^2+qx+r=\left(x^2+\frac{p}{2}+\alpha\right)^2+qx+r-\frac{p^2}{4}-\alpha^2-2\alpha x^2-p\alpha,$$

故方程(12)化为

$$\left(x^2+\frac{p}{2}+\alpha\right)^2-\left[2\alpha x^2-qx+\left(\alpha^2+p\alpha-r+\frac{p^2}{4}\right)\right]=0. \tag{13}$$

取 α 使方程

$$2\alpha x^2-qx+\left(\alpha^2+p\alpha-r+\frac{p^2}{4}\right)=0 \tag{14}$$

有重根，即它的判别式必須等于零，亦即

$$q^2-4\cdot 2\alpha\left(\alpha^2+p\alpha-r+\frac{p^2}{4}\right)=0. \tag{15}$$

等式(15)为未知量 α 的实系数三次方程，它有三个根。 設 α_0 为它的一个根、它可以由 Cardan 公式(3)表出，亦即 α_0 可以由(11)的系数經四則运算及开方运算表出。 利用 α_0 可以将(13)式写为

$$\left(x^2+\frac{p}{2}+\alpha_0\right)^2-2\alpha_0\left(x-\frac{q}{4\alpha_0}\right)^2=0,$$

亦即它可以分解为两个方程

$$\begin{cases} x^2-\sqrt{2\alpha_0}\,x+\left(\dfrac{p}{2}+\alpha_0+\dfrac{q}{2\sqrt{2\alpha_0}}\right)=0, \\ x^2+\sqrt{2\alpha_0}\,x+\left(\dfrac{p}{2}+\alpha_0-\dfrac{q}{2\sqrt{2\alpha_0}}\right)=0. \end{cases} \tag{16}$$

因为由方程(12)到方程(16)我們用的都是恆等变换，所以方程(16)的根即方程(12)的根. 从而方程(11)的根可以由其系数經四則运算及开方而得出.

第二章　矢量代数

§1. 空間坐标系及矢量的定义

我們現在来把矢量的概念推广到空間(三維空間). 先說明一下空間直角坐标系. 取三根相交于一点 O 且两两垂直的直綫，分别称它們为 x 軸，y 軸与 z 軸. 我們用以下的方法使每根軸上的点都与实数一一对应起来. 先取一单位，在每一軸上都由 O 量起. 哪边为正哪边为負? 原可任意，但为了明确起見，我們依以下的約定办事. 在 x，y 軸上各任取一正向，头向 x 軸的正向，面向 y 軸的正向，而 z 軸的正向在左手边，这样的取法一般称为右旋坐标系(为什么称为"右"旋，請与螺旋比較). 显然，如果头向 y 軸的正向，面向 z 軸的正向，則 x 軸的正向也在左；又头向 z 軸正向，面向 x 軸正向，則 y 軸的正向也在左，即 x, y, z；y, z, x；z, x, y 都成右旋系統. 但如果头向 y 正向，面向 x 正向，則 z 的正向在右，这样的次序称为左旋坐标系. x, z, y；z, y, x 与 y, x, z 一样都是左旋系統.

过空間任意一点 P 作三个平面，分别垂直于 x 軸，y 軸与 z 軸. 設垂足对应的三个实数分别是 x_1, y_1, z_1，于是 P 点决定了一个三实数組 (x_1, y_1, z_1)；反之，如果我們有一个三实数組 (x_1, y_1, z_1)，过 x, y, z 軸上的点 x_1, y_1, z_1 作三张平面，分别垂直于 x, y, z 軸，这三张平面相交于空間一点 P. 因此三实数組 (x_1, y_1, z_1) 与空間的点一一对应. 称 (x_1, y_1, z_1) 为点 P 的坐标. 上述利用三实数組决定空間点的位置的方法，叫做直角坐标系統，也称为 Descartes 坐标系.

$(x, y, 0)$ 对应于平面点 (x, y)，所有的点 $(x, y, 0)$ 与平面上的全体点完全一致.

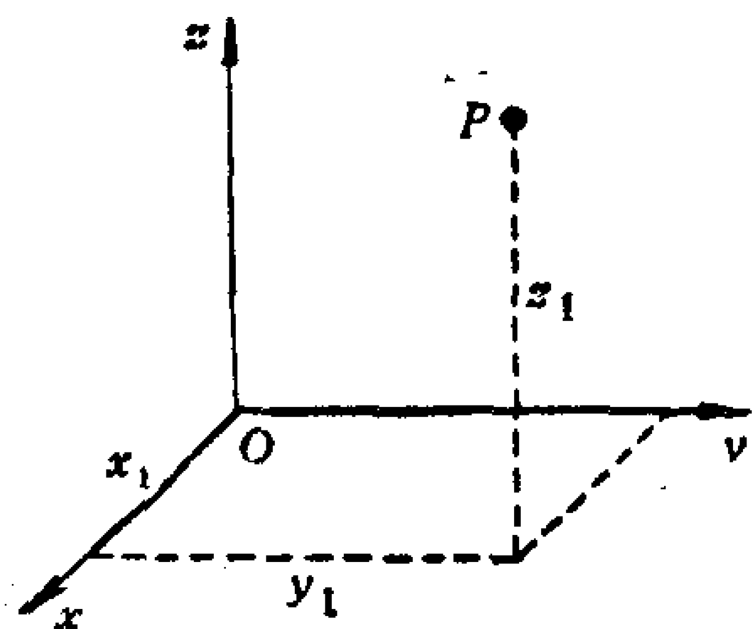


图 14

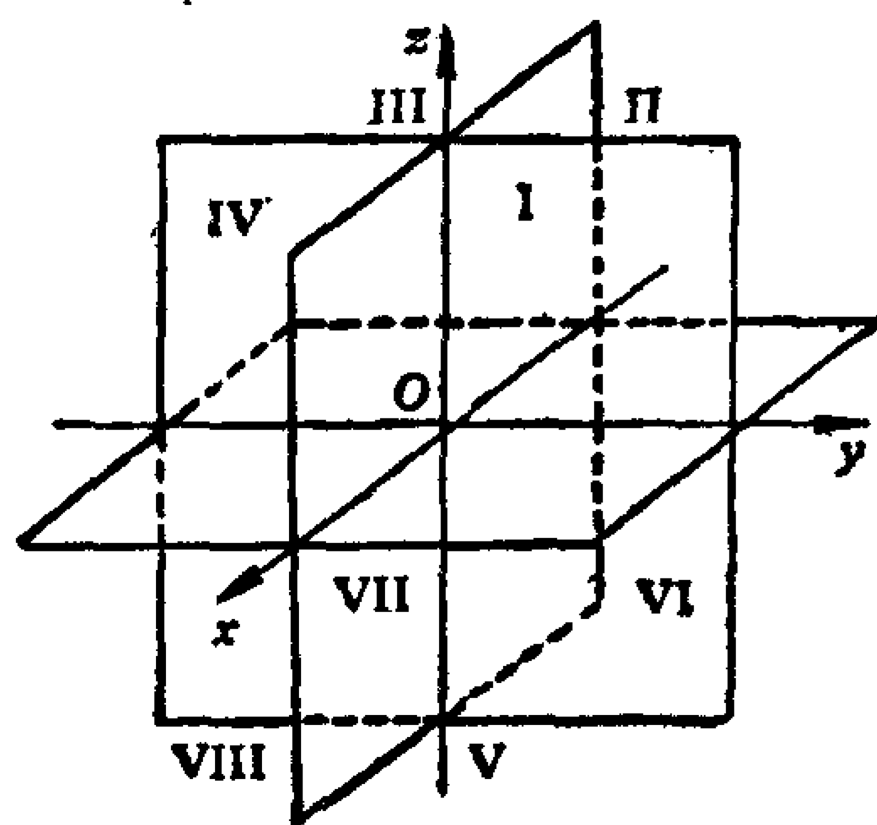


图 15

过 x 軸与 y 軸，y 軸与 z 軸及 z 軸与 x 軸的平面分别称为 xy 平面，yz 平面及 zx 平面. 这三张平面两两垂直且将空間分成八个卦限. 这八个卦限中点的坐标的符号如下表

所示：

坐标 \ 符号 \ 象限	I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII
x	+	−	−	+	+	−	−	+
y	+	+	−	−	+	+	−	−
z	+	+	+	+	−	−	−	−

过空間一点 $P(x_1, y_1, z_1)$ 作直綫垂直于 xy 平面，交 xy 平面于点 $P'(x_1, y_1, 0)$. 由于原点至 P' 的距离 $\overline{OP'}$ 为 $\sqrt{x_1^2+y_1^2}$,所以由勾股定理,原点至 P 的距离 $\overline{OP}$ 为

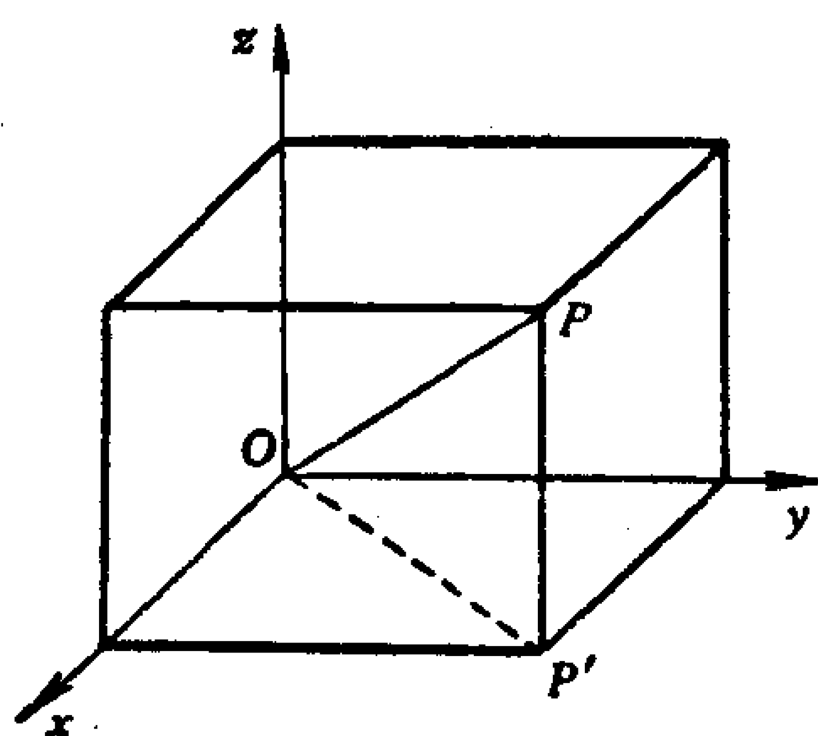


图 16

$$\overline{OP}=\sqrt{\overline{OP'}^2+z_1^2}=\sqrt{x_1^2+y_1^2+z_1^2}.$$

同样可証 P 与 $Q(x_2, y_2, z_2)$ 的距离 $\overline{PQ}$ 为

$$\overline{PQ}=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}.$$

一个矢量就是一个有方向的綫段，由它的起点和終点唯一决定. 命起点为(x_1, x_2, x_3),終点为$(x_1+a_1, x_2+a_2, x_3+a_3)$，我們通常所研究的矢量有以下两种：

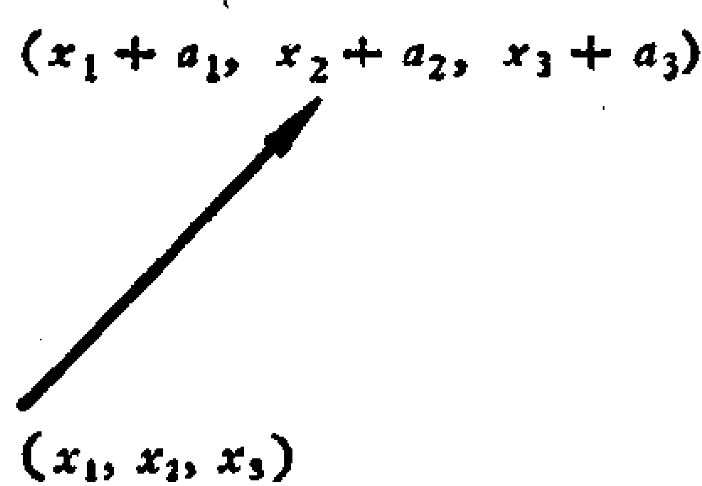


图 17

不管起点如何，所有的同方向等长度的矢量都算做相同. 这样的矢量称为自由矢量，由 (a_1, a_2, a_3) 唯一决定，用重体字母 $\boldsymbol{a}=(a_1, a_2, a_3)$ 来表示.

在同一直綫上不管起点如何,所有的同方向、等长度的矢量都算做相同,这样的矢量称为滑动矢量.

以下所討論的矢量仅指自由矢量. 一个自由矢量 $\boldsymbol{a}=(a_1, a_2, a_3)$ 的长度是

$$|\boldsymbol{a}|=\sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2},$$

方向由

$$\cos\alpha=\frac{a_1}{|\boldsymbol{a}|},\quad \cos\beta=\frac{a_2}{|\boldsymbol{a}|},\quad \cos\gamma=\frac{a_3}{|\boldsymbol{a}|}$$

决定. 显然 a_1, a_2, a_3 各是矢量 $\boldsymbol{a}$ 在 x, y, z 軸上的投影的长度,而 α, β, γ 是矢量与 x, y, z 軸所成的角度. 称 $(\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$ 为矢量 $\boldsymbol{a}$ 的方向余弦. 矢量的三个方向余弦的平方和等于1.

§2. 矢量的加法

二矢量 $\boldsymbol{a}=(a_1, a_2, a_3)$, $\boldsymbol{b}=(b_1, b_2, b_3)$ 的和定义为

$$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=(a_1+b_1, a_2+b_2, a_3+b_3).$$

显然有

$$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a},\quad \boldsymbol{a}+(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})=(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})+\boldsymbol{c}.$$

零矢量定义为

$$\mathbf{0}=(0,0,0).$$

$\boldsymbol{a}$ 的反向矢量定义为

$$-\boldsymbol{a}=(-a_1,-a_2,-a_3).$$

把矢量的起点移到原点，以 $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ 为边作平行四边形，由原点做出的对角綫就表矢量 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$.

对任一实数 λ，我們定义

$$\lambda\boldsymbol{a}=(\lambda a_1,\lambda a_2,\lambda a_3).$$

显然有

$$\lambda(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=\lambda\boldsymbol{a}+\lambda\boldsymbol{b},\quad \lambda(\mu\boldsymbol{a})=\lambda\mu\boldsymbol{a}.$$

如果有一实数 $\lambda\neq 0$,使

$$\boldsymbol{a}=\lambda\boldsymbol{b},$$

则此二矢量平行,或称为共綫矢量;反之亦眞. 注意，$-\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 等长度,但指向相反.

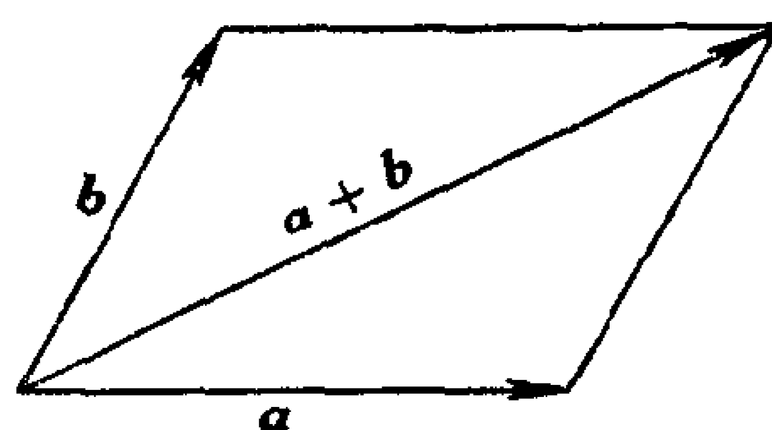


图 18

长度为 1 的矢量称为单位矢量. 对任一矢量 $\boldsymbol{a}\neq 0$，一定有一个与 $\boldsymbol{a}$ 平行的单位矢量 $\boldsymbol{a}^\circ$,使 $\boldsymbol{a}=|\boldsymbol{a}|\boldsymbol{a}^\circ$.

一般講来，如果有 n 个矢量 $\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\cdots,\boldsymbol{a}_n$，其和 $\boldsymbol{a}_1+\cdots+\boldsymbol{a}_n$ 可以用以下的方法求出. 把 $\boldsymbol{a}_1$ 的出发点移到原点,再把 $\boldsymbol{a}_2$ 的出发点移到 $\boldsymbol{a}_1$ 的終点,再把 $\boldsymbol{a}_3$ 的出发点移到 $\boldsymbol{a}_2$ 的終点,…,最后把 $\boldsymbol{a}_n$ 的起点移到移定后的 $\boldsymbol{a}_{n-1}$ 的終点. 从原点到 $\boldsymbol{a}_n$ 終点的矢量就是矢量 $\boldsymbol{a}_1+\boldsymbol{a}_2+\cdots+\boldsymbol{a}_n$. 由此可見,如果一組矢量之和为 $\mathbf{0}$,则上法所得的折綫成一閉合折綫;反之亦眞.

由"两点之間直綫最短"这个概念立即知道

$$|\boldsymbol{a}_1+\cdots+\boldsymbol{a}_n|\leqslant|\boldsymbol{a}_1|+\cdots+|\boldsymbol{a}_n|,$$

上式当且仅当各矢量一个接一个地位于同一直綫上且其指向相同时取等号.

§3. 矢量的分解

假定 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 是共面矢量. 现在把它們引到公共起点 O,由矢量 $\boldsymbol{c}$ 的終点 C 作两条平行于 $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ 的直綫,各交 $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ 于 M,N, 则

$$\boldsymbol{c}=\overrightarrow{OM}+\overrightarrow{ON}=\lambda\boldsymbol{a}+\mu\boldsymbol{b}.$$

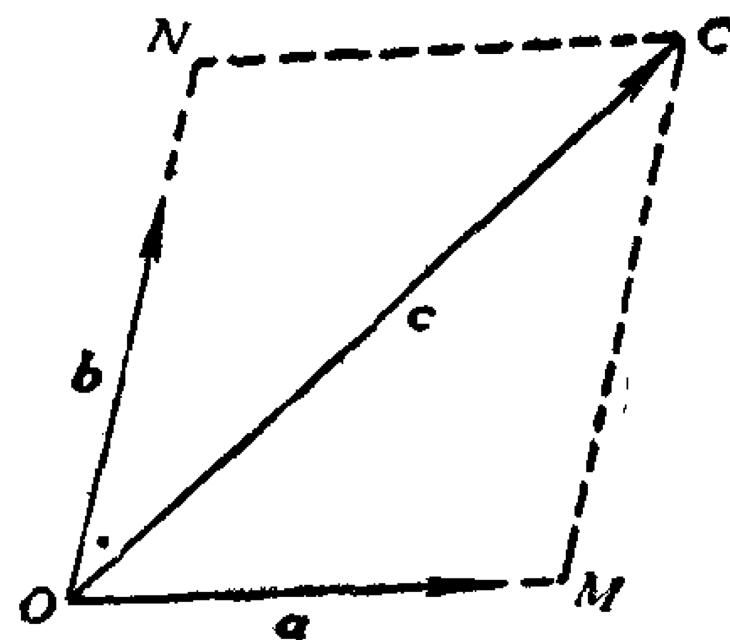


图 19

假定 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 非共面矢量. 命 $\boldsymbol{d}$ 为任一矢量，把它們都移到一公共起点 O. 由矢量 $\boldsymbol{d}$ 的終点 D 作三张平面,分别平行于 $(\boldsymbol{b},\boldsymbol{c})$平面，$(\boldsymbol{c},\boldsymbol{a})$ 平面与 $(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})$ 平面,且交 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 于 L,M,N, 则得

$$\boldsymbol{d}=\overrightarrow{OL}+\overrightarrow{OM}+\overrightarrow{ON}=\lambda\boldsymbol{a}+\mu\boldsymbol{b}+\nu\boldsymbol{c},$$

这称为矢量 $\boldsymbol{d}$ 对 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 的分解. 取

$$\boldsymbol{i}=(1,0,0),\quad \boldsymbol{j}=(0,1,0),\quad \boldsymbol{k}=(0,0,1),$$

則 $\boldsymbol{a}=(a_1, a_2, a_3)$ 的分解式显然为

$$\boldsymbol{a}=a_1\boldsymbol{i}+a_2\boldsymbol{j}+a_3\boldsymbol{k},$$

a_1（及 a_2, a_3）就是矢量在 x（及 y, z）軸上投影的长度.

一般地說,对矢量 $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ 作矢量

$$\boldsymbol{d}=\lambda\boldsymbol{a}+\mu\boldsymbol{b}+\nu\boldsymbol{c}$$

的分解,就等于解方程組

$$d_i=\lambda a_i+\mu b_i+\nu c_i,\quad i=1, 2, 3,$$

其中 λ, μ, ν 是待求的数值.

定义. 如果有非 0 的 $\lambda, \mu, \nu, \cdots$ 使

$$\lambda\boldsymbol{a}+\mu\boldsymbol{b}+\nu\boldsymbol{c}+\cdots=\boldsymbol{0},$$

則 $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}, \cdots$ 称为有綫性关系.

定理 1. 若二非 $\boldsymbol{0}$ 矢量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 有綫性关系,則两矢共綫;其逆亦眞.

証. 若已知 $\lambda\boldsymbol{a}+\mu\boldsymbol{b}=\boldsymbol{0}(\lambda\neq 0)$, 則 $\boldsymbol{a}=-\frac{\mu}{\lambda}\boldsymbol{b}$. 可知 $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ 共綫; 反之显然.

定理 2. 若三非 $\boldsymbol{0}$ 矢量 $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ 有綫性关系,則三矢共面;其逆亦眞.

証. 設 $\lambda\boldsymbol{a}+\mu\boldsymbol{b}+\nu\boldsymbol{c}=\boldsymbol{0}$, 并可假定 $\lambda\neq 0$, 則 $\boldsymbol{a}=-\frac{\mu}{\lambda}\boldsymbol{b}-\frac{\nu}{\lambda}\boldsymbol{c}$,即 $\boldsymbol{a}$ 在 $\boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ 所成的平面上; 反之,如果 $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ 共面,而其中有二矢量 $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ 非共綫, 則可以分解为 $\boldsymbol{c}=\lambda\boldsymbol{a}+\mu\boldsymbol{b}$. λ 与 μ 不会同时为 0, 否則与假定矛盾. 如果 $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ 共綫,即 $\boldsymbol{a}=\lambda\boldsymbol{b}$,我們显然有关系 $\boldsymbol{a}-\lambda\boldsymbol{b}+0\boldsymbol{c}=\boldsymbol{0}$.

定理 3. 四个(或更多的)矢量 $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}, \boldsymbol{d}$ 必有綫性关系.

証. 如果其中有三个矢量 $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ 不共面,則任一矢量 $\boldsymbol{d}$ 都可以分解为 $\boldsymbol{d}=\lambda\boldsymbol{a}+$ $+\mu\boldsymbol{b}+\nu\boldsymbol{c}$. 故得定理.

如果三个矢量共面,則有 $\lambda\boldsymbol{a}+\mu\boldsymbol{b}+\nu\boldsymbol{c}=\boldsymbol{0}$, 也得定理.

習題. 已知起点相同的三矢量 $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ 其終点共綫的必要且充分条件是有不全为 0 的三个数 λ, μ, ν, 使 $\lambda+\mu+\nu=0$ 及 $\lambda\boldsymbol{a}+\mu\boldsymbol{b}+\nu\boldsymbol{c}=\boldsymbol{0}$. 試問起点相同的四矢量 $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}, \boldsymbol{d}$, 其終点共面的必要且充分条件为何?

§ 4. 內积(无向积,数性积)

定义. 二矢量 $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ 的內积定义为

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3.$$

有时也用符号 $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})$ 代表它. 显然有

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{a},\quad \boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c},$$

$$(\lambda\boldsymbol{a})\cdot(\mu\boldsymbol{b})=\lambda\mu\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b},\quad \boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a}=|\boldsymbol{a}|^2.$$

由余弦定律知道

$$|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|^2=|\boldsymbol{a}|^2+|\boldsymbol{b}|^2-2|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos\theta,$$

而 θ 是 $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ 两矢量的夹角. 又由

$$|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|^2=(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})\cdot(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{b}-2\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{a}|^2+|\boldsymbol{b}|^2-2\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$$

可知

$$\cos\theta=\frac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|}.$$

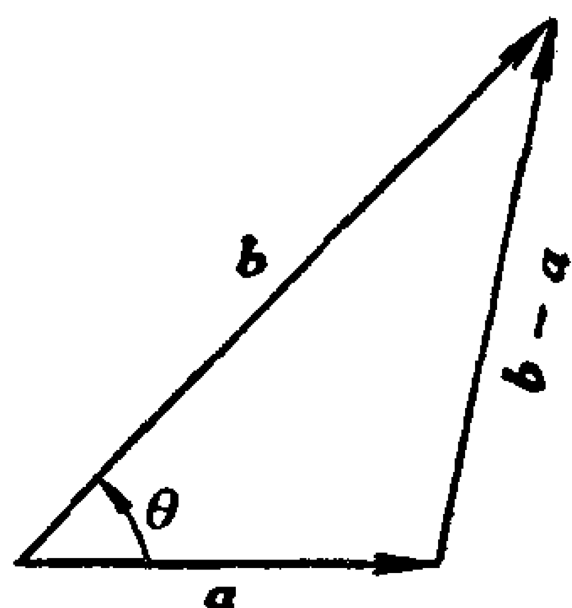


图 20

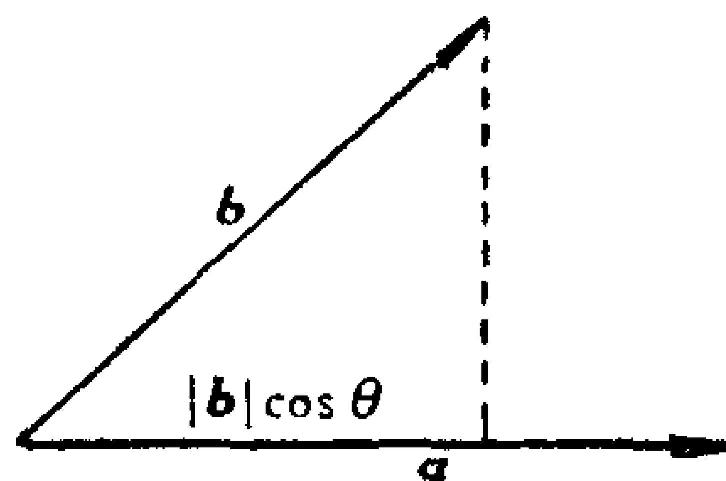


图 21

又把这式看成为

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{a}|(|\boldsymbol{b}|\cos\theta),$$

故內积可以看成为矢量 $\boldsymbol{a}$ 的长度乘以矢量 $\boldsymbol{b}$ 在 $\boldsymbol{a}$ 上的投影的长度. 如果 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 平行(或共綫),則 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$ 就是 $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ 的长度之积.

如果 $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ 垂直,則 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0$;且反之亦眞.

如果用无实数部分的四元数表矢量,卽

$$\alpha=a_1i+a_2j+a_3k, \quad 及 \quad \beta=b_1i+b_2j+b_3k,$$

則

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=\frac{1}{2}(\alpha\bar{\beta}+\beta\bar{\alpha}),$$

卽內积等于四元数 $-\alpha\beta$ 的实数部分.

習题. 空間一組矢量,两两內积均为 0,問組中最多有几个矢量.

§5. 矢量积(外积)

定义. 二矢量 $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ 的矢量积为

$$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=(a_2b_3-a_3b_2, a_3b_1-a_1b_3, a_1b_2-a_2b_1).$$

显然有

$$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=-\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{a}, \quad (\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\times\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{c}+\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c},$$
$$(\lambda\boldsymbol{a})\times(\mu\boldsymbol{b})=\lambda\mu(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b});$$

特别有 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{a}=\boldsymbol{0}$, 也得 $\boldsymbol{a}\times(\lambda\boldsymbol{a})=\boldsymbol{0}$; 反之, 如果 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\boldsymbol{0}$, 則也可以得到 $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ 共綫.

矢量积有以下的几何意义:

1) $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$ 垂直于 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$，即垂直于 $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ 所成的平面.

証. $\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}) = a_1(a_2b_3 - a_3b_2) + a_2(a_3b_1 - a_1b_3) + a_3(a_1b_2 - a_2b_1) = 0.$

2) $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$ 的长度等于以 $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ 为边的平行四边形的面积，而且

$$|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}|^2 = |\boldsymbol{a}|^2|\boldsymbol{b}|^2 - (\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})^2.$$

証. 由

$$\begin{aligned}(a_2b_3 - a_3b_2)^2 + (a_3b_1 - a_1b_3)^2 + (a_1b_2 - a_2b_1)^2 &= \\ = (a_1^2 + a_2^2 + a_3^2)(b_1^2 + b_2^2 + b_3^2) - (a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3)^2\end{aligned}$$

得

$$|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}|^2 = |\boldsymbol{a}|^2|\boldsymbol{b}|^2 - (\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})^2 = |\boldsymbol{a}|^2|\boldsymbol{b}|^2(1-\cos^2\theta) = |\boldsymbol{a}|^2|\boldsymbol{b}|^2\sin^2\theta.$$

明所欲証.

3) $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$ 的指向是：我們如果依 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$ 站立，則循反时針方向由 $\boldsymbol{a}$ 到 $\boldsymbol{b}$ 所扫过的角度 $\leqslant\pi$，也就是說，$\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$ 成一右旋系統.

为了說明这一点，我們取 $\boldsymbol{a}$ 的底綫作为 $\boldsymbol{x}$ 軸，$\boldsymbol{a}$ 的方向是 $\boldsymbol{x}$ 軸的正向. 取 $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ 所在的平面为 $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}$ 平面. 假定由 $\boldsymbol{a}$ 到 $\boldsymbol{b}$ 的角度是 θ，$|\theta|\leqslant\pi$，如是則

$$\boldsymbol{a} = |\boldsymbol{a}|(1, 0, 0), \quad \boldsymbol{b} = |\boldsymbol{b}|(\cos\theta, \sin\theta, 0),$$

因而得

$$\boldsymbol{c} = \boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b} = |\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|(0, 0, \sin\theta).$$

这矢量 $\boldsymbol{c}$ 的底綫与 z 軸相同，但是乜的方向却視 θ 的正負而定. 如果 $\theta>0$，即方向由 $\boldsymbol{a}$ 到 $\boldsymbol{b}$，則 $\boldsymbol{c}$ 的指向与 z 軸同；不然方向由 $\boldsymbol{b}$ 至 $\boldsymbol{a}$，而 $\boldsymbol{c}$ 的指向正是与 z 軸的負向同. 这样我們定义带正負号的平行四边形的面积等于 $|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\sin\theta$.

如果用无实数部分的四元数

$$\alpha = a_1i + a_2j + a_3k, \quad \beta = b_1i + b_2j + b_3k,$$

表示矢量，則

$$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b} = \frac{1}{2}(\alpha\beta - \overline{\alpha\beta});$$

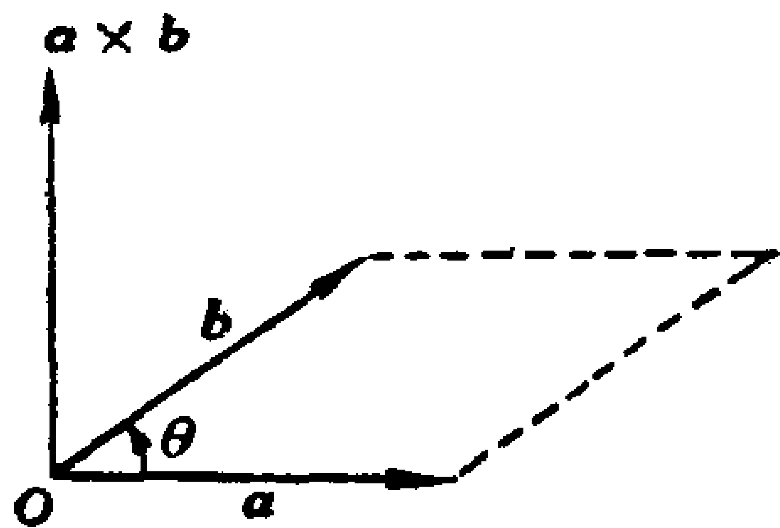


图 22

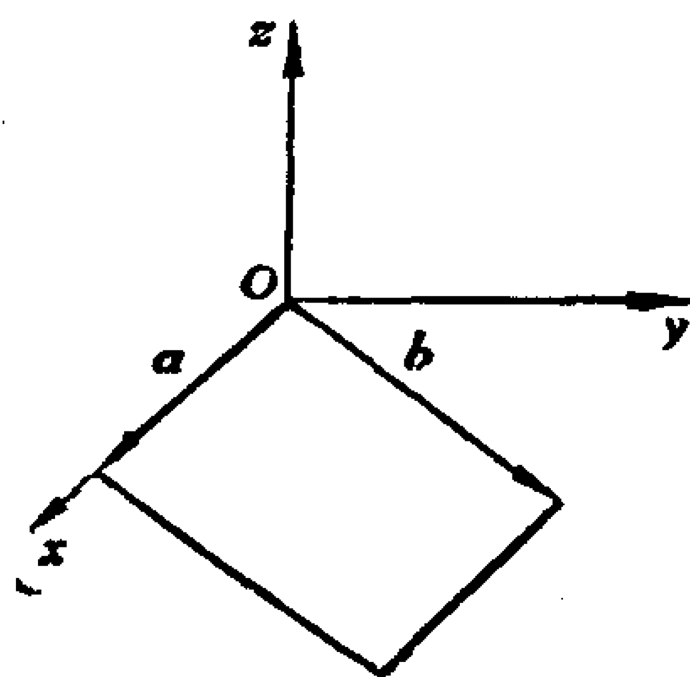


图 23

也就是矢量积 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$ 等于四元数 $\alpha\beta$ 的非实数部分.

特别有 $\boldsymbol{i}\times\boldsymbol{i}=\boldsymbol{0}$, $\boldsymbol{j}\times\boldsymbol{j}=\boldsymbol{0}$, $\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{k}=\boldsymbol{0}$ 及 $\boldsymbol{i}\times\boldsymbol{j}=\boldsymbol{k}$, $\boldsymbol{j}\times\boldsymbol{k}=\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{i}=\boldsymbol{j}$. 从此可得

$$-\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\alpha\beta.$$

这样的关系把空間矢量和四元数密切地联在一起.

習題. 証明

$$(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})\times(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=2\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$$

$$(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})\cdot(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{b}$$

§6. 多 重 积

1）三矢量的混合积. 命 $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ 表三矢量,則

$$(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}=\boldsymbol{c}\cdot(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})=(a_2b_3-a_3b_2)c_1+$$
$$+(a_3b_1-a_1b_3)c_2+(a_1b_2-a_2b_1)c_3=$$
$$=\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} \text{（用 } (\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}) \text{ 表它）.}$$

显然可見

$$(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}=(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})\cdot\boldsymbol{a}=(\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{a})\cdot\boldsymbol{b}=-(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{a})\cdot\boldsymbol{c}=$$
$$=-(\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{a}=-(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{c})\cdot\boldsymbol{b}.$$

定理 1. $(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}$ 的絕对値等于以 $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$、$\boldsymbol{c}$ 为边的平行六面体的体积，其正負号的取法如下：依 $\boldsymbol{c}$ 而立,照反时針方向由 $\boldsymbol{a}$ 到 $\boldsymbol{b}$ 所扫过的角度小于 π 时得正,不然得負.

証. $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$ 的长度等于以 $\boldsymbol{a}$ 及 $\boldsymbol{b}$ 为边的平行四边形的面积，$\boldsymbol{d}\cdot\boldsymbol{c}$ 等于 $\boldsymbol{d}$ 的长度乘以 $\boldsymbol{c}$ 在 $\boldsymbol{d}$ 上的投影的长度,所以

$(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}=$（以 $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ 为边的平行四边形的面积）$\times$（$\boldsymbol{c}$ 在 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$ 上的投影），这就是平行六面体的体积.

从而三矢共面的条件是

$$(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}=0.$$

总結得出：

两矢共綫（或平行）的条件是矢量积等于 $\mathbf{0}$，即 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\mathbf{0}$.

两矢垂直的条件是內积等于 0，即 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0$.

三矢共面的条件是 $\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})=0$.

$\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ 三矢成右旋系統还是左旋系統,視混合积 $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c})$ 为正或为負而定.

2）三矢量的矢量积.

定理 2.

$$\boldsymbol{a}\times(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})=(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c})\boldsymbol{b}-(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})\boldsymbol{c}.$$

証. 此式左边等于

$$(a_1, a_2, a_3)\times(b_2c_3-b_3c_2, b_3c_1-b_1c_3, b_1c_2-b_2c_1)=$$

$$= (a_2(b_1c_2 - b_2c_1) - a_3(b_3c_1 - b_1c_3),\ a_3(b_2c_3 - b_3c_2) - a_1(b_1c_2 - b_2c_1),$$
$$a_1(b_3c_1 - b_1c_3) - a_2(b_2c_3 - b_3c_2)) = ((a_1c_1 + a_2c_2 + a_3c_3)b_1 - (a_1b_1 + a_2b_2 + a_3c_3)c_1,$$
$$(a_1c_1 + a_2c_2 + a_3c_3)b_2 - (a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3)c_2,\ (a_1c_1 + a_2c_2 + a_3c_3)b_3 -$$
$$(a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3)c_3) = (\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{c})\boldsymbol{b} - (\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b})\boldsymbol{c}.$$

由定理 2 立刻推出

$$\boldsymbol{a} \times (\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c}) + \boldsymbol{b} \times (\boldsymbol{c} \times \boldsymbol{a}) + \boldsymbol{c} \times (\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}) = 0.$$

3）四重积.

定理 3. 对任意四矢量 $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}, \boldsymbol{d}$, 下列恆等式成立：

$$(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}) \cdot (\boldsymbol{c} \times \boldsymbol{d}) = \begin{vmatrix} \boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{c} & \boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{d} \\ \boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{c} & \boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{d} \end{vmatrix} = (\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{c})(\boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{d}) - (\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{d})(\boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{c}).$$

証. 由混合积的等式及定理 2 我們有

$$(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}) \cdot (\boldsymbol{c} \times \boldsymbol{d}) = (\boldsymbol{b} \times (\boldsymbol{c} \times \boldsymbol{d})) \cdot \boldsymbol{a} = ((\boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{d})\boldsymbol{c} - (\boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{c})\boldsymbol{d}) \cdot \boldsymbol{a} =$$
$$= (\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{c})(\boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{d}) - (\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{d})(\boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{c}).$$

定理 4. 对任意四矢量 $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}, \boldsymbol{d}$, 下列恆等式成立：

$$(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}) \times (\boldsymbol{c} \times \boldsymbol{d}) = (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{d})\boldsymbol{c} - (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c})\boldsymbol{d} =$$
$$= (\boldsymbol{c}, \boldsymbol{d}, \boldsymbol{a})\boldsymbol{b} - (\boldsymbol{c}, \boldsymbol{d}, \boldsymbol{b})\boldsymbol{a}.$$

証. 将 $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}, \boldsymbol{d}$ 四矢量的矢量积看作三矢量 $\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}, \boldsymbol{d}$ 的矢量积，并利用定理 2 得

$$(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}) \times (\boldsymbol{c} \times \boldsymbol{d}) = ((\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}) \cdot \boldsymbol{d})\boldsymbol{c} - ((\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}) \cdot \boldsymbol{c})\boldsymbol{d} =$$
$$= (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{d})\boldsymbol{c} - (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c})\boldsymbol{d}.$$

另一式可用同法証之.

如 $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}) \neq 0$, 則得 $\boldsymbol{d}$ 对 $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ 三矢量的分解式

$$\boldsymbol{d} = \frac{(\boldsymbol{d}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c})}{(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c})}\boldsymbol{a} + \frac{(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{d}, \boldsymbol{c})}{(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c})}\boldsymbol{b} + \frac{(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{d})}{(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c})}\boldsymbol{c}.$$

这个分解式相当于解三元一次方程組的 Crammer 法則.

習題 1. 証明

$$\boldsymbol{a} \times \{\boldsymbol{b} \times (\boldsymbol{c} \times \boldsymbol{d})\} = (\boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{d})(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{c}) - (\boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{c})(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{d}),$$
$$(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}, \boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c}, \boldsymbol{c} \times \boldsymbol{a}) = (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c})^2,$$
$$(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{p}, \boldsymbol{b} \times \boldsymbol{q}, \boldsymbol{c} \times \boldsymbol{r}) + (\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{q}, \boldsymbol{b} \times \boldsymbol{r}, \boldsymbol{c} \times \boldsymbol{p}) +$$
$$+ (\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{r}, \boldsymbol{b} \times \boldsymbol{p}, \boldsymbol{c} \times \boldsymbol{q}) = 0.$$

2. 解释下列等式的几何意义：

$$(\lambda\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}) = \lambda(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}),$$
$$(\boldsymbol{a} + \boldsymbol{a}', \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}) = (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}) + (\boldsymbol{a}', \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}),$$
$$(\boldsymbol{a} + \lambda\boldsymbol{b}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}) = (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}).$$

§7. 坐标的变换

现在所討論的都是直角坐标系,旧坐标系$\{O;X,Y,Z\}$与新坐标系$\{O';X',Y',Z'\}$. 两坐标的单位矢量分别为 $\boldsymbol{i},\boldsymbol{j},\boldsymbol{k}$ 与 $\boldsymbol{i}',\boldsymbol{j}',\boldsymbol{k}'$. 新坐标对旧坐标的位置,决定于以下两个因素:

1° 新原点的旧坐标 (x_0, y_0, z_0);

2° 新坐标軸与旧坐标軸組成九个角度的方向余弦: (α,β,γ), (α',β',γ'), $(\alpha'',\beta'',\gamma'')$.

新＼旧	$\boldsymbol{i}$	$\boldsymbol{j}$	$\boldsymbol{k}$
$\boldsymbol{i}'$	α	β	γ
$\boldsymbol{j}'$	α'	β'	γ'
$\boldsymbol{k}'$	α''	β''	γ''

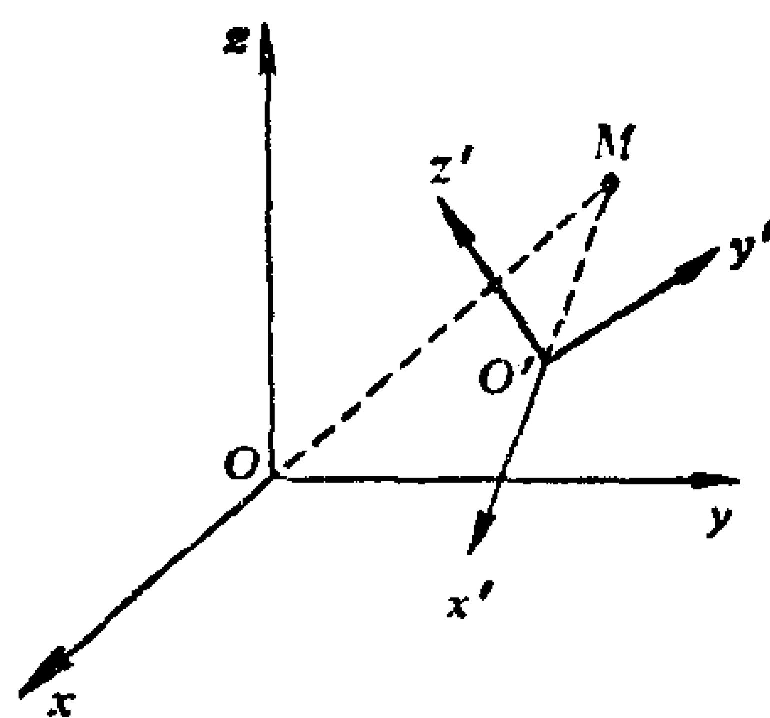


图 24

內积表示法如下:

$$\alpha=\boldsymbol{i}'\cdot\boldsymbol{i},\quad \beta=\boldsymbol{i}'\cdot\boldsymbol{j},\quad \gamma=\boldsymbol{i}'\cdot\boldsymbol{k};$$
$$\alpha'=\boldsymbol{j}'\cdot\boldsymbol{i},\quad \beta'=\boldsymbol{j}'\cdot\boldsymbol{j},\quad \gamma'=\boldsymbol{j}'\cdot\boldsymbol{k};$$
$$\alpha''=\boldsymbol{k}'\cdot\boldsymbol{i},\quad \beta''=\boldsymbol{k}'\cdot\boldsymbol{j},\quad \gamma''=\boldsymbol{k}'\cdot\boldsymbol{k}.$$

任一点M的旧矢量表示 $\boldsymbol{r}$ 与新矢量表示 $\boldsymbol{r}'$ 之間有关系

$$\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}_0+\boldsymbol{r}',$$

此处 $\boldsymbol{r}_0$ 是 $\overrightarrow{OO'}$, $\boldsymbol{r}=(x,y,z)$ 及 $\boldsymbol{r}'=(x',y',z')$ (对新坐标). 又已知

$$\boldsymbol{i}'=\alpha\boldsymbol{i}+\beta\boldsymbol{j}+\gamma\boldsymbol{k},$$
$$\boldsymbol{j}'=\alpha'\boldsymbol{i}+\beta'\boldsymbol{j}+\gamma'\boldsymbol{k},$$
$$\boldsymbol{k}'=\alpha''\boldsymbol{i}+\beta''\boldsymbol{j}+\gamma''\boldsymbol{k},$$

所以

$$x=x_0+\alpha x'+\alpha'y'+\alpha''z',$$
$$y=y_0+\beta x'+\beta'y'+\beta''z',$$
$$z=z_0+\gamma x'+\gamma'y'+\gamma''z'.$$

因此通过新坐标 x',y',z' 及方向余弦 $\alpha,\beta,\gamma\cdots\cdots$等可以表出旧坐标$x,y,z$来. 当 $\boldsymbol{k}=\boldsymbol{k}'$, $z_0=0$ 时,即得平面的坐标变换公式.

由于 $\boldsymbol{i}',\boldsymbol{j}',\boldsymbol{k}'$ 是单位矢量且互相垂直,可知

$$\alpha^2+\beta^2+\gamma^2=1,\qquad \alpha\alpha'+\beta\beta'+\gamma\gamma'=0,$$
$$\alpha'^2+\beta'^2+\gamma'^2=1,\qquad \alpha'\alpha''+\beta'\beta''+\gamma'\gamma''=0,$$
$$\alpha''^2+\beta''^2+\gamma''^2=1,\qquad \alpha''\alpha+\beta''\beta+\gamma''\gamma=0.$$

又由 $\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}$ 是单位矢量且互相垂直，得

$$\alpha^2+\alpha'^2+\alpha''^2=1, \qquad \alpha\beta+\alpha'\beta'+\alpha''\beta''=0,$$
$$\beta^2+\beta'^2+\beta''^2=1, \qquad \beta\gamma+\beta'\gamma'+\beta''\gamma''=0,$$
$$\gamma^2+\gamma'^2+\gamma''^2=1, \qquad \gamma\alpha+\gamma'\alpha'+\gamma''\alpha''=0.$$

虽然有九个方向余弦，但是其間有六个关系式. 我們可以用三个独立参变数来确定这些方向余弦，这参数的取法在不同的場合中可能各异. 在天文学及力学中最常用的是 Euler 角.

$(\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k})$ 与 $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c})$ 为两組原点公共的正向三直交单位矢量，現在用三个角 θ, φ, ψ 来确定 $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c})$ 对 $(\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k})$ 的位置.

1) θ 角. 名为傾角，即 $\boldsymbol{k}$ 与 $\boldsymbol{c}$ 間的夹角，亦即

$$\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{c}=\cos\theta.$$

2) φ 角. 名为节綫角，平面 $(\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j})$ 与 $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})$ 的交綫单位矢量命之为 $\boldsymbol{u}$，則 $\boldsymbol{i}$ 与 $\boldsymbol{u}$ 的交角就是 φ. 如果确定 $\boldsymbol{u}$ 的指向是 $(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{k}, \boldsymbol{c})$ 成右旋系統，則

$$\boldsymbol{u}=\frac{\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{c}}{\sin\theta}=\boldsymbol{i}\cos\varphi+\boldsymbol{j}\sin\varphi.$$

3) ψ 角. 即 $\boldsymbol{u}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 两矢量的夹角.

引进以下的輔助矢量：

单位矢量 $\boldsymbol{v}$ 在 $(\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j})$ 平面內，而且与 $\boldsymbol{u}$ 垂直幷使$(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{u}, \boldsymbol{k})$成右旋系統三矢量，則由于 $\boldsymbol{u}=\boldsymbol{i}\cos\varphi+\boldsymbol{j}\sin\varphi$，所以

$$\boldsymbol{v}=\boldsymbol{i}\sin\varphi-\boldsymbol{j}\cos\varphi.$$

单位矢量 $\boldsymbol{q}$ 在 $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})$ 平面內，而且与 $\boldsymbol{u}$ 垂直幷使$(\boldsymbol{q}, \boldsymbol{c}, \boldsymbol{u})$是右旋系統三矢量，則

$$\boldsymbol{q}=\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{u}.$$

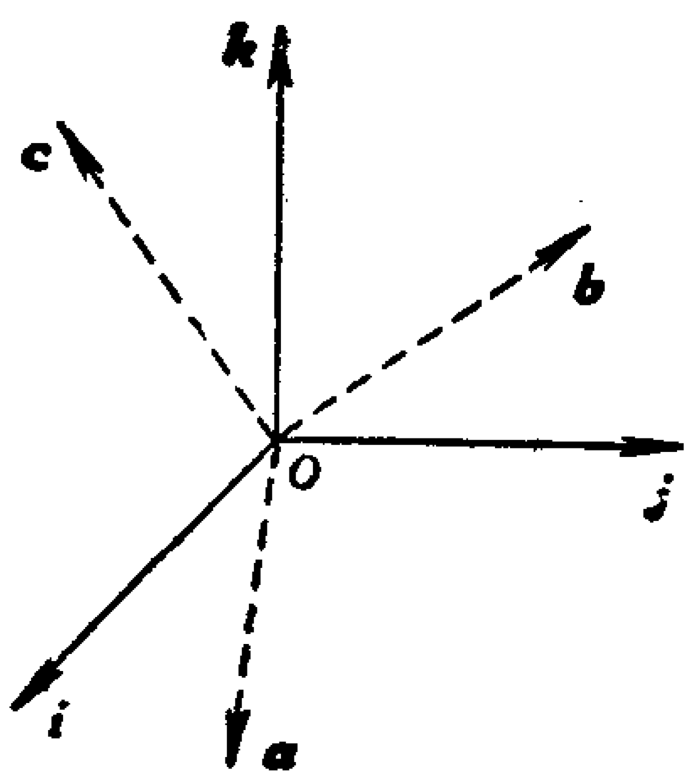


图 25

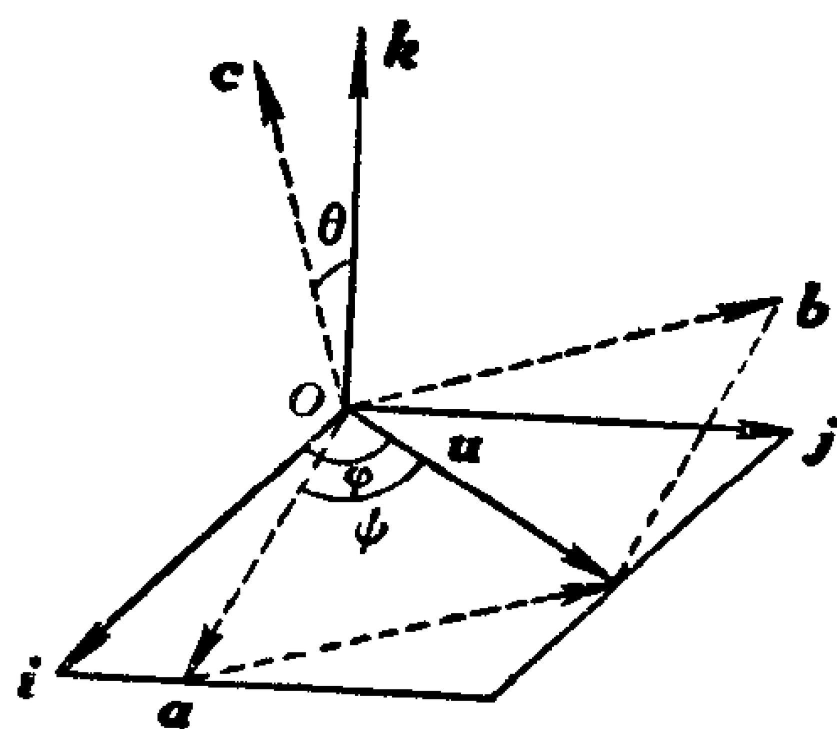


图 26

先証 $\boldsymbol{c}$ 在 $(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{k})$平面上. 这可由 $\boldsymbol{u}$ 垂直于$(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{k})$，$\boldsymbol{c}$ 垂直于 $\boldsymbol{u}$ 得之；由此

$$\boldsymbol{c}=\boldsymbol{v}\sin\theta+\boldsymbol{k}\cos\theta=(\boldsymbol{i}\sin\varphi-\boldsymbol{j}\cos\varphi)\sin\theta+\boldsymbol{k}\cos\theta$$

或

$$\boldsymbol{c}=\boldsymbol{i}\sin\varphi\sin\theta-\boldsymbol{j}\cos\varphi\sin\theta+\boldsymbol{k}\cos\theta.$$

再証 $\boldsymbol{a}$ 在（$\boldsymbol{u}, \boldsymbol{q}$）平面上．这可由 $\boldsymbol{c}$ 垂直于（$\boldsymbol{u}, \boldsymbol{q}$）而 $\boldsymbol{a}$ 垂直于 $\boldsymbol{c}$ 得之；由此

$$\boldsymbol{a} = \boldsymbol{u}\cos\psi - \boldsymbol{q}\sin\psi = \boldsymbol{u}\cos\psi - (\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{u})\sin\psi,$$

即得

$$\boldsymbol{a} = \boldsymbol{i}(\cos\varphi\cos\psi + \sin\varphi\sin\psi\cos\theta) + \boldsymbol{j}(\sin\varphi\cos\psi - \cos\varphi\cos\theta\sin\psi) - \\ - \boldsymbol{k}\sin\psi\sin\theta.$$

再由 $\boldsymbol{b} = \boldsymbol{c}\times\boldsymbol{a}$ 可知

$$\boldsymbol{b} = \boldsymbol{i}(\cos\varphi\sin\psi - \sin\varphi\cos\psi\cos\theta) + \boldsymbol{j}(\cos\theta\cos\varphi\cos\psi + \sin\varphi\sin\psi) + \\ + \boldsymbol{k}\cos\psi\sin\theta.$$

这样得出了从坐标系（$\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$）变为坐标系（$\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}$）的变换公式．

实质上，这些公式可以由如下运动来說明它們．将右旋系統三矢（$\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}$）

1）繞 $\boldsymbol{k}$ 軸轉动角度 φ，把 $(\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k})$ 变为 $(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{u}, \boldsymbol{k})$；

2）繞 $\boldsymbol{u}$ 軸轉动角度 θ，把 $(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{u}, \boldsymbol{k})$ 变为 $(\boldsymbol{q}, \boldsymbol{c}, \boldsymbol{u})$；

3）繞 $\boldsymbol{c}$ 軸轉动角度 ψ，把 $(\boldsymbol{q}, \boldsymbol{c}, \boldsymbol{u})$ 变为 $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c})$，

則得右旋系統三矢（$\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$）（有时 φ 称为进动角，θ 称为章动角）．

§8. 平　面

我們現在用矢量符号来复习一下直綫、平面的性质：

在空間取一点 O 作为原点或起点．空間的任意点 M 可以用一个位置矢量 $\boldsymbol{r} = \overrightarrow{OM}$ 来表它．我們求平面方程，使其經过点 $M_0(\boldsymbol{r}_0)$，并且垂直于矢量 $\boldsymbol{n}$．命 $M(\boldsymbol{r})$ 为平面上的一变点，則 $\overrightarrow{M_0M} = \boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_0$ 就垂直于 $\boldsymbol{n}$，也就是

$$(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_0)\cdot\boldsymbol{n} = 0.$$

这就是用矢量写出的平面方程，也可以写成为

$$\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{n} = D.$$

命 $\boldsymbol{r} = (x, y, z)$，$\boldsymbol{n} = (A, B, C)$，則平面方程为

$$Ax + By + Cz = D.$$

現在将几种条件下平面方程的表达形式列于后：

1）已知平面过三点 $M_i(\boldsymbol{r}_i)$ $(i = 1, 2, 3)$，命 $M(\boldsymbol{r})$ 为平面上任意一点，則

$$(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_1)\cdot[(\boldsymbol{r}_2 - \boldsymbol{r}_1)\times(\boldsymbol{r}_3 - \boldsymbol{r}_1)] = 0$$

或

$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} = 0,$$

此处 $\boldsymbol{r} = (x, y, z)$，$\boldsymbol{r}_i = (x_i, y_i, z_i)$ $(i = 1, 2, 3)$．

2）已知平面过二点 $M_1(\boldsymbol{r}_1)$ 与 $M_2(\boldsymbol{r}_2)$ 且平行方向矢量 $\boldsymbol{n}$，則平面方程为

$$\boldsymbol{n}\cdot[(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_1)\times(\boldsymbol{r}_2 - \boldsymbol{r}_1)] = 0$$

或

$$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ A & B & C \end{vmatrix}=0.$$

3）已知平面过点 $M_1(\boldsymbol{r}_1)$ 且平行于二方向矢量 $\boldsymbol{n}$ 与 $\boldsymbol{n}_1$，則平面方程为

$$(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_1)\cdot(\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{n}_1)=0$$

或

$$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ A & B & C \\ A_1 & B_1 & C_1 \end{vmatrix}=0.$$

4）已知平面与原点的距离为 p 且垂直于单位方向矢量 $\boldsymbol{p}^0=(\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma)$，則平面方程为

$$\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{p}^0=p$$

或

$$x\cos\alpha+y\cos\beta+z\cos\gamma=p.$$

我們已知两平面的交角就是从交綫上一点到两平面內各作一垂綫所成的角（或等于它的补角），所以

$$\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{n}=D,\quad \boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{n}_1=D_1,$$

二平面的夾角的余弦也就是

$$\cos\theta=\pm\cos(\boldsymbol{n},\boldsymbol{n}_1)=\pm\frac{\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{n}_1}{|\boldsymbol{n}||\boldsymbol{n}_1|}.$$

如果命 $\boldsymbol{n}=(A,B,C)$，$\boldsymbol{n}_1=(A_1,B_1,C_1)$，可知

$$\cos\theta=\pm\frac{AA_1+BB_1+CC_1}{\sqrt{(A^2+B^2+C^2)(A_1^2+B_1^2+C_1^2)}}.$$

若 $\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{n}_1=\boldsymbol{0}$，也就是 $\dfrac{A}{A_1}=\dfrac{B}{B_1}=\dfrac{C}{C_1}$，則二平面平行；其逆亦真.

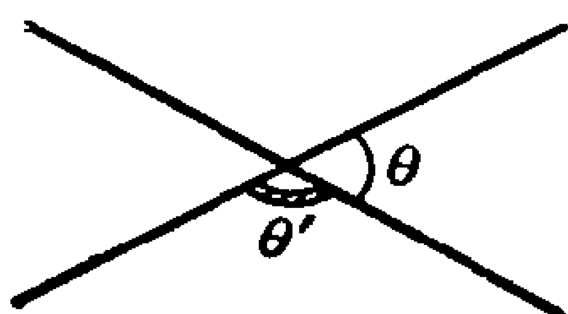


图 27

若 $\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{n}_1=0$，則二平面互相垂直，此时 $AA_1+BB_1+CC_1=0$；其逆亦眞.

求一点 $M_0(\boldsymbol{r}_0)$ 到平面 $\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{n}=D$ 的距离 d，这距离也就是 M_0 到平面上一点 $M_1(\boldsymbol{r}_1)$ 的距离，而且矢量 $\overrightarrow{M_1M_0}$ 的方向就是 $\boldsymbol{n}$ 的方向，所以

$$\overrightarrow{M_1M_0}=\boldsymbol{r}_0-\boldsymbol{r}_1=\pm d\frac{\boldsymbol{n}}{|\boldsymbol{n}|}.$$

乘以 $\boldsymbol{n}$（內积）可得

$$\boldsymbol{r}_0\cdot\boldsymbol{n}-\boldsymbol{r}_1\cdot\boldsymbol{n}=\pm d|\boldsymbol{n}|.$$

因 $\boldsymbol{r}_1\cdot\boldsymbol{n}=D$，所以

$$d=\pm\frac{\boldsymbol{r}_0\cdot\boldsymbol{n}-D}{|\boldsymbol{n}|}.$$

三张平面 $\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{n}=D$，$\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{n}_1=D_1$，$\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{n}_2=D_2$ $(\boldsymbol{n}_2=(A_2,B_2,C_2))$ 的交点

(x_0, y_0, z_0) 为

$$x_0 = \frac{\Delta_x}{\Delta}, \quad y_0 = \frac{\Delta_y}{\Delta}, \quad z_0 = \frac{\Delta_z}{\Delta},$$

此处

$$\Delta = \begin{vmatrix} A & B & C \\ A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \end{vmatrix}, \quad \Delta_x = \begin{vmatrix} D & B & C \\ D_1 & B_1 & C_1 \\ D_2 & B_2 & C_2 \end{vmatrix},$$

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} A & D & C \\ A_1 & D_1 & C_1 \\ A_2 & D_2 & C_2 \end{vmatrix}, \quad \Delta_z = \begin{vmatrix} A & B & D \\ A_1 & B_1 & D_1 \\ A_2 & B_2 & D_2 \end{vmatrix}.$$

若 $\Delta \neq 0$,则三张平面相交于一点. 若 $\Delta = 0$,但 Δ 至少有一个二阶子行列式不等于 0, 例如 $\begin{vmatrix} A & B \\ A_1 & B_1 \end{vmatrix} \neq 0$, 则 $\boldsymbol{r} \cdot \boldsymbol{n}_2 = D_2$ 平行于 $\boldsymbol{r} \cdot \boldsymbol{n} = D$ 与 $\boldsymbol{r} \cdot \boldsymbol{n}_1 = D_1$ 的交綫. 若 Δ 的二阶子行列式都等于零,则三张平面平行.

§9. 空間直綫方程

求通过 $M_0(\boldsymbol{r}_0)$ 并平行于一个方向矢量 $\boldsymbol{p} = (\lambda, \mu, \nu)$ 的直綫方程. 命 $M(\boldsymbol{r})$ 是直綫上的任一点, $\overrightarrow{M_0M} = \boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_0$ 与 $\boldsymbol{p}$ 平行,所以

$$(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_0) \times \boldsymbol{p} = \boldsymbol{0},$$

也就是

$$\frac{x - x_0}{\lambda} = \frac{y - y_0}{\mu} = \frac{z - z_0}{\nu}.$$

命此式等于 t, 则得

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_0 + \boldsymbol{p}t.$$

这是直綫方程的参数表达式.

直綫也可以看为两个平面

$$\begin{aligned} \boldsymbol{r} \cdot \boldsymbol{n}_1 &= D_1, \\ \boldsymbol{r} \cdot \boldsymbol{n}_2 &= D_2, \end{aligned} \quad (\boldsymbol{n}_1 \times \boldsymbol{n}_2 \neq \boldsymbol{0})$$

的交綫,交綫的方向 $\boldsymbol{p}$ 垂直于 $\boldsymbol{n}_1$ 与 $\boldsymbol{n}_2$,所以

$$\boldsymbol{p} = \lambda \boldsymbol{n}_1 \times \boldsymbol{n}_2.$$

直綫方程是

$$(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_0) \times (\boldsymbol{n}_1 \times \boldsymbol{n}_2) = \boldsymbol{0}.$$

两直綫

$$(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_1) \times \boldsymbol{p}_1 = \boldsymbol{0}, \quad (\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_2) \times \boldsymbol{p}_2 = \boldsymbol{0}$$

的夹角 φ 也就是方向矢量 $\boldsymbol{p}_1$, $\boldsymbol{p}_2$ 的夹角,所以

$$\cos\varphi = \boldsymbol{p}_1 \cdot \boldsymbol{p}_2 / |\boldsymbol{p}_1| \, |\boldsymbol{p}_2|.$$

命一直綫

$$(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_0) \times \boldsymbol{p} = \boldsymbol{0}$$

与一平面

$$\boldsymbol{r} \cdot \boldsymbol{n} = D$$

的夹角为 θ,则 $\boldsymbol{n}$ 与 $\boldsymbol{p}$ 的夹角等于 $90°\pm\theta$,所以

$$\sin\theta = \pm\cos(90°\pm\theta) = \boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{p}/|\boldsymbol{n}||\boldsymbol{p}|.$$

一点 $M_0(\boldsymbol{r}_0)$ 到直綫 $(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_1)\times\boldsymbol{p}=\boldsymbol{0}$ 的距离等于

$$d = M_1M_0\sin\varphi = M_1M_0\frac{|\overrightarrow{M_1M_0}\times\boldsymbol{p}|}{M_1M_0\cdot|\boldsymbol{p}|} = \frac{|(\boldsymbol{r}_0-\boldsymbol{r}_1)\times\boldsymbol{p}|}{|\boldsymbol{p}|}.$$

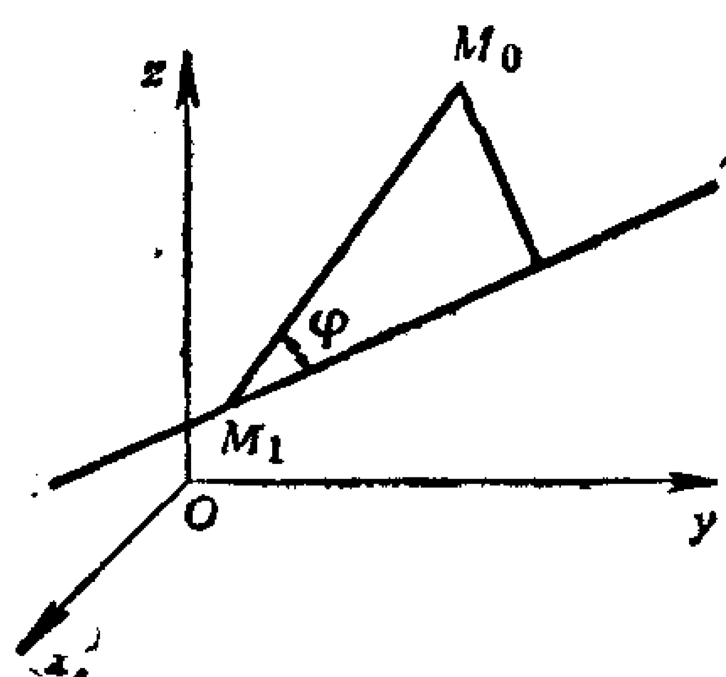


图 28

求二非平行的直綫

$$(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_1)\times\boldsymbol{p}_1=\boldsymbol{0},$$
$$(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_2)\times\boldsymbol{p}_2=\boldsymbol{0}$$

之間的最短距离，公垂线 s 的方向与 $\boldsymbol{P}_1\times\boldsymbol{P}_2$ 相同，公垂线的长度 d 等于 $\boldsymbol{r}_1$, $\boldsymbol{r}_2$ 的联綫在 s 上的射影,所以

$$d = (\boldsymbol{r}_1-\boldsymbol{r}_2)\cdot\frac{\boldsymbol{p}_1\times\boldsymbol{p}_2}{|\boldsymbol{p}_1\times\boldsymbol{p}_2|}.$$

补　　充

§10. 球面三角的主要公式

作为矢量分析的应用,我們現在証明球面三角学里的主要公式. 先固定一个球,我們不妨假定它就是单位球. 球面三角学就是研究球面上以大圓的弧为边的三角形的学問. 所謂大圓乃指过球中心的平面与球面所交的圓. 我們用 A, B, C 表三頂点，α, β, γ 表三頂点的对边，我們用 $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ 表通过球中心到頂点 A, B, C 的矢量，他們都是单位矢量. 我們也用 α 代表 $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ 二矢量所成角的弧度或角度（β, γ 也代表相应的弧度或角度). 我們也用 A 代表矢量 $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ 所定义的平面与矢量 $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{c}$ 所定义的平面的夹角的弧度或角度,即矢量 $\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{a}$ 的夹角的弧度或角度(B, C 也代表相应的弧度或角度). A, B, C, α, β, γ 間的关系就是球面三角学中的研究問題. 我們現在假定 A, B, C, α, β, γ 都小于 180°.

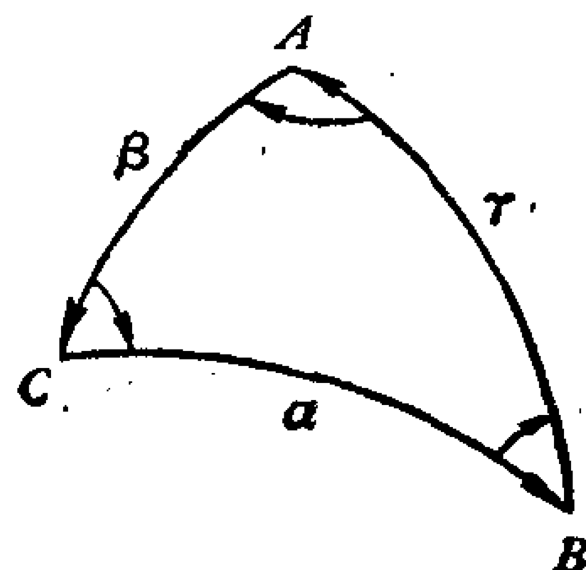


图 29_1

定理 1（余弦定律).

$$\cos\alpha = \cos\beta\cos\gamma + \sin\beta\sin\gamma\cos A,$$
$$\cos\beta = \cos\gamma\cos\alpha + \sin\gamma\sin\alpha\cos B,$$
$$\cos\gamma = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta\cos C.$$

証. 在矢量恆等式 $(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot(\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{d}) = (\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c})(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{d}) - (\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{d})(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c})$ 中取 $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}=\boldsymbol{d}$, $\boldsymbol{c}$ 为本节开始所定义的单位矢量,由于

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}=\cos\beta,\quad \boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=\cos\gamma,\quad \boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}=\cos\alpha.$$

以及 $\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{b}=1$,又矢量 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$ 与 $\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{b}$ 的长度各为 $\sin\gamma$, $\sin\alpha$,其夹角就是 $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ 所

定义的平面与 $\boldsymbol{c}, \boldsymbol{b}$ 所定义的平面的夹角，也就是角 B，所以

$$(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot(\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{b})=\sin\alpha\sin\gamma\cos B.$$

于是得到

$$\sin\alpha\sin\gamma\cos B=\cos\beta-\cos\alpha\cos\gamma.$$

这就是定理 1 中的第二式．同法証明其他諸式．

定理 2（正弦定律）．

$$\frac{\sin\alpha}{\sin A}=\frac{\sin\beta}{\sin B}=\frac{\sin\gamma}{\sin C}.$$

証．余弦公式第一、二式将右边第一项移往左边，然后求平方差得

$$(1-\cos^2\gamma)(\cos^2\alpha-\cos^2\beta)=\sin^2\gamma(\sin^2\beta\cos^2 A-\sin^2\alpha\cos^2 B).$$

以正弦代余弦并簡化之得

$$\sin^2\alpha\sin^2 B=\sin^2\beta\sin^2 A.$$

开方，并取正号（各角都小于 180°）得

$$\frac{\sin\alpha}{\sin A}=\frac{\sin\beta}{\sin B}.$$

定理 3（五元素公式）．

$$\begin{aligned}
\sin\alpha\cos B&=\cos\beta\sin\gamma-\sin\beta\cos\gamma\cos A,\\
\sin\alpha\cos C&=\cos\gamma\sin\beta-\sin\gamma\cos\beta\cos A,\\
\sin\beta\cos C&=\cos\gamma\sin\alpha-\sin\gamma\cos\alpha\cos B,\\
\sin\beta\cos A&=\cos\alpha\sin\gamma-\sin\alpha\cos\gamma\cos B,\\
\sin\gamma\cos A&=\cos\alpha\sin\beta-\sin\alpha\cos\beta\cos C,\\
\sin\gamma\cos B&=\cos\beta\sin\alpha-\sin\beta\cos\alpha\cos C.
\end{aligned}$$

証．余弦定律第一式中的 $\cos\beta$ 以第二式的表达式代入，即得

$$\cos\alpha=(\cos\gamma\cos\alpha+\sin\gamma\sin\alpha\cos B)\cos\gamma+\sin\beta\sin\gamma\cos A,$$

即

$$\sin^2\gamma\cos\alpha=\sin\gamma\cos\gamma\sin\alpha\cos B+\sin\beta\sin\gamma\cos A.$$

除去 $\sin\gamma(\neq 0)$ 即得定理中的第四式（当 $\sin\gamma=0$ 时，$C=0$，$\alpha=\beta$．定理显然正确）．同法可証其他五式．

定理 4（余切公式）．

$$\begin{aligned}
\operatorname{ctg}\alpha\sin\beta&=\cos\beta\cos C+\sin C\operatorname{ctg}A,\\
\operatorname{ctg}\alpha\sin\gamma&=\cos\gamma\cos B+\sin B\operatorname{ctg}A,\\
\operatorname{ctg}\beta\sin\gamma&=\cos\gamma\cos A+\sin A\operatorname{ctg}B,\\
\operatorname{ctg}\beta\sin\alpha&=\cos\alpha\cos C+\sin C\operatorname{ctg}B,\\
\operatorname{ctg}\gamma\sin\alpha&=\cos\alpha\cos B+\sin B\operatorname{ctg}C,\\
\operatorname{ctg}\gamma\sin\beta&=\cos\beta\cos A+\sin A\operatorname{ctg}C.
\end{aligned}$$

証．在五元素公式

$$\sin\alpha\cos B+\sin\beta\cos\gamma\cos A=\cos\beta\sin\gamma$$

中用正弦定律 $\sin\alpha=\sin A\sin\beta/\sin B$ 代入并除去 $\sin\beta$，即得

$$\sin A\operatorname{ctg}B+\cos\gamma\cos A=\sin\gamma\operatorname{ctg}\beta,$$

即定理中的第三式. 同法可証其他各式.

定理 5 (半角公式).

$$\sin\frac{1}{2}A=\sqrt{\frac{\sin(p-\gamma)\sin(p-\beta)}{\sin\beta\sin\gamma}},$$

$$\cos\frac{1}{2}A=\sqrt{\frac{\sin p\sin(p-\alpha)}{\sin\beta\sin\gamma}},$$

$$\operatorname{tg}\frac{1}{2}A=\sqrt{\frac{\sin(p-\gamma)\sin(p-\beta)}{\sin p\sin(p-\alpha)}},$$

其中 $p=\frac{1}{2}(\alpha+\beta+\gamma)$.

証. 在余弦定律第一式中用 $1-2\sin^2\frac{A}{2}$ 代 $\cos A$ 得

$$\cos\alpha=\cos\beta\cos\gamma+\sin\beta\sin\gamma\left(1-2\sin^2\frac{A}{2}\right),$$

即

$$2\sin\beta\sin\gamma\sin^2\frac{A}{2}=\cos\beta\cos\gamma+\sin\beta\sin\gamma-\cos\alpha=\cos(\beta-\gamma)-\cos\alpha=$$

$$=-2\sin\frac{1}{2}(\beta-\gamma+\alpha)\sin\frac{1}{2}(\beta-\gamma-\alpha)=2\sin(p-\gamma)\sin(p-\beta).$$

再以 $2\cos^2\frac{A}{2}-1$ 代 $\cos A$，可以得出

$$2\sin\beta\sin\gamma\cos^2\frac{A}{2}=\cos\alpha-\cos(\beta+\gamma)=2\sin p\sin(p-\alpha).$$

由此可得

$$\sin\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{\sin(p-\gamma)\sin(p-\beta)}{\sin\beta\sin\gamma}},$$

$$\cos\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{\sin p\sin(p-\alpha)}{\sin\beta\sin\gamma}}$$

及

$$\operatorname{tg}\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{\sin(p-\gamma)\sin(p-\beta)}{\sin p\sin(p-\alpha)}}.$$

由于 A 不大于 180°，所以仅取正号.

系. $$\operatorname{tg}\frac{A}{2}\operatorname{tg}\frac{B}{2}\operatorname{tg}\frac{C}{2}=\frac{\sqrt{\sin p\sin(p-\alpha)\sin(p-\beta)\sin(p-\gamma)}}{\sin^2 p}.$$

§ 11. 对偶原则

从三个单位矢量 $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ 做出以下的三个单位矢量 $\boldsymbol{a}'$, $\boldsymbol{b}'$, $\boldsymbol{c}'$，它們是与 $\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}$,

$\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$ 同向的单位矢量. 显然 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 也是与 $\boldsymbol{b}'\times\boldsymbol{c}'$, $\boldsymbol{c}'\times\boldsymbol{a}'$, $\boldsymbol{a}'\times\boldsymbol{b}'$ 同向的单位矢量.

从 $\boldsymbol{a}',\boldsymbol{b}',\boldsymbol{c}'$ 也得到一个球面三角形,称为原三角形的对偶三角形. 顶点角是 A', B', C',对边是 α',β',γ'. 由于 $\boldsymbol{a}',\boldsymbol{b}'$ 各垂直于平面 $\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 及 $\boldsymbol{c},\boldsymbol{a}$, 所以 $\boldsymbol{a}',\boldsymbol{b}'$ 的夹角与二平面 $\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 及 $\boldsymbol{c},\boldsymbol{a}$ 的夹角互补,即 $\gamma'+C=180°$. 同法可知

$$\alpha'+A=180°,\quad \beta'+B=180°,\quad \gamma'+C=180°;$$
$$\alpha+A'=180°,\quad \beta+B'=180°,\quad \gamma+C'=180°.$$

将上节的几个基本公式应用于对偶三角形,可得出与之对应的对偶公式. 例如,由上面的定理 1 可知

$$\cos\alpha'=\cos\beta'\cos\gamma'+\sin\beta'\sin\gamma'\cos A',$$

因而得出

定理 1(余弦定律).

$$\cos A=-\cos B\cos C+\sin B\sin C\cos\alpha,$$
$$\cos B=-\cos C\cos A+\sin C\sin A\cos\beta,$$
$$\cos C=-\cos A\cos B+\sin A\sin B\cos\gamma.$$

上节定理 2 所表示的正弦定律的对偶公式也就是原来的公式,即自我对偶.

定理 2(五元素公式).

$$\sin A\cos\beta=\cos B\sin C+\sin B\cos C\cos\alpha,$$
$$\sin A\cos\gamma=\cos C\sin B+\sin C\cos B\cos\alpha,$$
$$\sin B\cos\gamma=\cos C\sin A+\sin C\cos A\cos\beta,$$
$$\sin B\cos\alpha=\cos A\sin C+\sin A\cos C\cos\beta,$$
$$\sin C\cos\alpha=\cos A\sin B+\sin A\cos B\cos\gamma,$$
$$\sin C\cos\beta=\cos B\sin A+\sin B\cos A\cos\gamma.$$

上节定理 4 所表示的余切公式的对偶公式也是自我对偶的.

定理 3(半角公式).

$$\sin\frac{\alpha}{2}=\sqrt{\frac{-\cos p\cos(p-A)}{\sin B\sin C}},$$

$$\cos\frac{\alpha}{2}=\sqrt{\frac{\cos(p-B)\cos(p-C)}{\sin B\sin C}},$$

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}=\sqrt{\frac{-\cos p\cos(p-A)}{\cos(p-B)\cos(p-C)}},$$

此处 $p=\frac{1}{2}(A+B+C)$.

§ 12. 直角三角形与直边三角形的計算規則

1) 有一个角为 $90°$ 的球面三角形 ABC,被称为球面直角三角形. 取 $A=90°$,由

余弦、正弦定律可以得出

$$\cos\alpha = \cos\beta\cos\gamma, \quad \sin\beta = \sin\alpha\sin B, \quad \sin\gamma = \sin\alpha\sin C.$$

再由五元素公式第一式可知

$$\sin\alpha\cos B = \cos\beta\sin\gamma = \cos\beta\sin\alpha\sin C,$$

因而得出 $\cos B = \cos\beta\sin C$. 同法得 $\cos C = \cos\gamma\sin B$. 这些式子可以写成統一的形式:

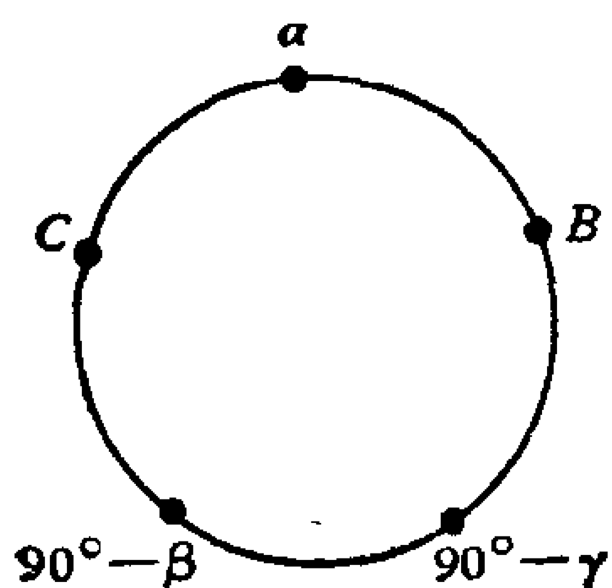


图 29₂

$$\cos\alpha = \sin(90^\circ-\beta)\sin(90^\circ-\gamma),$$
$$\cos(90^\circ-\beta) = \sin\alpha\sin B,$$
$$\cos(90^\circ-\gamma) = \sin\alpha\sin C,$$
$$\cos B = \sin(90^\circ-\beta)\sin C,$$
$$\cos C = \sin(90^\circ-\gamma)\sin B.$$

这五个式子可以概括成为下面的几句話:直角被采用,直角的邻边用余边代替,可把直角三角形中除已知角 A 以外的五个未知量排列成为一圈如图. 以上五个公式可以用一句話表达:其中之一的余弦等于不相邻于它的二量的正弦之积.

在余切公式中取 $A = 90^\circ$,則

$$\cos C = \operatorname{ctg}\alpha\operatorname{tg}\beta = \operatorname{ctg}\alpha\operatorname{ctg}(90^\circ-\beta),$$
$$\cos B = \operatorname{ctg}\alpha\operatorname{ctg}(90^\circ-\gamma),$$
$$\operatorname{ctg}\beta\sin\gamma = \operatorname{ctg}B, \quad 即 \quad \cos(90^\circ-\gamma) = \operatorname{ctg}B\operatorname{ctg}(90^\circ-\beta),$$
$$\cos(90^\circ-\beta) = \operatorname{ctg}C\operatorname{ctg}(90^\circ-\gamma).$$

后二式相乘得

$$\operatorname{ctg}B\operatorname{ctg}C = \operatorname{ctg}\beta\sin\gamma\operatorname{ctg}\gamma\sin\beta = \cos\beta\cos\gamma = \cos\alpha \text{ (余弦定律)}.$$

这五个式子也可以概括成为一句話:五量中任一个的余弦等于其相邻二量的余切之积.

例 1. 已知直角边 $\beta = 48^\circ27'21''$, $\gamma = 33^\circ07'37''$,求斜边 α 及角 B, C.

由公式

$$\cos\alpha = \cos\beta\cos\gamma, \quad \operatorname{tg}B = \frac{\operatorname{tg}\beta}{\sin\gamma}, \quad \operatorname{tg}C = \frac{\operatorname{tg}\gamma}{\sin\beta}$$

得

$$\alpha = 56^\circ15'42'', \quad B = 64^\circ09'42'', \quad C = 41^\circ05'05''.$$

例 2. 已知直角边 $\gamma = 37^\circ54'06''$ 及角 $B = 58^\circ40'13''$, 求斜边 α, 直角边 β 及角 C.

由公式

$$\operatorname{tg}\beta = \operatorname{tg}B\sin\gamma, \quad \operatorname{tg}\alpha = \frac{\operatorname{tg}\gamma}{\cos B}, \quad \cos C = \sin B\cos\gamma,$$

得

$$\alpha = 56^\circ15'42'', \quad \beta = 45^\circ15'42'', \quad C = 47^\circ37'21''.$$

2) 有一边等于 90° 的球面三角形被称为直边三角形. 取 $\alpha = 90^\circ$, 則由定理 10.1, 定理 10.2 及定理 11.1 得

$$\cos(180^\circ - A) = \sin(B - 90^\circ)\sin(C - 90^\circ),$$
$$\cos(180^\circ - \beta) = \sin(180^\circ - \gamma)\sin(B - 90^\circ),$$
$$\cos(180^\circ - \gamma) = \sin(180^\circ - \beta)\sin(C - 90^\circ),$$
$$\cos(B - 90^\circ) = \sin(180^\circ - \beta)\sin(180^\circ - A),$$
$$\cos(C - 90^\circ) = \sin(180^\circ - \gamma)\sin(180^\circ - A),$$
$$\cos(180^\circ - A) = \operatorname{ctg}(180^\circ - \beta)\operatorname{ctg}(180^\circ - \gamma),$$
$$\cos(180^\circ - \beta) = \operatorname{ctg}(180^\circ - A)\operatorname{ctg}(C - 90^\circ),$$
$$\cos(180^\circ - \gamma) = \operatorname{ctg}(180^\circ - A)\operatorname{ctg}(B - 90^\circ),$$
$$\cos(B - 90^\circ) = \operatorname{ctg}(180^\circ - \gamma)\operatorname{ctg}(C - 90^\circ),$$
$$\cos(C - 90^\circ) = \operatorname{ctg}(180^\circ - \beta)\operatorname{ctg}(B - 90^\circ).$$

因此把五个排成一圈如图，則上面的十个公式也可以概括为：任一量的余弦等于相邻于它的二量的余切之积，亦等于不相邻于它的二量的正弦之积.

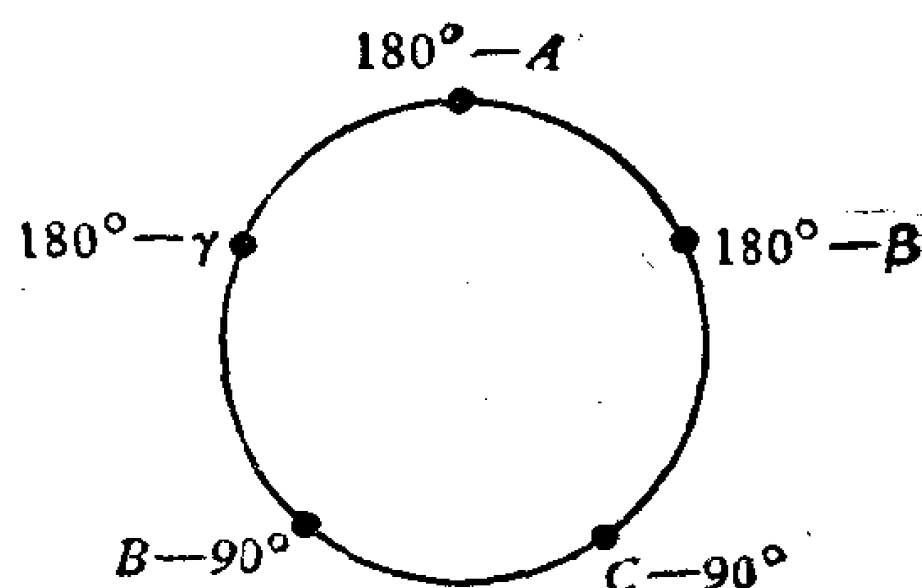


图 30

例 3. 在直边三角形中已知

$$\beta = 115^\circ 50' 19'', \quad \gamma = 138^\circ 54' 54'',$$

求角 A, B 及 C.

由公式

$$\cos(180^\circ - A) = \operatorname{ctg}(180^\circ - \beta)\operatorname{ctg}(180^\circ - \gamma)$$

得

$$A = 123^\circ 44' 16''.$$

又由公式

$$\cos(B - 90^\circ) = \sin(180^\circ - \beta)\sin(180^\circ - A),$$
$$\cos(C - 90^\circ) = \sin(180^\circ - \gamma)\sin(180^\circ - A)$$

得

$$B = 131^\circ 32' 39'', \quad C = 146^\circ 52' 27''.$$

習题. 有一枚多级宇宙火箭，发射前预测火箭的最后一级将落在下列地理坐标范围以内的地区：

北緯:	10°20′;	11°30′;	9°,10′;	8°5′
西經	170°30′;	167°55′;	166°45′;	169°20′
	(P_1)	(P_3)	(P_4)	(P_2)

发射结果，其射程达12,000 公里.

将上述四点描在地球仪上，可发现这四个点乃是太平洋中部赤道偏北一个小四边形的四頂点.

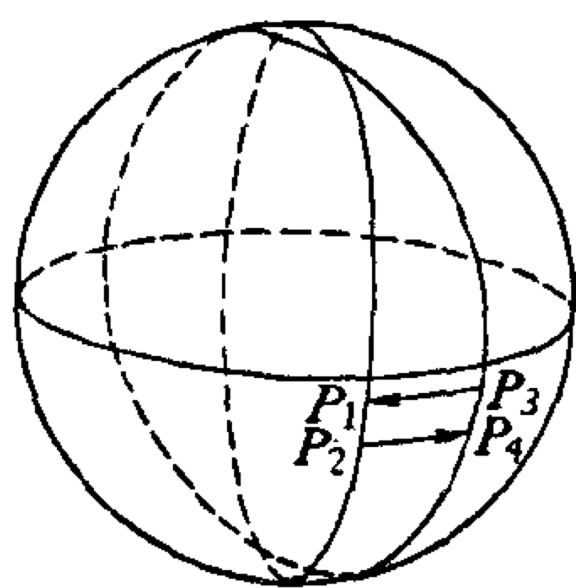


图 31

显然，上面所指的宇宙火箭降落地区，是根据火箭发射时瞄准的精确程度来确定的. 瞄准方向在发射点与 P_1, P_2 及 P_3, P_4 两平面所成的二面角之內.

(1) 从这个假定出发，我們可反过去推算可能的发射点及瞄准方向所容許的最大偏差. 这一計算虽然比較花时間，但不失为一个很好的习題，并且所要用到的工具全在本章之內，讀者不妨一

为之.

(2) 算出可能的发射点之后,計算該点到落弹地区的距离?以与火箭的实际射程相印証(地球半径=6300公里).

§13. 力,力系,等效力系

作为矢量的背景資料,这儿我們附带地講些靜力学的知識. 讀者如果要系統了解,还是閱讀力学教材为妥.

定义. 作用于刚体的力就是一个滑动矢量. 所謂刚体就是指受力的作用而不变形的物体,或是內部各点的相对位置不会改变的物体. 絕对刚体是不存在的,我們用完全刚体来代替实物是在形变微不足道的假定下进行的.

矢量的方向表示加力的方向,矢量的长度表示力的強弱,也称为力的模度. 最具体的例子是在弹簧秤下扣一根綫,綫上挂一物体,綫上任一点的原位和挂上物体之后的位置所得的綫段就代表这一"力",它是滑动矢量.

在同一刚体上加上各种不同的力称为力系. 这些力各以 $\boldsymbol{F}_1, \cdots, \boldsymbol{F}_n$ 表示.

若有两个力 $\boldsymbol{F}_1, \boldsymbol{F}_2$ 作用綫相交,则可以把表它們的矢量順作用綫移到交点,用平行四边形法则求出矢量和. 这矢量和就代表这二力的合力. 两个作用綫相同、长度相等、方向相反的二矢量所合并得出的合力等于 $\mathbf{0}$,用在同一刚体上,并不产生作用.

由此立刻可以推出:相交于一点的三个力 $\boldsymbol{F}_1, \boldsymbol{F}_2, \boldsymbol{F}_3$,把表它們的矢量順作用綫移到交点,则以 $\boldsymbol{F}_1, \boldsymbol{F}_2, \boldsymbol{F}_3$ 为边所做的平行六面体的对角綫就是这三力合并而得出的合力(見图 32).

又如果給定空間一力 $\boldsymbol{F}$,在其作用点(起点)取三个不共面的方向,我們做一平行六面体,以 $\boldsymbol{F}$ 为对角綫,以这三个方向为边,则在各边上都得一力 $\boldsymbol{F}_1, \boldsymbol{F}_2, \boldsymbol{F}_3$. 这三力称为 $\boldsymbol{F}$ 对这三个方向的分解.

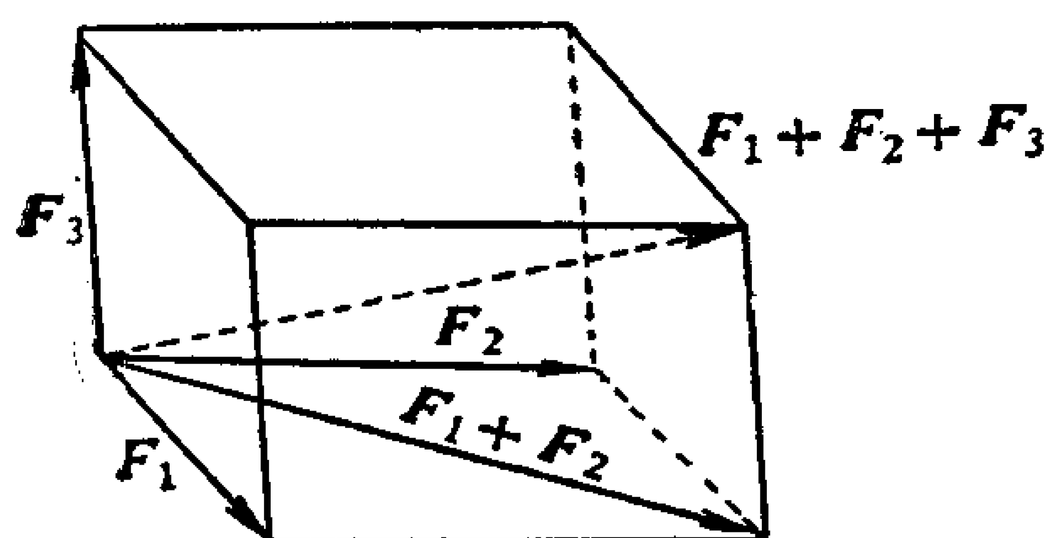


图 32

对一刚体来說,将作用在它上面的力合并或分解,新力系所起的作用与原来这些力所起的作用是一样的.

定义. 两个力系 Σ_1, Σ 如果可以用合并和分解的办法把其一变为它一,则这二力系称为等效. 等效于 $\mathbf{0}$ 的力系,称为平衡力系.

把一力系中代表諸力的矢量作为自由矢量求和,得一矢量 $\boldsymbol{F}$, $\boldsymbol{F}$ 称为这系的合矢. 显然,等效的力系有相同的合矢. 一个共点力系一定和一个力等效,这个等效的力就是 $\boldsymbol{F}$ 所代表的力.

定理. 任一力系一定等效于过三个任意点的三矢量所成的力系(这三点不在同一直綫上).

証. 在空間任取不在一直綫上的三点 O_1, O_2, O_3. 由于 $\boldsymbol{F}_1$ 的作用点可以沿它的作

用綫任意选取，所以，$\boldsymbol{F}_1$ 的作用点 A 与 O_1, O_2, O_3 可以不在同一平面上. 作这三点与 A 的联綫，得 O_1A, O_2A, O_3A. 把 $\boldsymbol{F}_1$ 分解在这三个方向上，再把 O_iA 上的矢量移到 O_i 点 $(i=1,2,3)$，則任一力 $\boldsymbol{F}_1$ 可以表为过 O_1, O_2, O_3 三点的三个力的和. 对于力系中的其他的力，也依上述方法分解，使其化为过 O_1, O_2, O_3 三点的三个力的和(图 33).

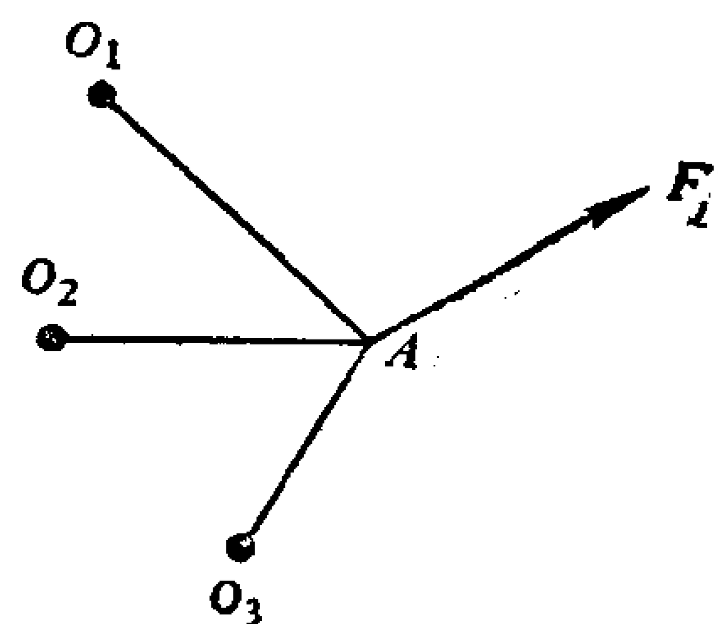


图 33

于是任一力系一定等效于三个共点力系的总力系，而每一个共点力系又可以合併成为一个力. 故得定理.

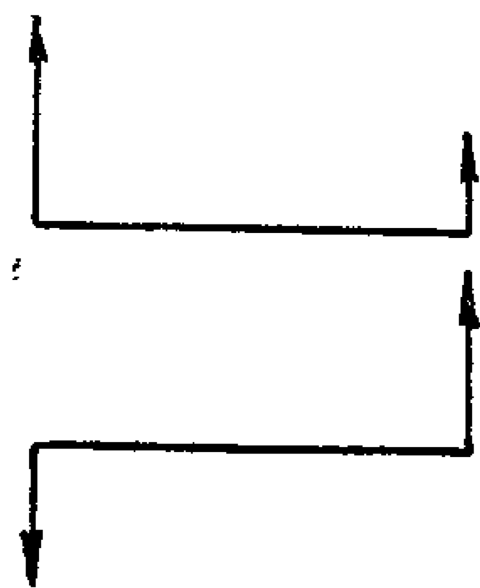
§ 14. 平行力的合并

任意一对作用綫平行的力一定是共平面的. 做一条公垂綫，并移动其作用点，則視此二力为同向平行或反向平行一定可以把它們表成为如 34 图的两种形式之一，就是两个作用点在公垂綫上. 此时两作用綫間的距离称为力臂.

定理 1. 命二同向平行力 $\boldsymbol{F}_1, \boldsymbol{F}_2$ 的作用点为 A_1, A_2. 在 A_1, A_2 联綫上取一点 C，使

$$A_1C|\boldsymbol{F}_1| = CA_2|\boldsymbol{F}_2|,$$

則以 C 为作用点、$|\boldsymbol{F}_1|+|\boldsymbol{F}_2|$ 为长度的矢量所代表的力与 $\boldsymbol{F}_1, \boldsymbol{F}_2$ 二力等效.


图 34

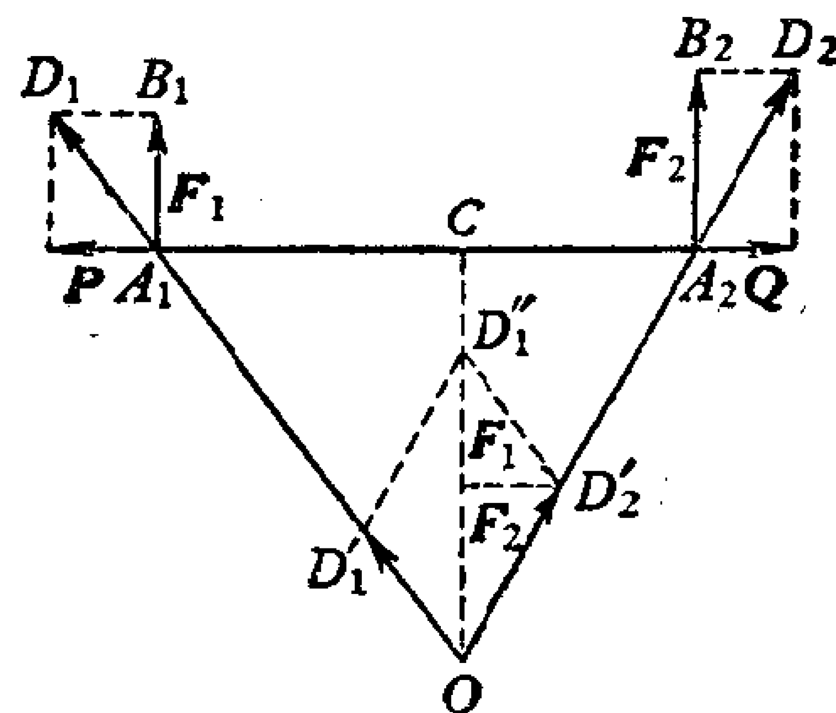


图 35

証. 在 A_1, A_2 各加一力 $\boldsymbol{P}, \boldsymbol{Q}$，它們的长度相等，方向相反，都在 A_1A_2 的延綫上. 作 $\boldsymbol{F}_1, \boldsymbol{P}$ 的合力 $\overrightarrow{A_1D_1}$，作 $\boldsymbol{F}_2, \boldsymbol{Q}$ 的合力 $\overrightarrow{A_2D_2}$，把这二力都移到交点 O，因为 $\boldsymbol{P}$ 与 $\boldsymbol{Q}$ 相消，故在 O 点合成一力，其长是 $|\boldsymbol{F}_1|+|\boldsymbol{F}_2|$，其向是垂直于 A_1A_2. 由三角形的相似性可知

$$\frac{CA_1}{OC}=\frac{|\boldsymbol{P}|}{|\boldsymbol{F}_1|}, \quad \frac{CA_2}{OC}=\frac{|\boldsymbol{Q}|}{|\boldsymbol{F}_2|}.$$

則 $A_1C|\boldsymbol{F}_1| = CA_2|\boldsymbol{F}_2|$. 故得定理.

同样的，用外分法可以处理反平行力，即得

定理 2. 不相等的两个反平行力必有一合力，平行于原力且与較大的力同方向，其长度是二力长度之差，其作用点在二分力作用点的延綫上，且对这两点的距离与二分力的大小成反比例.

当二反平行力的长度一样时，这样的力系称为力偶. 用 $(\boldsymbol{F}, -\boldsymbol{F})$ 表之. 力偶无法

把它們合成为一个力，因为一个力表示推进，而一对力偶却产生旋轉作用。

§15. 力　矩

我們現在引进力矩的概念。

設 $\boldsymbol{F}$ 是一力. 在空間取一点 O，以 d 表自 O 到 $\boldsymbol{F}$ 所作的垂綫的长度. $\boldsymbol{F}$ 对 O 的力矩是一自由矢量 $\boldsymbol{M}$，其长度等于 $d|\boldsymbol{F}|$，方向是垂直于 O 及 $\boldsymbol{F}$ 所成的平面，并且依力矩的正向而立，力之所向与时針的轉动方向相反. 換言之，命 $\boldsymbol{r}$ 表由 O 到 A 的矢量，則力矩就是

$$\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{F}.$$

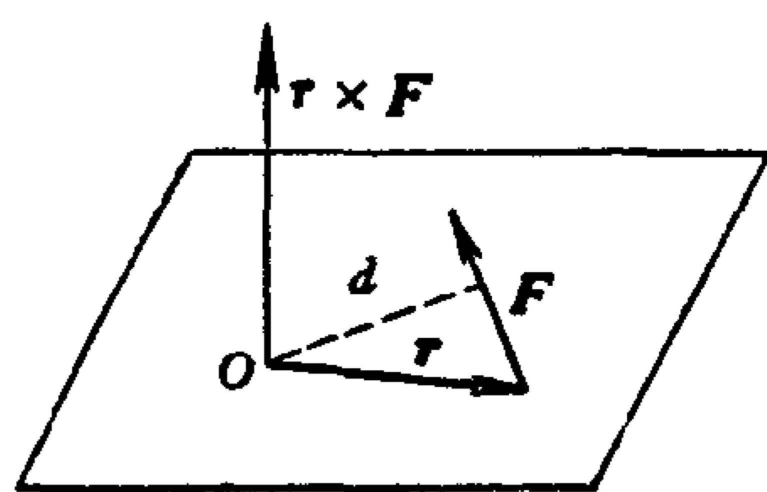


图 36

另取一点 O'，以 $\boldsymbol{M}'$ 表 $\boldsymbol{F}$ 对 O' 的力矩，則显然有

$$\boldsymbol{M}'=\boldsymbol{r}'\times\boldsymbol{F}=\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{F}+(\boldsymbol{r}'-\boldsymbol{r})\times\boldsymbol{F}=\boldsymbol{M}+\boldsymbol{d}\times\boldsymbol{F},$$

此处 $\boldsymbol{d}$ 是由 O' 到 O 的矢量.

一力系 Σ 中每一力对 O 点的力矩的矢量和称为 Σ 对 O 的合矩，即

$$\boldsymbol{M}=\boldsymbol{r}_1\times\boldsymbol{F}_1+\cdots+\boldsymbol{r}_n\times\boldsymbol{F}_n.$$

显然有

定理 1. 力偶对任一点的力矩都相同（指作为自由矢量来說是相同的）.

定理 2. 等效的力系对一点的合矩是相同的.

这可由 $\boldsymbol{r}\times(\boldsymbol{F}_1+\boldsymbol{F}_2)=\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{F}_1+\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{F}_2$ 立得

定理. 一共点力系对任一点的合矩等于合力对該点的力矩（即上公式中取 $\boldsymbol{r}_1=\boldsymbol{r}_2=\cdots=\boldsymbol{r}_n$），又合力非 **0** 的一系平行綫上的力系对任一点的合矩也等于合力对該点的力矩.

§16. 力　偶

本节的目的在于証明：凡合矩相同（作为一个自由矢量）的力偶都是等效的. 任何两个力偶可以合并成为一个力偶，所对应的力矩也是原力偶的力矩的矢量和.

1）力偶中的力和力臂的大小可以任意改变，只要它們的合矩保持不变.

証. 在中点 O 加二力 $\boldsymbol{F}'$ 与 $-\boldsymbol{F}'$. 作 $\boldsymbol{F}$ 与 $\boldsymbol{F}'$ 的合力得 $\boldsymbol{\Phi}$，則 $\boldsymbol{\Phi}$ 与 $-\boldsymbol{\Phi}$ 也成一力偶（見图 37）. 由 §14 定理 1 可知

$$|\boldsymbol{F}'|OD=|\boldsymbol{F}|DB,$$

故

$$|\boldsymbol{\Phi}|OD=(|\boldsymbol{F}|+|\boldsymbol{F}'|)OD=$$
$$=|\boldsymbol{F}|(OD+DB)=|\boldsymbol{F}|OB.$$

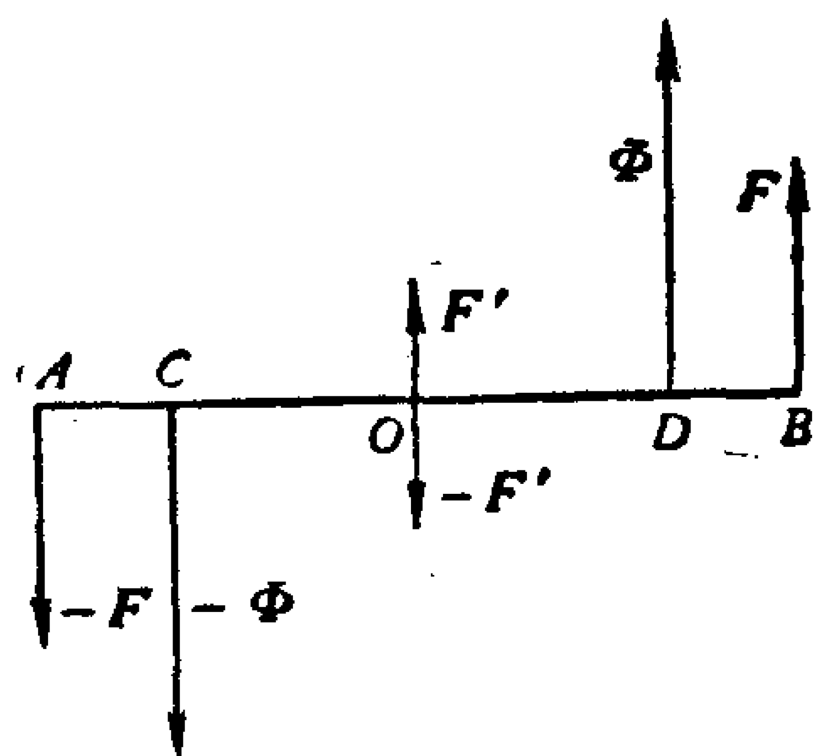


图 37

取合适的 $\boldsymbol{F}'$，我們可以得出任意长的 $\boldsymbol{\Phi}$ 或任意长的 OD，但不能两个都任意. 实际上，$\boldsymbol{F}$ 与 $\boldsymbol{\Phi}$ 的矢头在等腰双曲綫（$xy=$ 常数）上.

2）力偶可以平行移动，即平行移动后的力偶与原力偶等效．

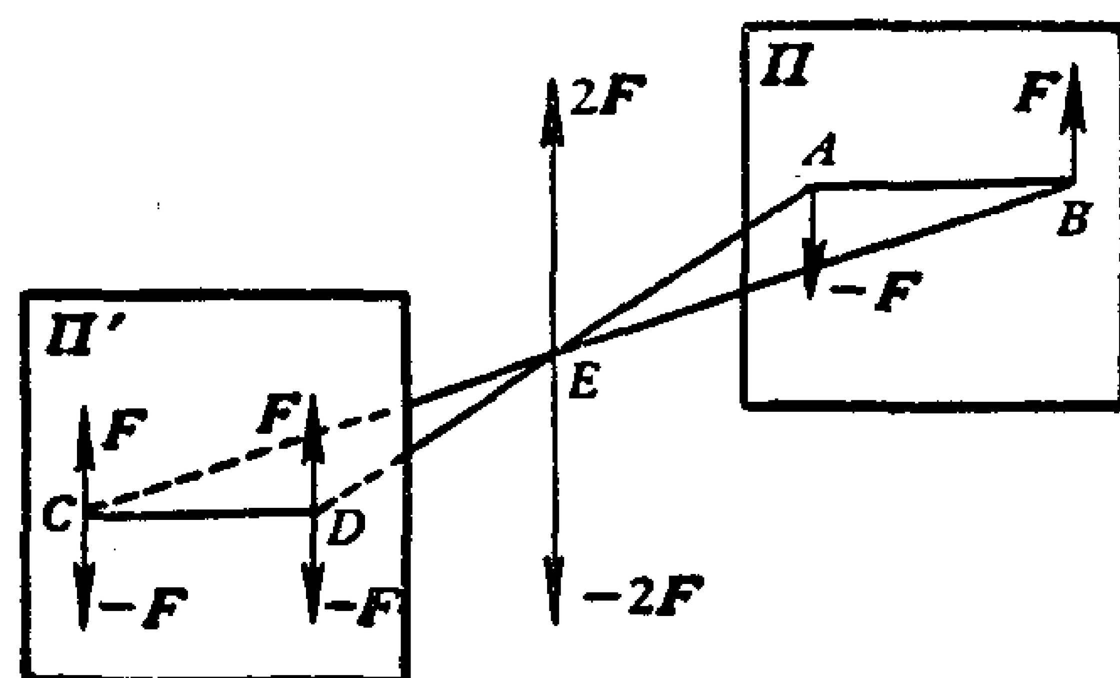


图 38

証．設力偶所在的平面是Π，我們現在把这个力偶平行移动到Π'内．在Π'中画AB的平行等长綫CD，并于C，D各加$\boldsymbol{F}$，$-\boldsymbol{F}$的力．由于AB与CD是等长平行的，故AD，BC是平行四边形的二对角綫，交于E点．作用于A，D的两个$-\boldsymbol{F}$在E点合成$-2\boldsymbol{F}$．在B，C的两个$+\boldsymbol{F}$在E点合成$+2\boldsymbol{F}$．这二力在E点相抵消．結果在Π'內剩下了由原力偶平移来的一力偶，故得定理(若$\Pi=\Pi'$，則为同平面內平移的情况)．

3）一力偶可以繞其力臂中心旋轉任一角度(在同一平面上)，即旋轉后所得的力偶与原力偶等效．

証．繞中点O把AB旋轉到CD，在CD的两端各加一力$\boldsymbol{F}_1$与$-\boldsymbol{F}_1$．$\boldsymbol{F}_1$垂直于OD且$|\boldsymbol{F}_1|=|\boldsymbol{F}|$．在$BOD$角內作$\boldsymbol{F}$与$-\boldsymbol{F}_1$的作用綫交于$M$．同样，在$AOC$角內得交点$N$．由于$\triangle OBM=\triangle ODM$，$\triangle OAN=\triangle OCN$，故$OM$，$ON$平分对頂角，即$M$，$O$，$N$在一直綫上．在$M$点，$\boldsymbol{F}$与$-\boldsymbol{F}_1$的合力与在$N$点$-\boldsymbol{F}$，$\boldsymbol{F}_1$的合力对消了，所留下的就是以$CD$为臂的力偶$(\boldsymbol{F}_1, -\boldsymbol{F}_1)$．

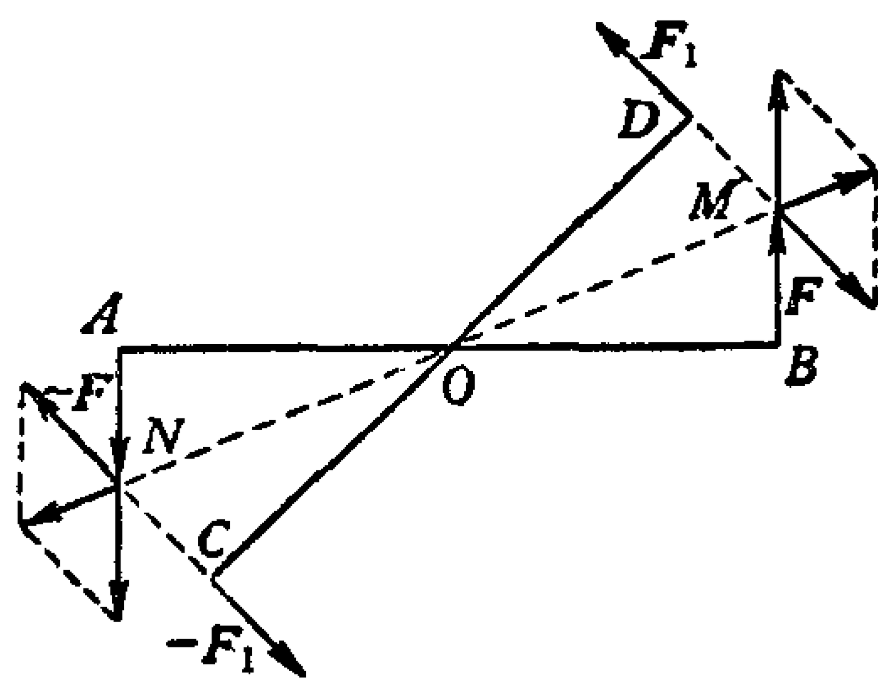


图 39

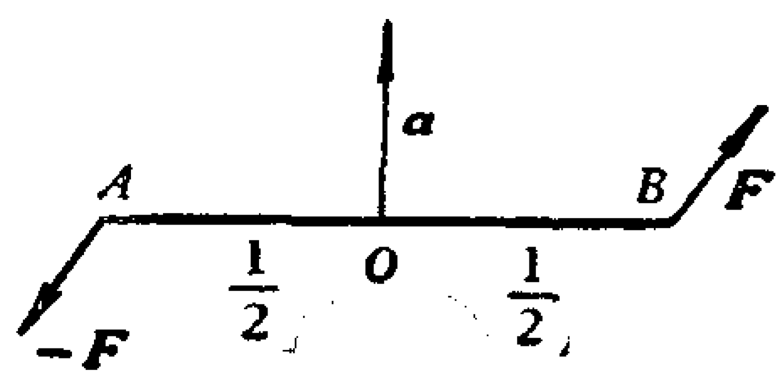


图 40

4）任意給了一个矢量$\boldsymbol{a}$，过起点O作一垂直平面．平面上取一以O为中心的綫段AB，其长为1．作此平面上过A，B两点并垂直于AB的二矢$\boldsymbol{F}$与$-\boldsymbol{F}$，方向相反，其长为$|\boldsymbol{a}|$，并照反时針方向定$\boldsymbol{F}$的方向．这样所得的力偶就是以$\boldsymbol{a}$为力矩的力偶．

反之，任一以$\boldsymbol{a}$为力矩的力偶，先由2）可以把它所在的平面移为上述的平面；再由3）把力臂移至上述的力臂；最后由1）可以把这力偶变为与上述力偶完全相同．

5）两力偶可以合并成为一力偶，前二力偶的力矩的矢量和就等于后一力偶的力矩．

証．如果两力偶所在的平面平行，則由2)及3)可以把它們移成为共平面同力臂的

两个力偶. 由 § 14 定理 1 我們可以把它們加成一力偶,所得的力矩就是原力矩的和.

如果不平行,命 L 是它們的交綫. 用 2), 3) 与 1)可以变 L 上单位长綫段为二力偶的公共力臂,且二力偶处于同一平面. 于是在此力臂的两端得二力 $\boldsymbol{F}_1$ 与 $\boldsymbol{F}_2$, 它們都与力臂垂直. 作 $\boldsymbol{F}$ 表 $\boldsymbol{F}_1, \boldsymbol{F}_2$ 的和,显然 $(-\boldsymbol{F}, \boldsymbol{F})$ 是該二力偶的和. 又由 § 15 定理可見,二力偶的力矩的矢量和就等于二力偶之和的力矩.

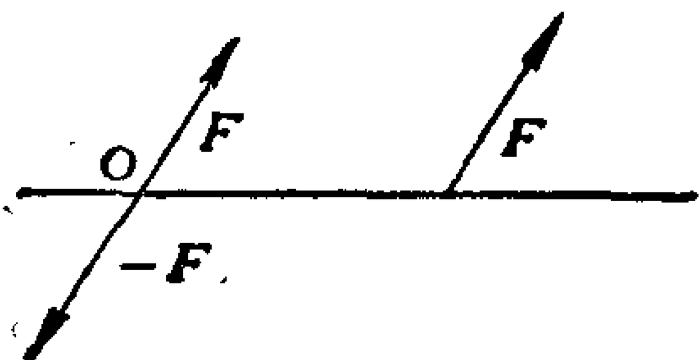


图 41

6) 任給一点 O,任一力系等效于以 O 点为起点的一个力和一个力偶所成的力系.

証. 任給一力 $\boldsymbol{F}$,在 O 点添上 $\boldsymbol{F}$ 与 $-\boldsymbol{F}$ 二力,则得从 O 点为起点的一个力和一力偶.

把力系中每一个力都如此分解,则得一力系, 其中是共 O 点的一些力加上一些力偶. 将共点力合并为一力,把諸力偶合并成一力偶,卽得所証.

7) 任給一点 O,任一力系等效于二力,其一以 O 点为起点.

把力偶中一力的起点移到 O 点,把 O 点二力合并,卽得所証.

習題. 如果一个力系中的各力,其位置、方向与大小可依次由一平面多边形的各边来代表,则此力系等效于一力偶,其力矩的大小等于多边形面积的两倍.

§ 17. 力系的标准形式

1) 任一力系等效于一个力和一个力偶,这力偶的力矩与該力平行.

証. 由 § 16 的 6),任一力系等效于一个力 $\boldsymbol{F}$ 和一个以 $\boldsymbol{M}$ 为力矩的力偶. 把 $\boldsymbol{M}$ 分解为 $\boldsymbol{m}+\boldsymbol{M}_0$, $\boldsymbol{m}$ 与 $\boldsymbol{F}$ 平行, $\boldsymbol{M}_0$ 与 $\boldsymbol{F}$ 垂直. 作垂直于 $\boldsymbol{M}_0$ 且包有 $\boldsymbol{F}$ 的平面 Π,在 Π 上作一力偶,其力矩为 $\boldsymbol{M}_0$,其一端就是 $\boldsymbol{F}$ 的出发点 O,则在 O 点的力是 $-\boldsymbol{F}$. 另一端命之为 O',如是则本力系等效于 O' 的一力 $\boldsymbol{F}$ 与以 $\boldsymbol{m}$ 为力矩的一力偶.

力系的如此表达法称为标准形式, 力学中称为螺旋系.

矢量 $\boldsymbol{m}$ 与 $\boldsymbol{F}$ 仅相差一常数因子,卽

$$p\boldsymbol{F}=\boldsymbol{m}.$$

这 p 称为螺旋系的参数, $\boldsymbol{F}$ 的作用綫称为軸.

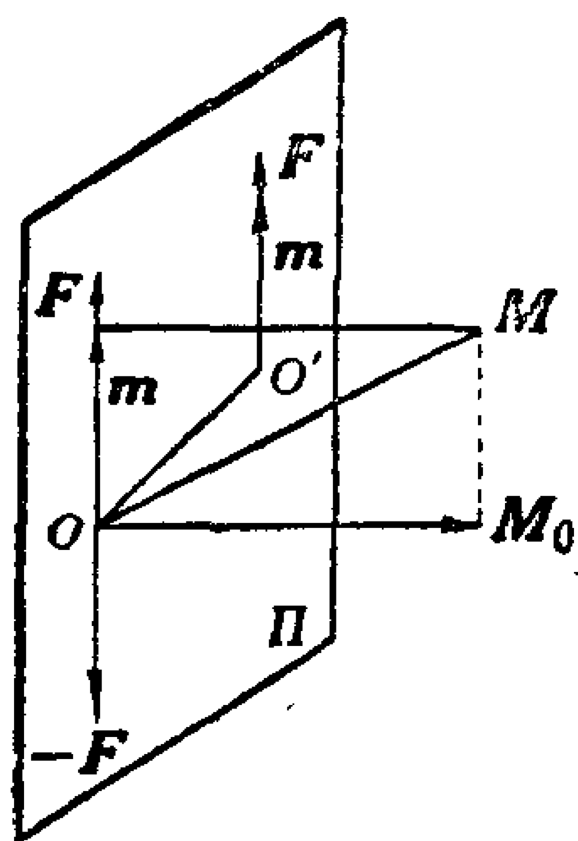


图 42

2) 注意. $\boldsymbol{F}$ 是一个滑动矢量, $\boldsymbol{m}=p\boldsymbol{F}$ 是一个自由矢量,这系对一点 O 的合矩是

$$M = r \times F + m,$$

此处 $\boldsymbol{r}$ 是由 O 到 $\boldsymbol{F}$ 的起点的矢量. 上式两边与矢量 $\boldsymbol{F}$ 做内积,可知

$$M \cdot F = m \cdot F = p(F \cdot F),$$

即

$$p = M \cdot F / F \cdot F.$$

矢量方程

$$M = r \times F + pF$$

的 $\boldsymbol{r}$ 作为未知矢量,p 作为未知数,则 $p = M \cdot F / F \cdot F$ 且由 § 5 可知这矢量方程有解,且解的一般形式是 $r = r_0 + tF$. 故得

图 43

定理 1. 給了点 O, $\boldsymbol{F}$ 与 $\boldsymbol{M}$, 有一个且唯有一个螺旋力系存在,这力系对 O 点的合矢、合矩各为 $\boldsymbol{F}$, $\boldsymbol{M}$.

定理 2. O 点已給,二力系对 O 点的合矢、合矩各为 $(\boldsymbol{F}, \boldsymbol{M})$ 与 $(\boldsymbol{F}_1, \boldsymbol{M}_1)$, 则二系等效的必要且充分条件是 $\boldsymbol{F} = \boldsymbol{F}_1$, $\boldsymbol{M} = \boldsymbol{M}_1$.

証. 由 § 13 的定义与 § 15 可知,两个等效力系的合矩是相同的; 反之,由定义可知,他們有同一的标准形式,故得定理.

定理 3. 二力系对一点的合矢、合矩相等,則对任一点的合矢、合矩也相等.

定理 4. 一力系平衡的必要且充分条件是 $F = 0$, $M = 0$. 若 $\{F_1, \cdots, F_l\}$ 所成的力系与 $\{F'_1, \cdots, F'_m\}$所成的力系等效,则$\{F_1, \cdots, F_l, -F'_1, \cdots, -F'_m\}$是一平衡力系.

3) 现在研究一下力系的分类.

先从 $M \cdot F = m \cdot F = p|F|^2$ 来討論. 如果 $M \cdot F = 0$, 則有 $p = 0$ 或 $|F| = 0$. 当 $p = 0$ 时,这力系等效于一个力;当 $|F| = 0$ 时,这力系等效于一力偶. 若 $p = 0$, $|F| = 0$ 同时出现,这力系平衡.

若 $M \cdot F \neq 0$,則有一非 0 的顺中心軸的力,还有一力矩非 0 的力偶.

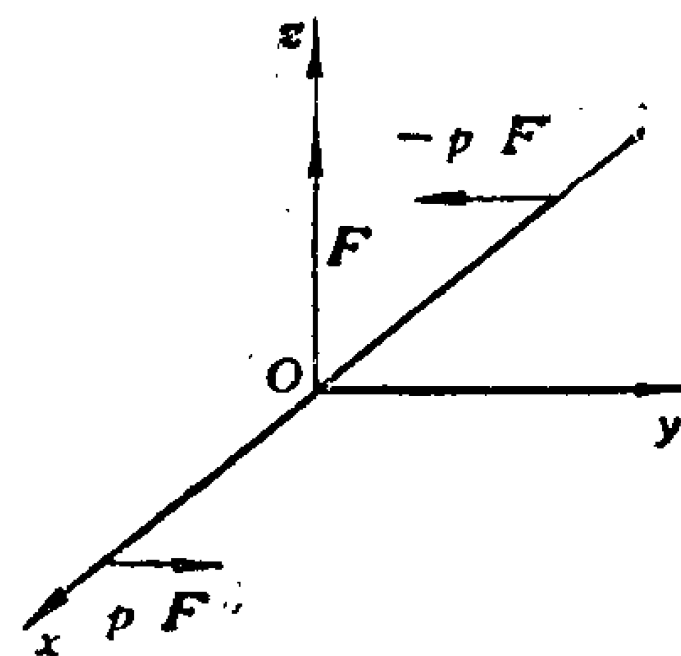


图 44

如果我們把坐标取得合适,就可以把标准力系表达如下: 取 z 軸的方向就是 $\boldsymbol{F}$ 的方向,取 $m = pF$ 的力臂就是 x 軸,力臂的长度等于 1. 在臂端各装一平行于 y 軸但方向相反长度为 $p|F|$ 的矢量. 当 $p > 0$ 时如上图,这三个力是

起　　点	終　　点	矢 量 表 示	对(x, y, z)的力矩
$(0, 0, 0)$	$(0, 0, Z)$	$(0, 0, Z)$	$(-yZ, xZ, 0)$
$(1/2, 0, 0)$	$(1/2, pZ, 0)$	$(0, pZ, 0)$	$(pzZ, 0, (1/2 - x)pZ)$
$(-1/2, 0, 0)$	$(-1/2, -pZ, 0)$	$(0, -pZ, 0)$	$(-pzZ, 0, (1/2 + x)pZ)$

§ 18. 平衡方程及其应用

1) 平衡方程.

静力学的問題一般都可用平衡方程来解决,平衡方程是

$$\boldsymbol{F}=0, \quad \boldsymbol{M}=0.$$

系$\sum$中有 n 个力 $\boldsymbol{F}_v(1\leqslant v\leqslant n)$，其作用点各为 (x_v, y_v, z_v)，其分量为 (X_v, Y_v, Z_v)，則平衡方程可以写为六个方程

$$X=\sum_{i=1}^{n}X_i=0, \quad Y=\sum_{i=1}^{n}Y_i=0, \quad Z=\sum_{i=1}^{n}Z_i=0,$$

$$M_x=\sum_{i=1}^{n}(y_iZ_i-z_iY_i)=0, \quad M_y=\sum_{i=1}^{n}(z_iX_i-x_iZ_i)=0,$$

$$M_z=\sum_{i=1}^{n}(x_iY_i-y_iX_i)=0.$$

在实际运用时，妥善地取坐标系統可以大大地化簡．例如：

2）三力平衡的条件．

我們現在只討論三力中无二力平行或反平行的情况，因为其他情况容易解决．

由 § 17 我們可以取坐标系統使这三力的矢量各为$(X_1, 0, 0)$，$(X_2, Y_2, 0)$，(X_3, Y_3, Z_3)．因为 $X=Y=Z=0$，所以它們实际上是 $(X_1, 0, 0)$，$(X_2, Y_2, 0)$，$(-X_1-X_2, -Y_2, 0)$，三个作用点，不妨取它們是$(x_2, 0, 0)$，$(x_2, 0, z_2)$，$(x_3, 0, z_3)$(因为 $(x, y, z)+ +\lambda(X, Y, Z)$ 都可以作为作用点)．由 $M_x=M_y=M_z=0$ 可知

$$(z_3-z_2)Y_2=(z_2-z_3)X_2-z_3X_1=(x_2-x_3)Y_2=0.$$

由于 $Y_2\neq 0$，故 $z_2=z_3=0$，$x_2=x_3$，卽得共点于 $(x_2, 0, 0)$ 的三力(如下图)．

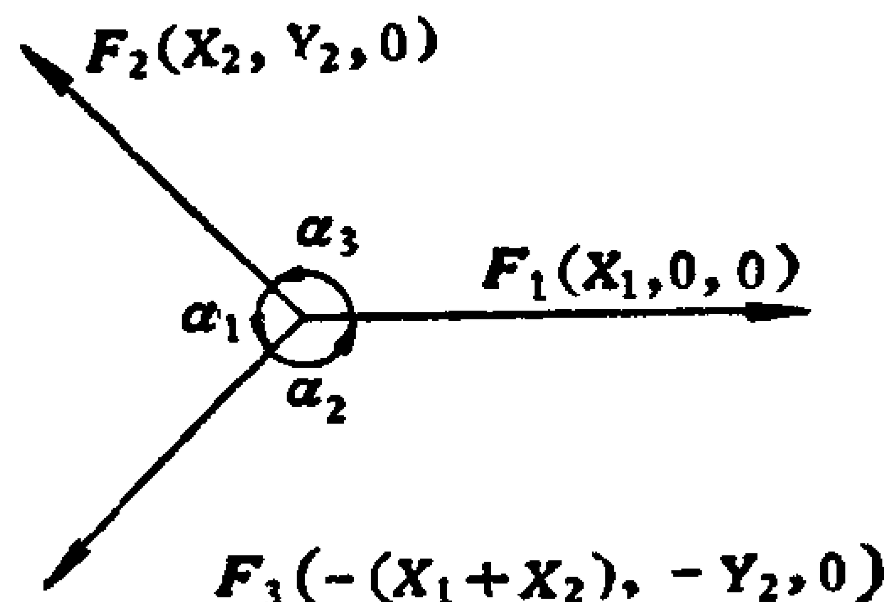


图 45

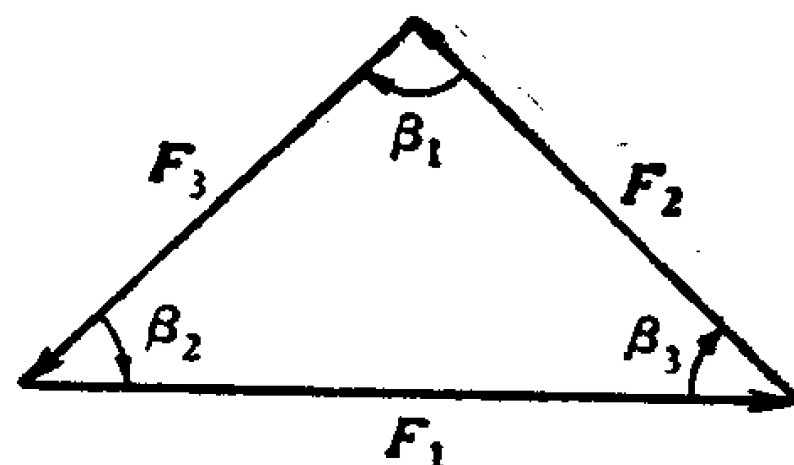


图 46

把 $\boldsymbol{F}_2$ 的起点移到 $\boldsymbol{F}_1$ 的終点，把 $\boldsymbol{F}_3$ 的起点移到 $\boldsymbol{F}_2$ 的終点，則易見 $\boldsymbol{F}_1$ 的起点是 $\boldsymbol{F}_3$ 的終点，成一三角形，边角关系有

$$\frac{|\boldsymbol{F}_1|}{\sin\beta_1}=\frac{|\boldsymbol{F}_2|}{\sin\beta_2}=\frac{|\boldsymbol{F}_3|}{\sin\beta_3}.$$

因此得出

$$\frac{|\boldsymbol{F}_1|}{\sin\alpha_1}=\frac{|\boldsymbol{F}_2|}{\sin\alpha_2}=\frac{|\boldsymbol{F}_3|}{\sin\alpha_3}.$$

3）約束力．

凡可以无限制地平行移动或者轉动的一个質点或者一个体，叫做自由点或自由体．如不能如此，則說它受有拘束，如算盘上的算珠就是有拘束的．約束的力学效应可以用一些被动性的力来代替，这些力叫做約束反作用；因此我們可以把不自由的刚体看作自由的

刚体，只要把它从約束中解脱出来而以約束的作用代替約束的效果。

約束公理： 可以把任何不自由的刚体从約束中解脱出来，只要以約束反作用代替約束的效果，而把該物体看成是在施与它的主动性的力和約束反作用力共同作用下的自由刚体。

在所有的情况下反作用的強度和方向的决定都依賴于作用于物体的主动性的力。

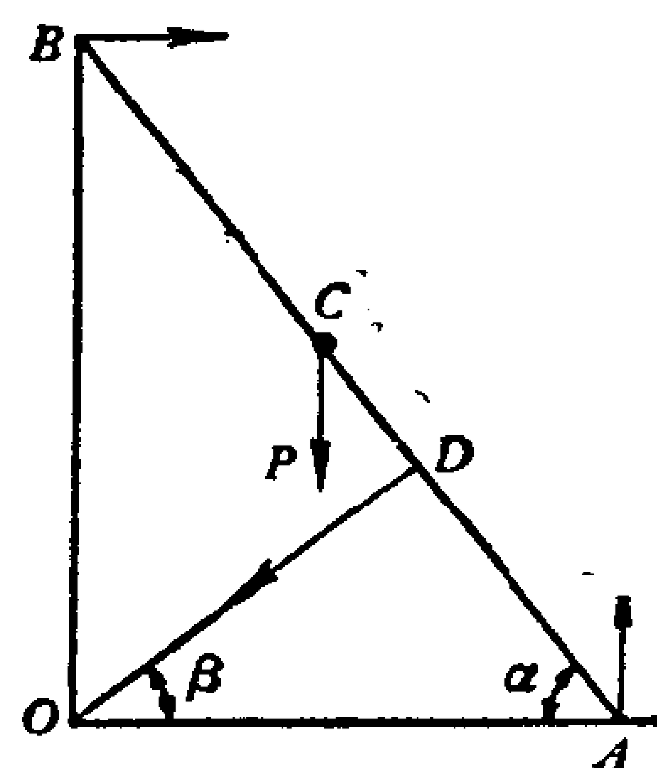


图 47

例．有一根重量是 P 的均匀杆子，两端 A 与 B 分別与水平的地板和鉛直的墙壁 Oy 接触．接触面間并无摩擦作用，杆上 D 点栓一根繩子，連在 O 点．已知杆长 $AB = 2l$，和地平面的交角是 α，繩和地面的交角是 β．試求繩的张力．

AB 的中点为 C，扣繩处命之为 D．三个限制可以如 A，B，D 处三个力表示它們，也就是加上这三个力之后連原来的重力便得一个自由体了．这四力的情形如下：

	起　点	矢　量	力　矩
A 点的力	$(2l\cos\alpha, 0)$	$(0, Y)$	$2lY\cos\alpha$
B 点的力	$(0, 2l\sin\alpha)$	$(X, 0)$	$-2lX\sin\alpha$
C 点的力	$(l\cos\alpha, l\sin\alpha)$	$(0, P)$	$lP\cos\alpha$
O 点的力	$(0, 0)$	$(\lambda\cos\beta, \lambda\sin\beta)$	0

由于平衡，最后两栏相加得 0，故

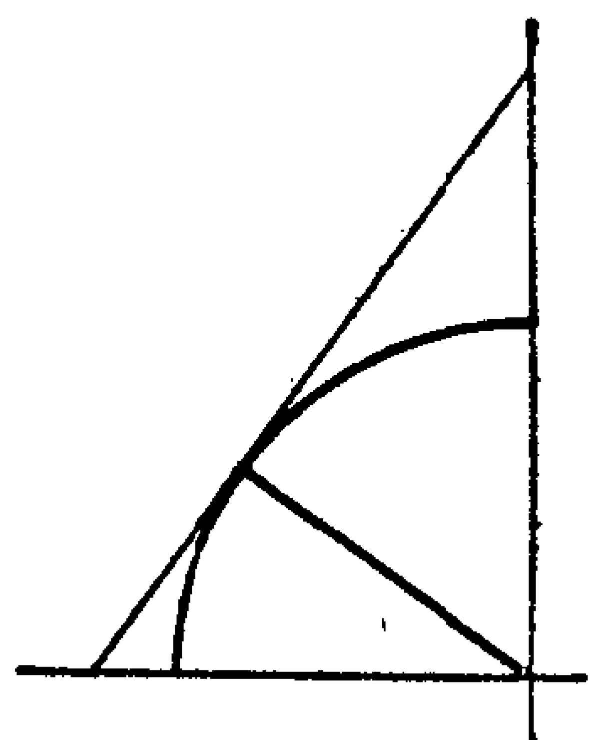
$$X = -\lambda\cos\beta, \quad Y = -P - \lambda\sin\beta,$$
$$2lY\cos\alpha - 2lX\sin\alpha + lP\cos\alpha = 0,$$

即得张力

$$\lambda = \frac{P\cos\alpha}{2\sin(\alpha-\beta)}.$$

若 D 在 C 下，則 $\alpha > \beta$．問題有解答．若 D 在 C 点，則张力无穷；換言之，繩索无法绷紧．若 D 在 C 上，张力为負．如要阻止滑动，我們不是用繩拉，而且应当用杆頂了．

A，B 二点之力也可算出．但在一般的情况中，反作用的力是不一定能够完全确定的．


图 48

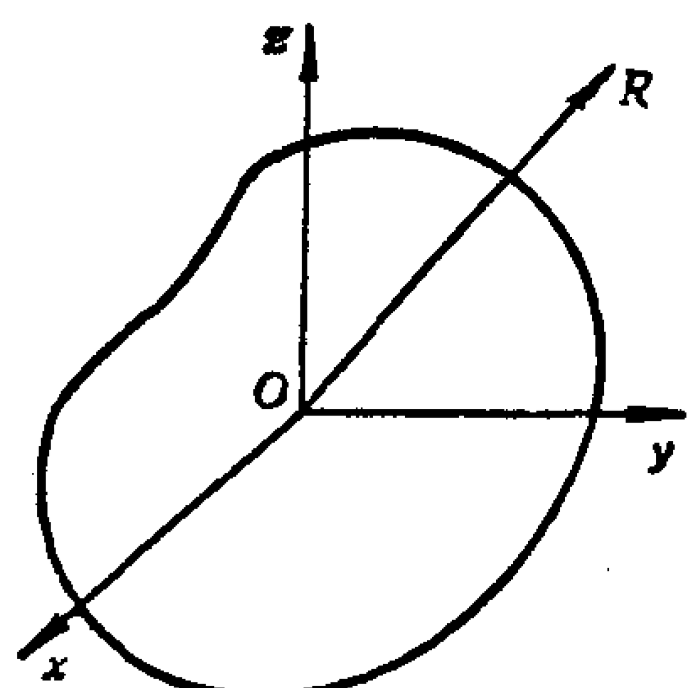


图 49

4）平衡条件．

我們也可以用約束力的性質来看出平衡所需的条件.

(1) 有一固定点的刚体的平衡条件.

不妨假定这点就是原点. 任何一个力系如果可以化为一个通过O点的力，则此力系一定使此物体平衡. 而一力通过O点的必要且充分条件是对O的力矩为0. 因此,有一固定点的刚体的平衡条件是这力系对这O点的合矩等于0.

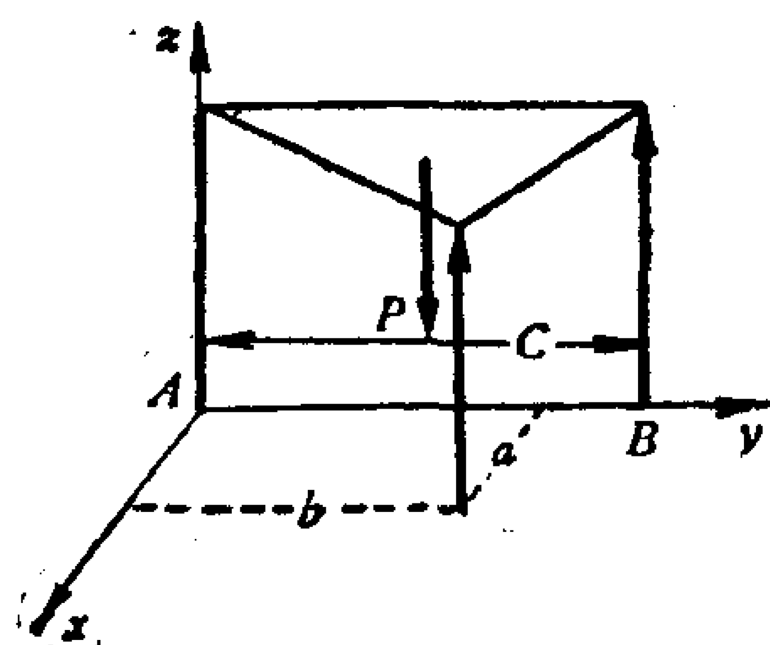


图 50

(2) 有一固定軸的刚体的平衡条件.

可以沿軸滑动,所以任何与軸相交且垂直的力是不能动搖这个刚体的. 取固定軸为x軸,直交于x軸的力的形状是

$$\text{起点}\ (x, 0, 0),\quad \text{矢量}\ (0, Y, Z).$$

一批这样力所成的力系有两个性質: $X=0$ 与 $M_x=0$. 这也就是一力系加于这刚体而平衡的条件.

(3) 軸上每一点都固定的刚体的平衡条件.

討論有二固定点的情况与此完全相同,所以我們可以用(1)来处理.

(4) 放在水平面的自由物体的平衡.

有一桌子,它的三条腿在A, B, C三点站在平面上. 諸力如下:

	起点	矢量	力矩
A点的力	$(0, 0, 0)$	$(0, 0, Z_1)$	$(0, 0, 0)$
B点的力	$(0, c, 0)$	$(0, 0, Z_2)$	$(cZ_2, 0, 0)$
C点的力	$(a, b, 0)$	$(0, 0, Z_3)$	$(bZ_3, -aZ_3, 0)$
	桌面重心	$(0, 0, P)$	$(*, *, 0)$

最后二栏加在一起,結果为0,我們可以唯一地算出 Z_1, Z_2, Z_3. 而沒有平衡条件,这就意味着,桌子总是平衡的.

假如在同样的情形下,取一个四脚桌子,則未知的反作用有四个,而方程只有三个,因此問題在靜力学上不确定.

第三章　函数与图形

§1. 变　　量

在自然現象中，我們經常遇到不同的量：如时間，长度，重量，温度等等．任一种量，按照不同的情况，有时取不同的数值，有时一成不变．前者称为变量，后者称为常量．

常量变量并不是絕对的，情况变了，常量可能轉化为变量，变量也可能轉化为常量；并且有的时候，如果变化微不足道并不影响我們的結論时，我們也可以把变量当作常量来处理．

在测量物体重量时，必須辨明是否在同一地点同一高度进行．在同一地点和高度某一物体的重量是常量，如果改变到不同地点或高度便成为变量．

某些量的变化往往依賴于另一些量的变化而定，后者称为自变量，前者称为因变量．关于自变因变之分也并不是絕对的．

以上所說的重量的变化是由于重力加速度改变而产生的，重力加速度的改变是由于地点（緯度）不同和高度不同，地球轉动的离心力和地球的吸引力不同的緣故．因之，緯度和高度是自变数，它們变了，重量也就跟着改变了．

变量有时可以毫无限制地取实数值．例如：时間 t 的变化可取任何实数值．有时要受某种限制，例如：温度的变化不能低于 -273℃．还有时只允許取自然数，例如：城市居民数，定体积气体內的分子数等．

适合于 $a \leqslant x \leqslant b$ 的全部实数称为一个閉区間，以 $[a, b]$ 表示；$a < x < b$ 称为开区間，記为 (a, b)；也可以有半开半閉的区間 $a \leqslant x < b$ 或 $a < x \leqslant b$，我們分別記为 $[a, b)$ 与 $(a, b]$．通常，变量是在某一区間內变化的．

我們有时用 $[a, +\infty)$ 表 x 在不小于 a 的范圍內变化，同法定义 (a, ∞)，$(-\infty, b]$ 与 $(-\infty, \infty)$．

§2. 函　　数

在实际問題中，变量时常不只一个，而是几个．例如：著名的 Boyle-Mariotte 定律是：在温度不变的情况下，理想气体的容积与压強成反比例．用 p 表压強，V 表体积，则有

$$pV = C \text{（常量）}.$$

当压強 p 定了，体积也就定了，所以 p 是自变量而 V 是因变量．但是我們也可以先有了体积而求出应有的压強 p．如此，则自变、因变的关系就反轉过来了．

常量 C 也是跟着客观情况而变的. 当温度变了 C 就变，物质换了 C 也变. 在摄氏 0° 时,对一千克空气来說，$C = 273 \times 29.27$. 而当温度是 T℃ 时，我們就有了 Clapeyron 关系式:

$$pV = 29.27(273 + T).$$

如此可以把 p, V, T 三个变量,任取其中的两个作为自变量,一个作为因变量.

另一方面,我們在应用 Boyle-Mariotte 公式时,还須注意这个公式的施用范围. 一般說来,从 1 个半大气压到 8 个大气压这公式是可以很好地表达眞实情况的. 但是在压強很大时,这一公式是有很大偏差的. 换一句話說，在写下 Boyle-Mariotte 公式时,最好注明公式的适用范围. 例如写一个 $1\frac{1}{2} \leqslant p \leqslant 8$ 来表明变数在此区間內变化. 在一定的温度下,我們有較精确的 van der Waals 公式

$$\left(p + \frac{a}{V^2}\right)(V - b) = \text{常数},$$

其中 a, b 是改正数. 这公式中当然也可以把 p 与 V 互相看为自变量、因变量. 但有一点必須指出的是当 p 做自变量的时候,V 可能有三个数值.

因变数就是函数,或称为自变数的函数. 因变数的值由自变数唯一决定的称为单值函数,非唯一决定的(如上所指 V 有三个数值)称为多值函数.

自变数的选取,有时是任意的,有时是为了方便. 但在大多数情况下,要以研究的目的为依据. 例如,在物理学上我們有气压公式 $p = p_0 e^{-kh}$, 此处 p_0 是在海平面时的大气压, k 是某一常数, h 为高度. 根据这公式, p 是 h 的函数. 但是当飞机师用压強来判断高度时,他就用 $h = \frac{1}{k}\log(p_0/p)$的公式.

§3. 隐 函 数

任一自然規律,給出一个現象和另一(或另一些)現象的关系,于是就建立一个量与量之間的函数关系. 因而也就把其他科学部門中从客观現象所提出的問題,轉化为数学問題.

如果某函数(就是因变数)可以由自变数通过数学演算来直接表达，則叫做显函数. 例如在定温下,用压強 p 作为自变数,气体容积 V 的表达式是

$$V = \frac{C}{p},$$

故 V 是 p 的显函数.

又如三角形的两边长是 a 与 b,夹角是 θ,則三角形的面积

$$A = \frac{1}{2}ab\sin\theta$$

是 a, b, θ 的显函数.

有时我們用

$$y = f(x)$$

来代表不很容易或不可能写出的函数关系. y 是自变数 x 的函数. f 表 y 对 x 的关系的符号,在考虑几种不同函数的时候,我們用不同的字母来表示对 x 的关系:

$$f(x), \quad F(x), \quad \varphi(x)$$

等等.

多变元的函数写成为

$$v = F(x, y, z, t).$$

这表示 v 是变数 x, y, z, t 的函数.

当 x, y, z, t 取特殊值 x_0, y_0, z_0, t_0 时, v 所得出的值称为函数在 $x = x_0$, $y = y_0$, $z = z_0$, $t = t_0$ 时的函数值. 例如, $A = \frac{1}{2} ab \sin\theta$,当 $a = 1$, $b = 2$, $\theta = 45^\circ$ 时函数 A 的数值是 $\frac{1}{\sqrt{2}}$.

若一个函数不是通过自变量直接表出, 而只有一个方程表示函数值和自变量的值的关系,就叫做隐函数. 例如,变量 y 与变量 x 适合方程

$$y^5 + xy + x^5 = 0,$$

则 y 是自变量 x 的隐函数. 另一方面, x 也是自变量 y 的隐函数,如 van der Waals 公式

$$\left(p + \frac{a}{V^2}\right)(V - b) = \text{常数},$$

V 就是 p 的隐函数.

实际上,显函数和隐函数并沒有多大界限,有时可以从隐函数解出显函数来. 但是,一般講来,解一个方程并不容易,因而发生了一些用隐函数(也就是不解方程)直接处理問題的研究.

上面所講到的是自变量与因变量均取实数值的情况. 在数学及其各方面的应用中,經常会遇到另外两种重要类型的函数,即自变量取实数,因变量(即函数)取复值的情况与自变量、因变量都取复值的情况. 前者将函数值分为虚、实两部分,实际上,就相当于一个实变数的两个实函数. 后者把自变数 $z = x + yi$ 的虚实部分看成两个自变数, 而函数就变为两个自变数 x, y 的两个函数了. 例如, $w = z^2$, 可以写成为 $w = u + iv$, $z = x + yi$, 则

$$u = x^2 - y^2, \quad v = 2xy,$$

即 u, v 是二自变量 x, y 的函数了.

今后在很长一个时期,我們将討論实变数的实函数. 許多結果都极易推到实变数的复函数的情况. 至于复变数的复函数的情况, 有不少特殊的內容,将在本书第二卷中討論.

§4. 函数的图表法

設 $y = f(x)$ 是自变数 x 的函数 (或者隐函数形式 $F(x, y) = 0$). 我們用 x 軸表

自变数，用 y 軸表函数値，則对应于一个 x 的值，有 y 的对应数值．这样的 $(x, y) = (x, f(x))$ 就成为平面上的点，当 x 变化时，就在平面上画出了曲綫．这曲綫就被称为函数 $y = f(x)$ 的曲綫．曲綫上的坐标都满足于方程，反之，凡是满足于方程的数值 (x, y) 都在这曲綫上．

在描繪曲綫的时候，我們应当选择适当的尺度．x, y 的尺度可以选择得不一样，使不至于把图画得太长太扁或画出紙外．

这种方法——沟通代数与几何的方法，建立起代数与几何的紧密联系．一方面，可能由几何軌迹来表示分析的关系，来看出变化的情况；另一方面，也可能由代数演算来求几何问题的解答．这就是 Descartes 首創的解析几何．

在实际情况中，往往是从实驗中先得出一批数值，再把这些数值画在方格紙上，然后研究能否归納成为一个方程．这样的方程称为經驗公式．得到了經驗公式之后，一方面是从理論上找根据，另一方面是再到实驗中去考驗这公式，看它能不能符合客观事实．

例如，我們先做一个实驗，取 8 [升] 气体，其压強是 $p = \frac{1}{2}$ [气压]，其温度一定．我們改变压強使它經过一組数值，例如 $p = \frac{1}{2}, 1, \frac{4}{3}, 2, \cdots$，幷量出相对应的气体的体积 V，列成下表

气 压 p	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{4}{3}$	2	4	8
体 积 V	8	4	3	2	1	$\frac{1}{2}$

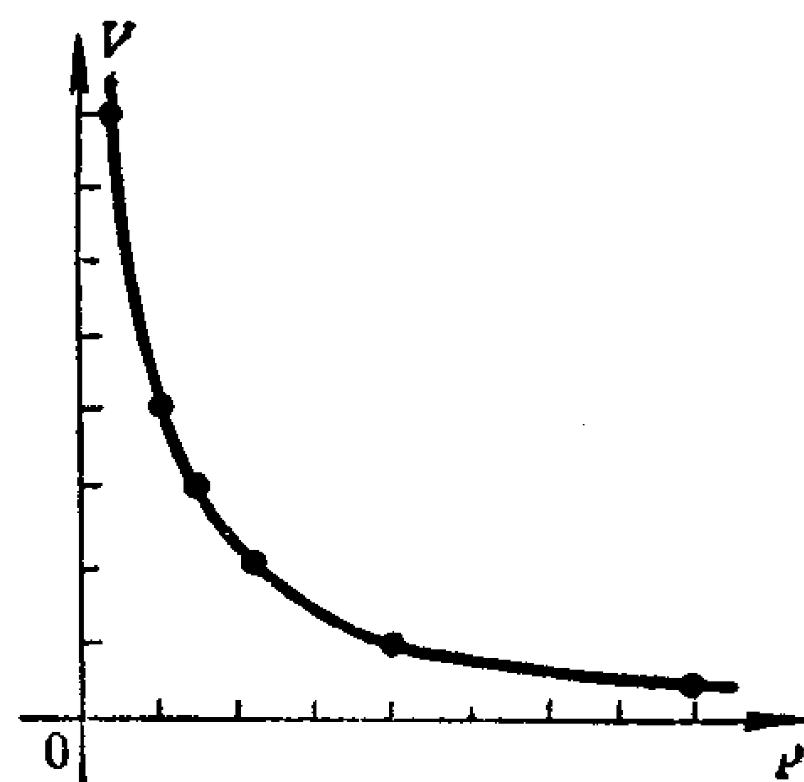


图 51

因而归納出 Boyle-Mariotte 定律

$$pV = \text{常量}.$$

把这一公式在实驗中考驗．在高压时，找到了不符合事实的情况，因而有 van der Waals 的改进公式．

§ 5. 几个初等函数

1) 冪函数． 我們现在来研究函数

$$y = ax^n,$$

此处 a 与 n 都是常数．这一函数称为冪函数．

我們作 $a = 1$ 及 x 取正值的图形．无論 n 取什么值，$x = 1$ 时，$y = x^n = 1$．所以，所有的曲綫都經过 $(1, 1)$．当 n 取正値而 $x > 1$ 时，則 n 愈大曲綫上升愈快(图 52)．当 n 取負値时，$y = x^n$ 相当于分式，例如，$y = x^{-2} = \frac{1}{x^2}$，当 x 增加时，y 要減小．这些曲綫叫做多态曲綫，热力学中常遇到它們(图 53)．

其中 $n = 1$ 及 $n = 0$ 是两条直綫：$y = x$ 及 $y = 1$．又 $x = 1$ 也可以看成为 n 趋向无穷时多态曲綫族的极限綫．

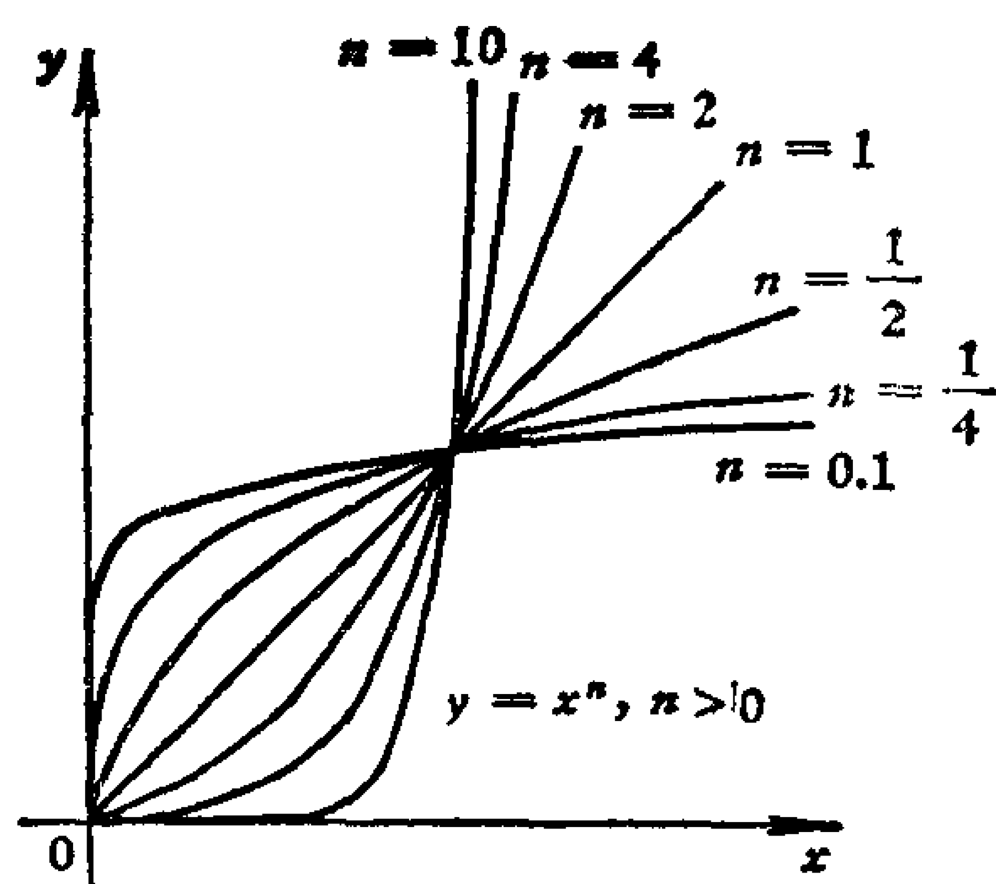


图 52

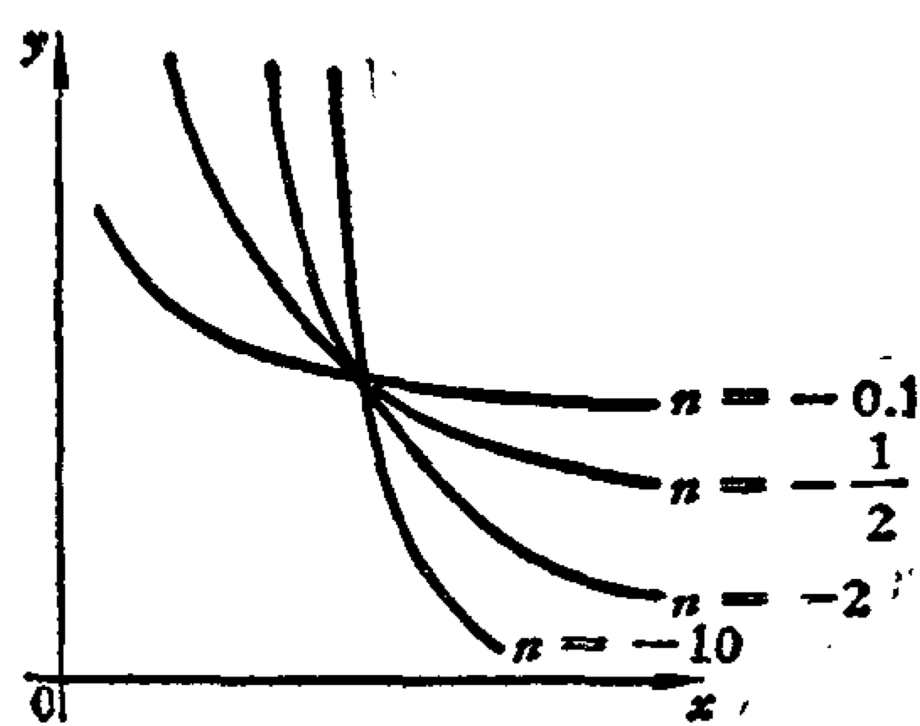


图 53

2）指数函数．函数

$$y = a^x \quad (a > 0)$$

称为指数函数． 如果 $a > 1$,则当 x 朝正方向趋向无限时，y 无限增大,而当 x 朝負方向趋向无限时，y 趋向 0． 当 $a < 1$ 时,情况与此相反． $a = 1$ 时,得直綫 $y = 1$． 指数函数的图形如下,注意曲綫必定过 (0，1) 点：

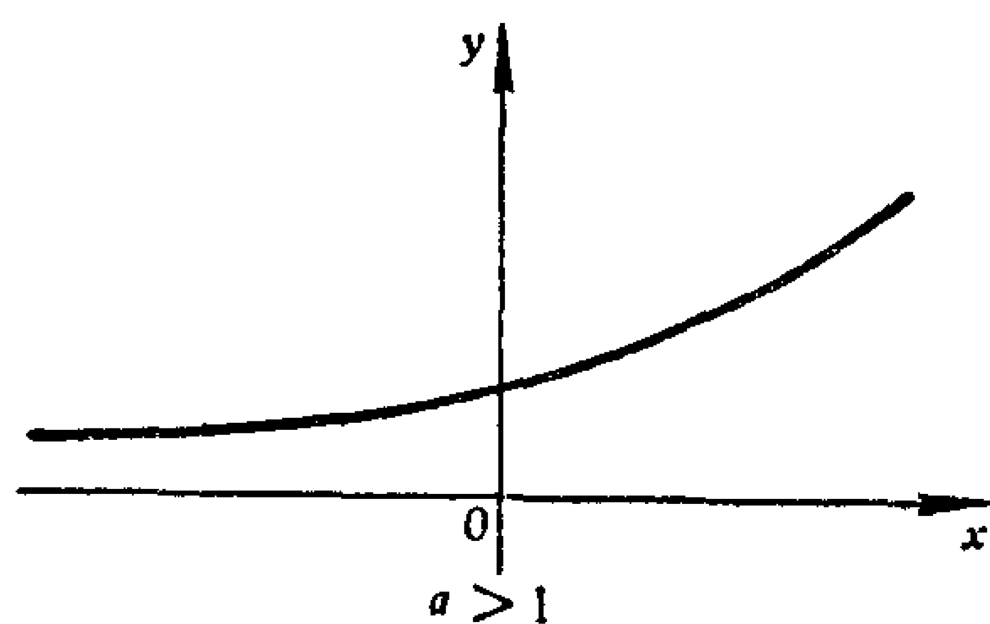


图 54(1)

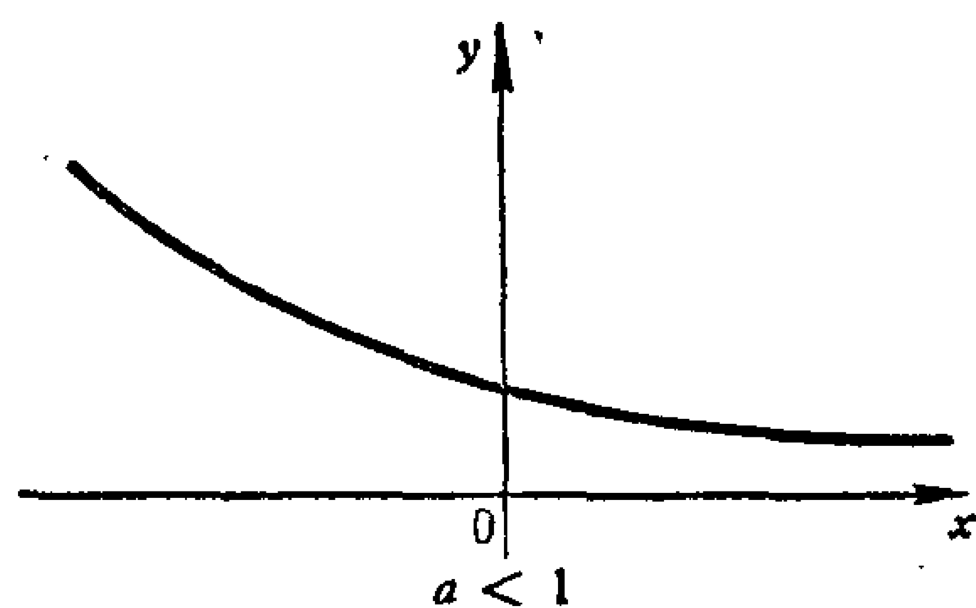


图 54(2)

3）三角函数．六个三角函数

$$y = \sin x, \quad \cos x, \quad \operatorname{tg} x, \quad \operatorname{ctg} x, \quad \sec x, \quad \csc x$$

都是所謂的周期函数,其中自变数我們用弧度来表达．角度与弧度的关系是：角度是把整个的圓周角分为 360°，而弧度是以单位圓周上的弧长来度量角的大小的．单位圓的周长是 2π,我們就以 2π 来代表 360°，π 代表平角 180°，$\frac{\pi}{2}$ 代表直角 90°．

图 55 是正弦函数 $y = \sin x$ 的图形，这图形显然有 $\sin(x + 2\pi) = \sin x$，2π 称为周期．換言之，$\sin x$ 的数值經过 2π 之后周而复始．

由 $\cos x = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$ 可知，把函数 $y = \sin x$ 的图形順着 x 軸左移 $\frac{\pi}{2}$ 就得到余弦 $y = \cos x$ 图形(图 56)．

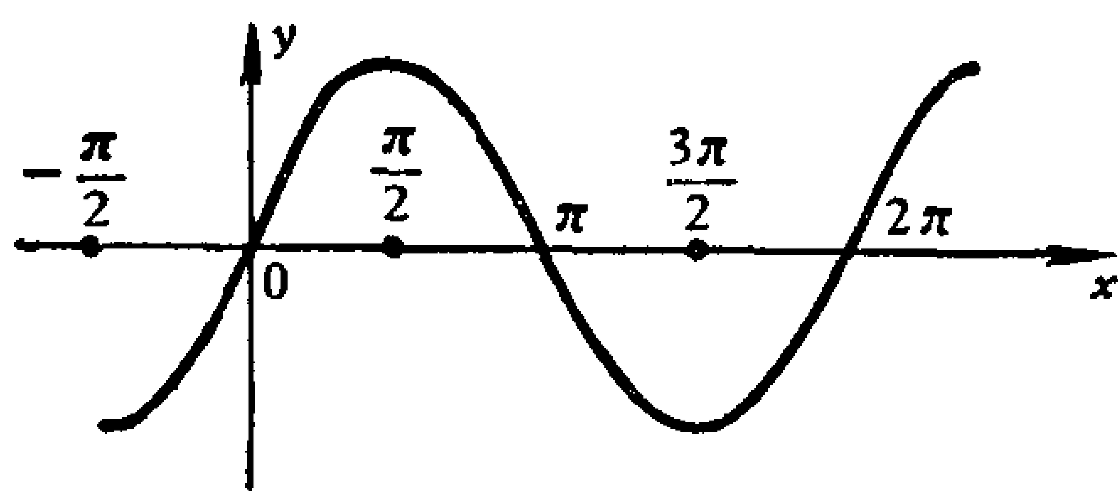


图 55

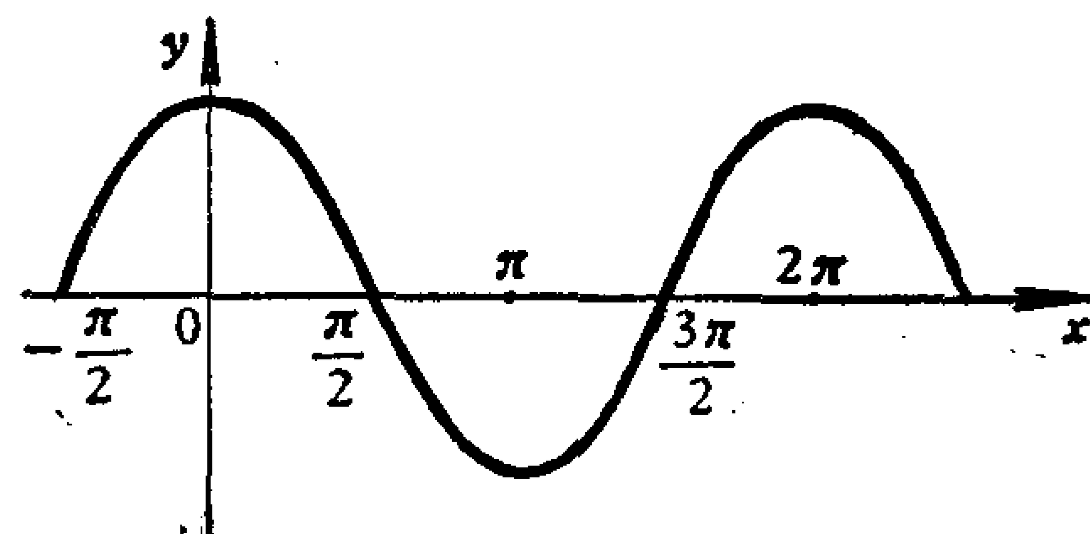


图 56

正切 $y = \operatorname{tg} x$ 的图形,是由一串全同的互相分离的无穷支綫所組成的. 每条支綫的寬度是 π,换言之,正切是以 π 为周期的函数(图 57).

由 $y = \operatorname{ctg} x = -\operatorname{tg}\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$ 可知,余切的图形可由正切的图形沿 x 軸平移 $\frac{\pi}{2}$,且以 x 軸为鏡子反射而得(图 58).

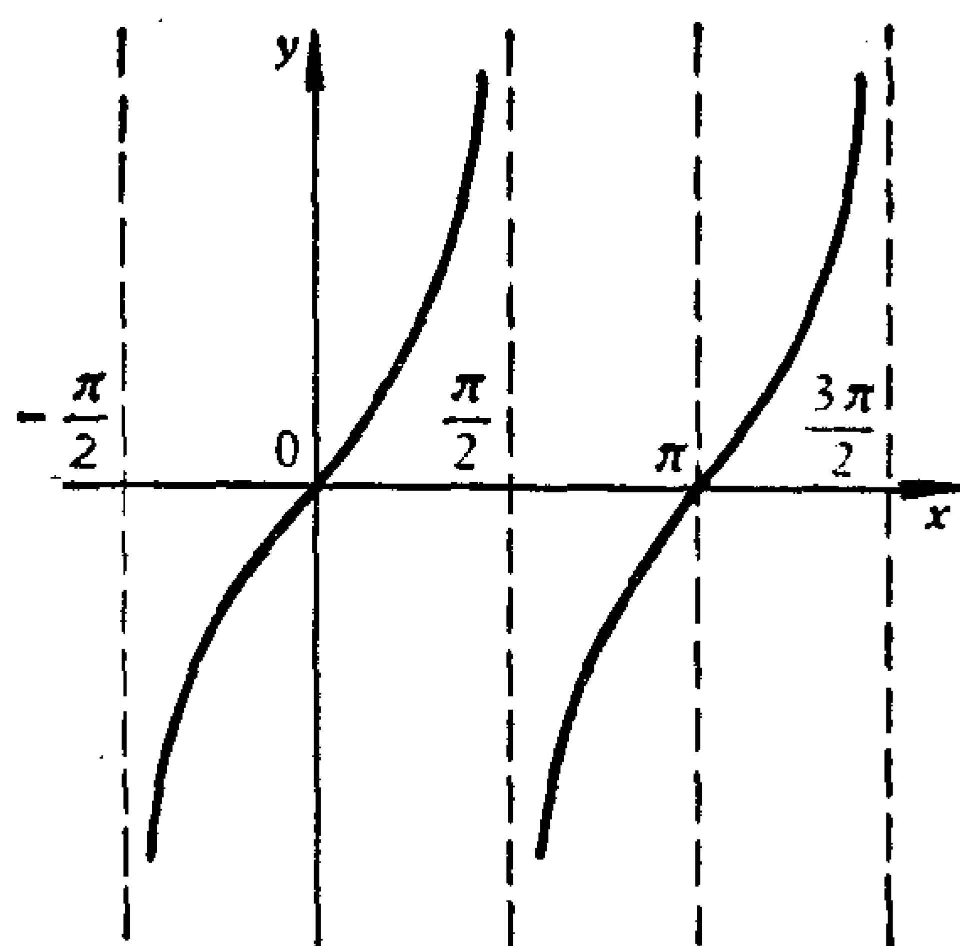


图 57

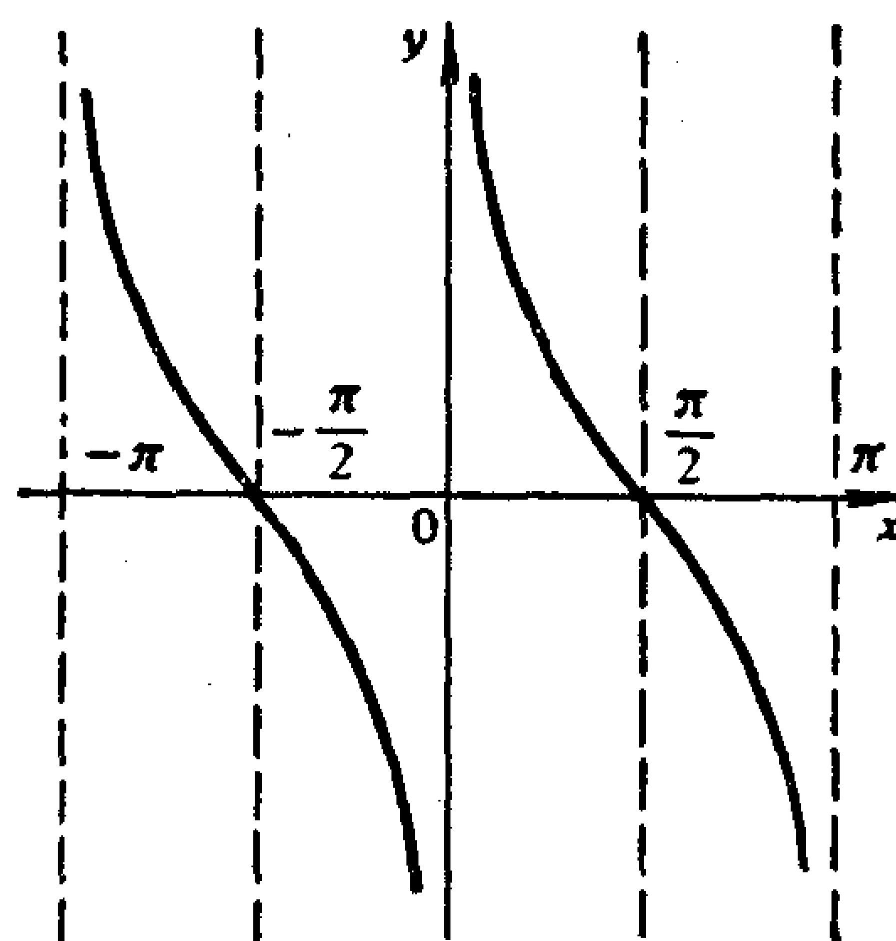


图 58

图 59 是正割 $y = \sec x = \frac{1}{\cos x}$ 的图形.

余割 $y = \csc x = \sec\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$ 可由正割經平移而得(图 60).

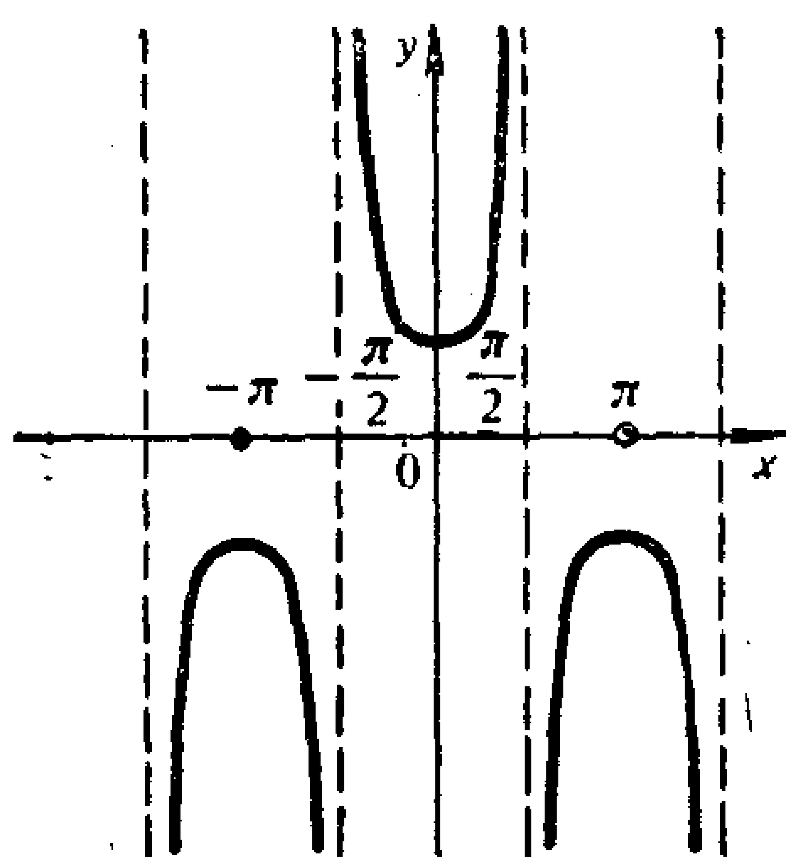


图 59

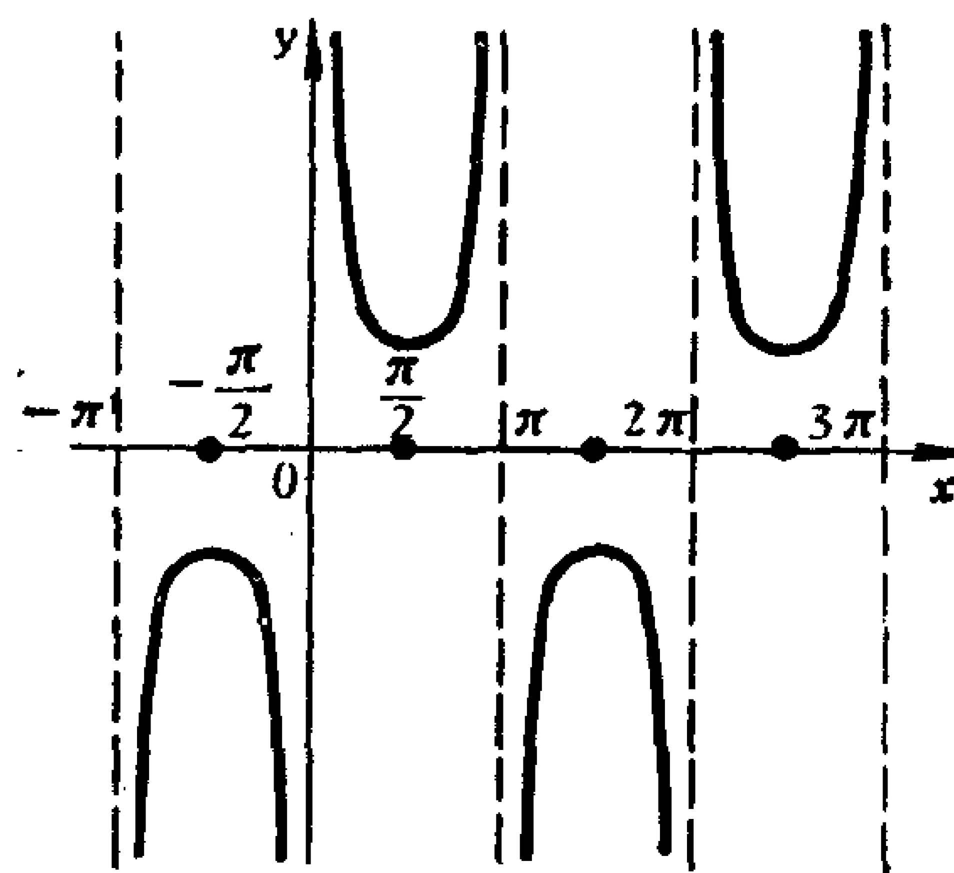


图 60

4) 反函数. 函数 $y = f(x)$ 是以 x 作为自变数, y 是因变数, y 是 x 的函数 $f(x)$. 反之, x 也可以看成为 y 的函数,这样的函数称为原函数的反函数.

例 1. $y = \frac{ax + b}{cx + d}$, $ad - bc \neq 0$,它的反函数就是 $x = \frac{dy - b}{a - cy}$.

例 2. $y = x^2$ 的反函数 $x = y^{\frac{1}{2}}$ 或 $x = -y^{\frac{1}{2}}$(見图 61).

指数函数的反函数称为对数函数,表为 $y = \log_a x$. 它的图形如图 62.

一般說来,把原函数图形从紙背面看,把 x 軸与 y 軸互换就得反函数的图形了.

三角函数

$$\sin x,\quad \cos x,\quad \operatorname{tg} x,\quad \operatorname{ctg} x,\quad \sec x,\quad \csc x$$

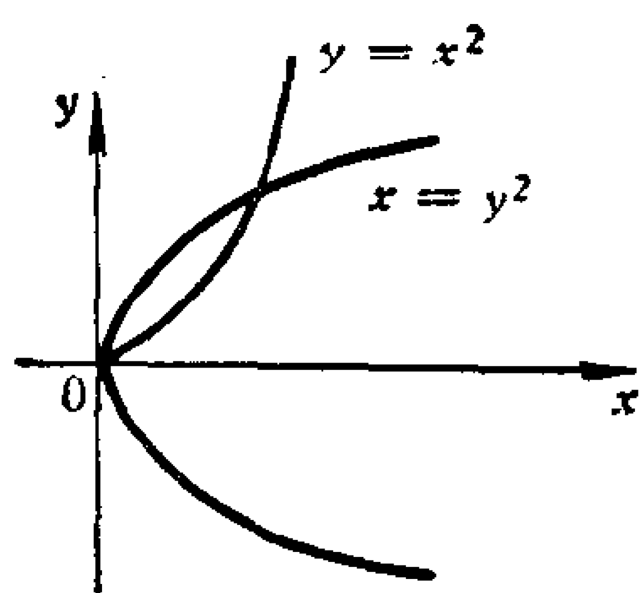


图 61

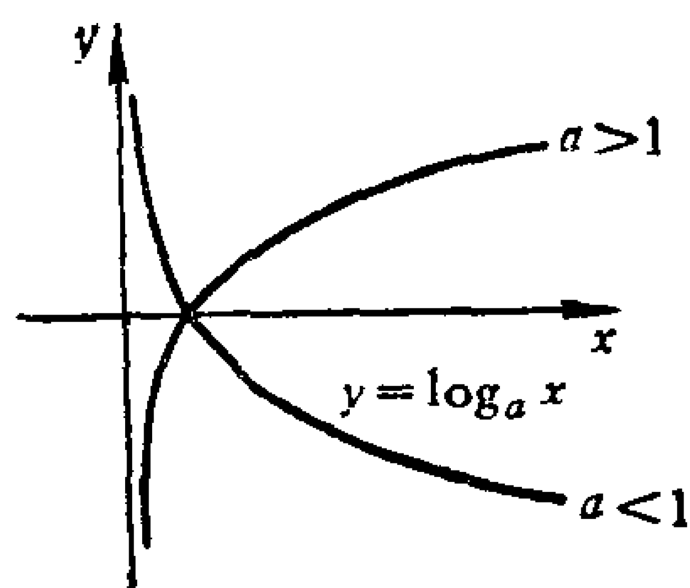


图 62

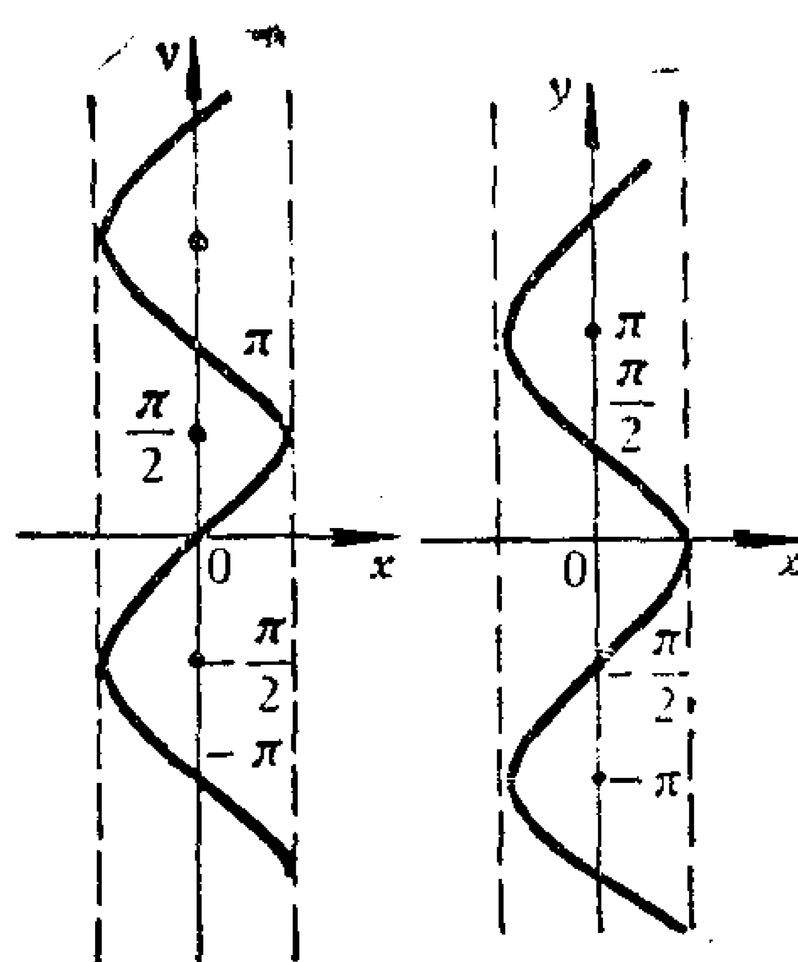


图 63

的反函数記作为

$$\sin^{-1} x,\quad \cos^{-1} x,\quad \mathrm{tg}^{-1} x,\quad \mathrm{ctg}^{-1} x,\quad \sec^{-1} x,\quad \csc^{-1} x.$$

或称 $\arcsin x$ 等等.

我們仅解释一下函数 $\sin^{-1} x$（图 63）. 它的图形在 $-1 \leqslant x \leqslant 1$ 之間,給与 x 一个值, y 有无穷多个値,因而是一个多値函数. 当我們画出了 $-\frac{\pi}{2} \leqslant y \leqslant \frac{\pi}{2}$ 的部分,其他部分就显然可以得出了.

以下把 $\cos^{-1} x$（图 63）, $\mathrm{tg}^{-1} x$, $\mathrm{ctg}^{-1} x$（图 64）, $\sec^{-1} x$, $\csc^{-1} x$（图 65）的图画出.

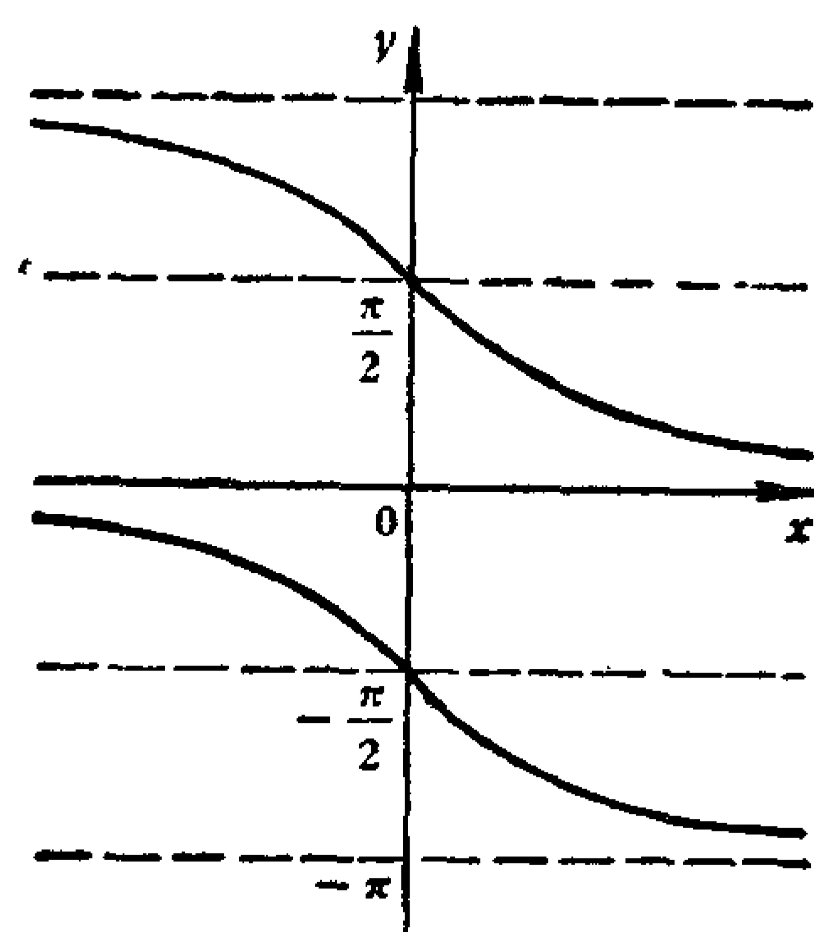


图 64(1)

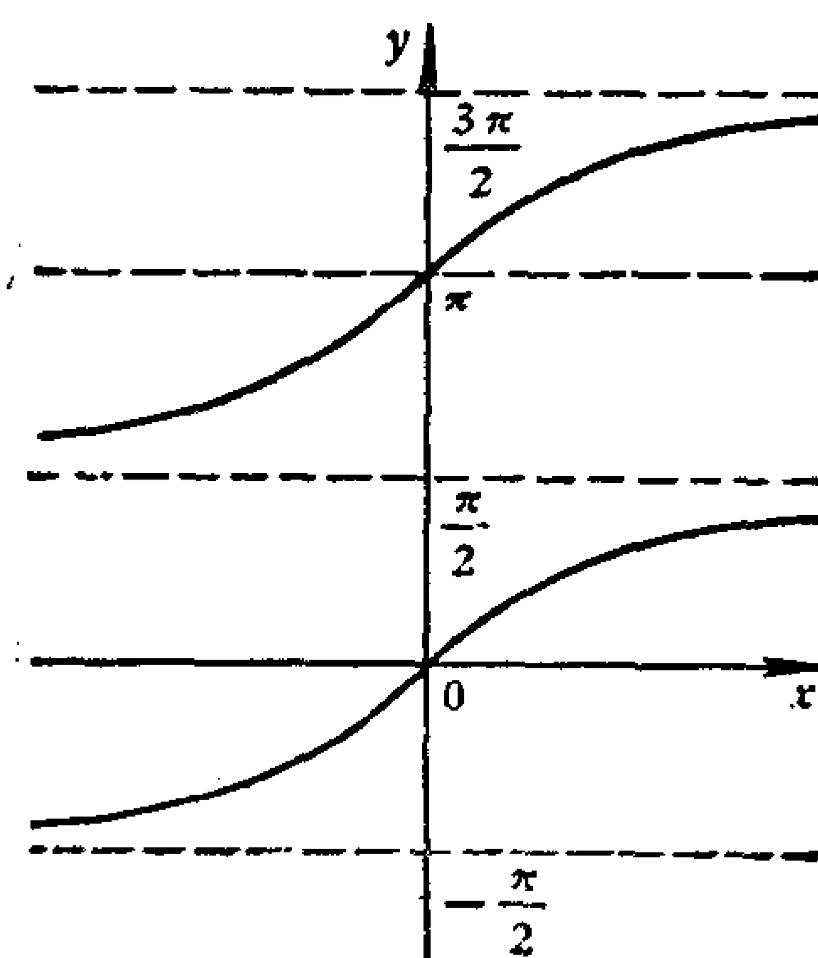


图 64(2)

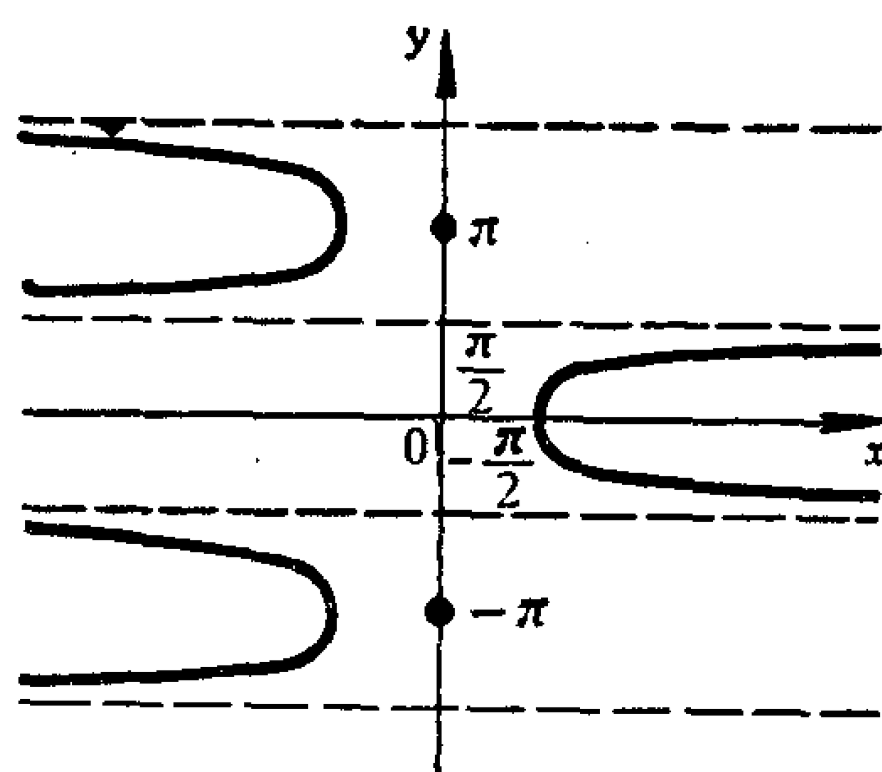


图 65(1)

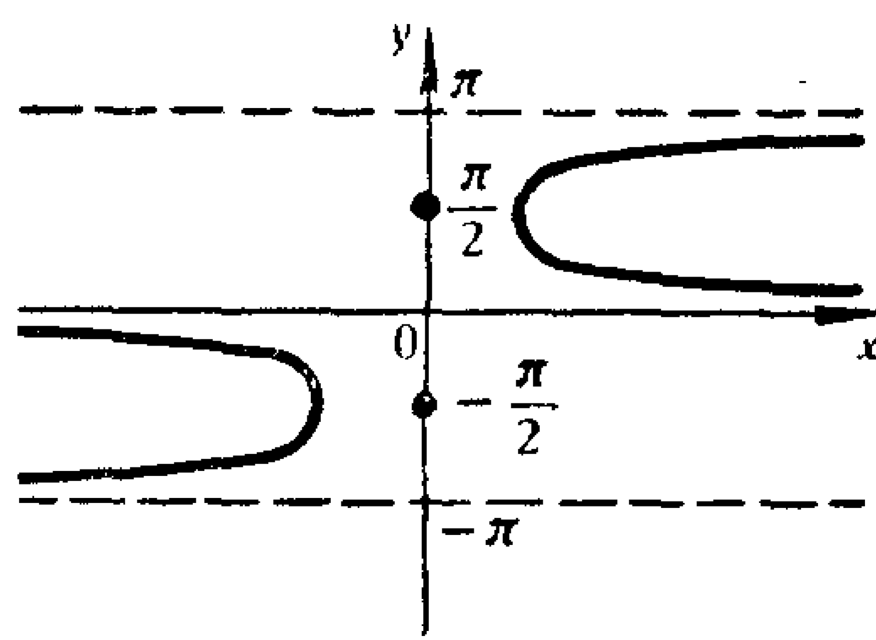


图 65(2)

§ 6. 函数的一些簡单特性

在以上所研究的函数中,已經可以看到函数的一些簡单特性.

奇函数 $y=f(x)$ 是适合于 $f(-x)=-f(x)$ 的函数．也就是說，画出图来是关于中心对称的．

例如，$y=x^3$，$y=\sin x$，$y=\operatorname{tg} x$ 等等．

偶函数 $y=f(x)$ 是适合于 $f(-x)=f(x)$ 的函数．也就是說，画出图来是关于 y 軸对称的．

例如，$y=x^2$，$y=\cos x$ 等．

不难証明，一多項式是奇函数的条件是它的每一項的次数都是奇数，而为偶函数的条件是它的每一項的次数都是偶数．

除 0 以外，沒有旣是奇又是偶的函数存在．

又任一函数 $f(x)$ 都可以分解成为两部分，一部分是奇的，一部分是偶的．也就是

$$f(x)=\frac{1}{2}(f(x)-f(-x))+\frac{1}{2}(f(x)+f(-x)).$$

增函数． 在区間 $[a, b]$ 中，如果当 $x>x'$ 时 $f(x)\geqslant f(x')$ 則称 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 中为增函数，或称单調增函数．同法定义減函数．单調增、单調減的函数統称为单調函数．

例如，在 $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ 內 $\sin x$ 是增函数．但在 $\left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$ 內 $\sin x$ 就变为減函数了．

当 $x>0$ 时 x^2 是增函数，而当 $x<0$ 时 x^2 是減函数．

由增到減可能出現峯頂称为极大值．由減到增可以出現谷底称为极小值．

連續性与間断性． 由 $y=\sin x$，$y=x^2$ 等图形上可以看出一个性质，就是就图形来說它是一条不断头的連續曲綫．在 $y=\operatorname{tg} x$ 中就有另一特性出現，在 $-\frac{\pi}{2}$ 与 $\frac{\pi}{2}$ 之間是連續的，但是在 $x=\frac{\pi}{2}$ 这一点，这曲綫变为无穷．但这函数在 $\frac{\pi}{2}$ 的左边愈近于 $\frac{\pi}{2}$，$\operatorname{tg} x$ 的值愈大；而在 $\frac{\pi}{2}$ 的右边愈近于 $\frac{\pi}{2}$，$\operatorname{tg} x$ 的值愈小．这一現象是間断点的一种．現在再举几个間断性的例子．

例 1．命 $[x]$ 表 x 的整数部分或最大的整数 $\leqslant x$ 者．这函数在所有的整数点是間断的，在其他点是連續的（图 66）．

例 2．函数

$$x-[x]-\frac{1}{2}$$

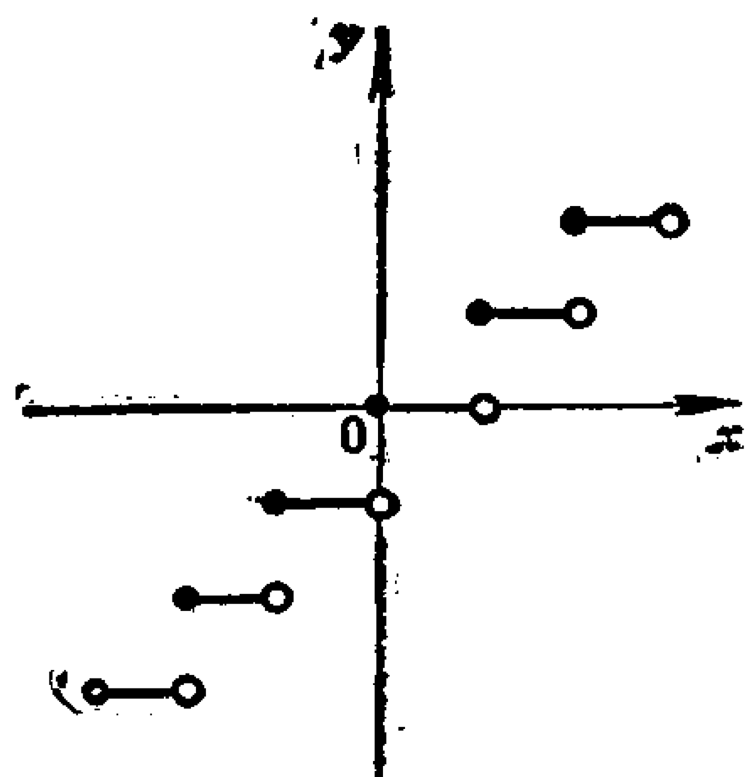


图 66

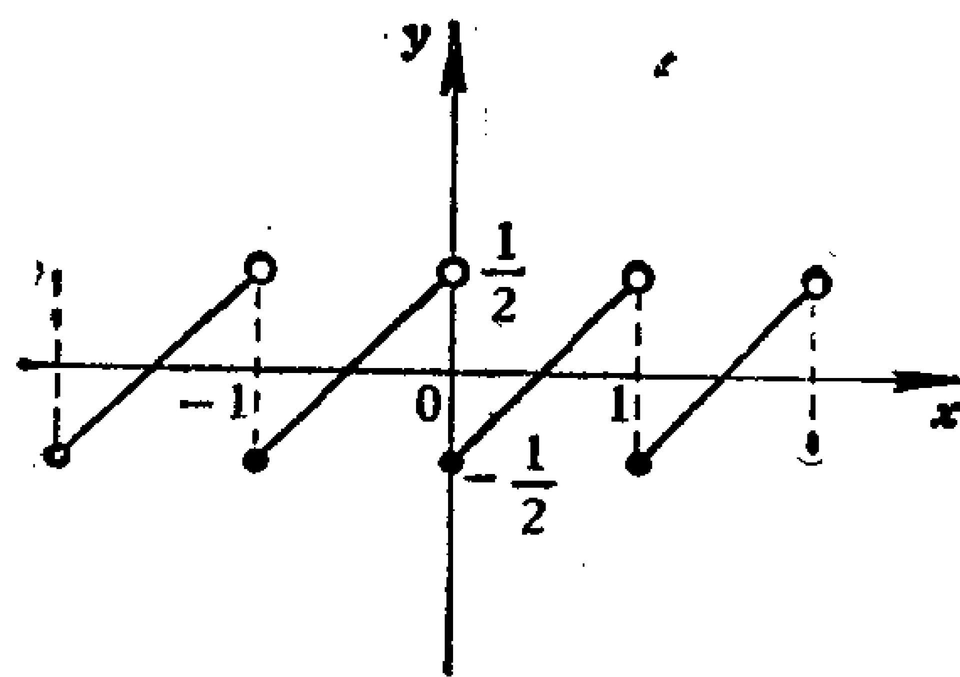


图 67

是一个在整数点不連續的函数,并且以 1 为周期. 它还是奇函数(图 67).

§7. 周 期 函 数

上节所討論的三角函数都滿足下述性質:

$$\sin(x+2\pi)=\sin x,\quad \cos(x+2\pi)=\cos x,\quad \operatorname{tg}(x+2\pi)=\operatorname{tg} x.$$

这样的函数称为以 2π 为周期的函数. 更一般些,有以下的

定义. 如果有一实数 $\omega\neq 0$,使对任意 x 常有

$$f(x+\omega)=f(x),$$

則 $f(x)$ 称为以 ω 为周期的函数.

不难看出, 如果 $f(x)$ 与 $g(x)$ 都是以 ω 为周期的函数, 則它們的和、差、积、商(除去分母为 0 的諸点外)仍然是以 ω 为周期的函数.

定理 1. 多項式不能是周期函数.

証. 一次式 $ax+b$ $(a\neq 0)$ 不是周期函数. 如属不然, 它有一周期 $\omega(\neq 0)$, 則

$$a(x+\omega)+b=ax+b.$$

这是不可能的.

現在对多項式的次数行归納法. 如果 $f(x)$ 是 n 次多項式,而且以 ω 为周期,則

$$f(x+\omega)-f(x)$$

是一个 $(n-1)$ 次的多項式,它仍以 ω 为周期. 这是不可能的,所以定理眞确.

一个函数是否能有两个周期,換言之,能否有两个实数 ω 与 ω',使

$$f(x+\omega)=f(x),\quad f(x+\omega')=f(x). \tag{1}$$

我們現在分两种情况来討論:

1) ω/ω' 是有理数 p/q. 假定 p/q 是旣約分数. 已知有二整数 r, t 使

$$pr-qt=1.$$

命 $\tau=\omega/p=\omega'/q$. 由(1)推得

$$f(x+r\omega-t\omega')=f(x),$$

而

$$r\omega-t\omega'=\left(\frac{pr}{q}-t\right)\omega'=\frac{\omega'}{q}=\tau,$$

卽 $f(x)$ 以 τ 为周期. 如果 $f(x)$ 以 τ 为周期,則

$$f(x+\omega)=f(x+p\tau)=f(x),\quad f(x+\omega')=f(x+q\tau)=f(x),$$

自然而然地 $f(x)$ 以 ω, ω' 为周期了.

2) ω/ω' 是无理数. 由第一章 §13 可知,有二整数 p, q 使

$$\left|\frac{\omega}{\omega'}-\frac{p}{q}\right|<\frac{1}{q^2},$$

卽

$$\left|\frac{q\omega-p\omega'}{\omega'}\right|<\frac{1}{q}.$$

所以給了任意小的 $\varepsilon(>0)$，我們常能找到 q 与 p 使

$$|q\omega - p\omega'| < \varepsilon,$$

而 $\tau = q\omega - p\omega'$ 也为一周期. 換言之，如果 $f(x)$ 有比例为无理数的二个周期，則它有任意小的周期.

例如，定义

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{如果 } x \text{ 是有理数,} \\ 1, & \text{如果 } x \text{ 是无理数.} \end{cases}$$

这个函数以任意的有理数为周期.

§8. 复变数函数表示举例

命 $z = x + iy$, $w = u + iv$，現在討論

$$w = f(z),$$

式中的 z 是平面 (x, y) 上的一点. 我們不可能在一个平面上来表达这一关系. 但是我們可以用两个平面上的相互关系来表达这一函数. 例如，在 (x, y) 平面上画平行于 x 軸，y 軸的直綫时，(u, v) 平面上对应的图形怎样，或者在 (u, v) 平面上画平行于 u 軸，v 軸的直綫时，(x, y) 平面上对应的是怎样的曲綫. 我們并不准备深入討論这一問題，仅举一个简单的例子：

命 $w = z^2$，即得

$$u = x^2 - y^2, \quad v = 2xy.$$

当 $x = x_0$ 固定时，

$$u = x_0^2 - \left(\frac{v}{2x_0}\right)^2$$

是一抛物綫，即当在 (x, y) 平面上画綫 $x = x_0$ 时，在 (u, v) 平面上得出一条抛物綫. 而当画直綫 $y = y_0$ 时，(u, v) 平面上画抛物綫 $u = \left(\frac{v}{2y_0}\right)^2 - y_0^2$.

又当 $u = u_0$ 时，(x, y) 平面上画双曲綫 $x^2 - y^2 = u_0$，而当 $v = v_0$ 时，則 (x, y) 平面上画双曲綫 $xy = \frac{v_0}{2}$.

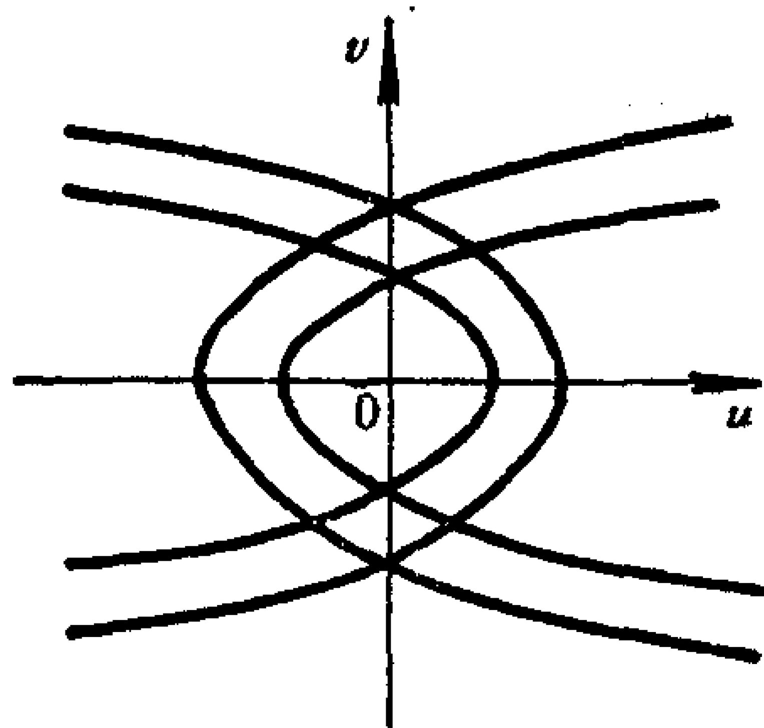


图 68

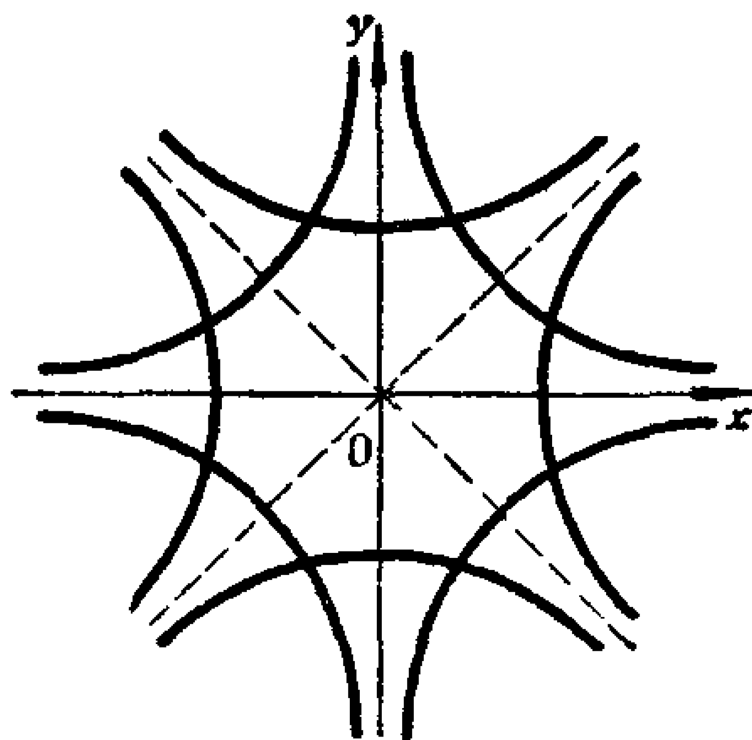


图 69

§9. 迴归直綫

自变量与因变量間最簡单的关系为綫性关系，即表示自变量与因变量成比例的性质．由試験的記录，在图紙上得到一系列的点；为了研究一个綫性的函数关系，我們希望得到一个近似的經驗公式，就要作一条直綫．若沒有一条直綫过全部作出的点，则只好作一条直綫，使在它两側的点都离它充分近．但什么叫做充分近？得有个标准才合适！

对于不很精确的研究，往往采用"紧繩"法，就是用一条繩子拉直了試着比，使两边的点的数目相等．作好直綫之后，再直接量一量，就可确定它的方程：

$$y = ax + b.$$

这就是經驗公式，

例如，給出数据

x	0.212	0.451	0.530	0.708	0.901	1.120	1.341	1.520	1.738	1.871
y	3.721	3.779	3.870	3.910	4.009	4.089	4.150	4.201	4.269	4.350

得到經驗公式

$$y \approx 0.375x + 3.65 \text{（}\approx \text{表示近似相等）}.$$

下面我們来介紹統計学中常用的迴归直綫．

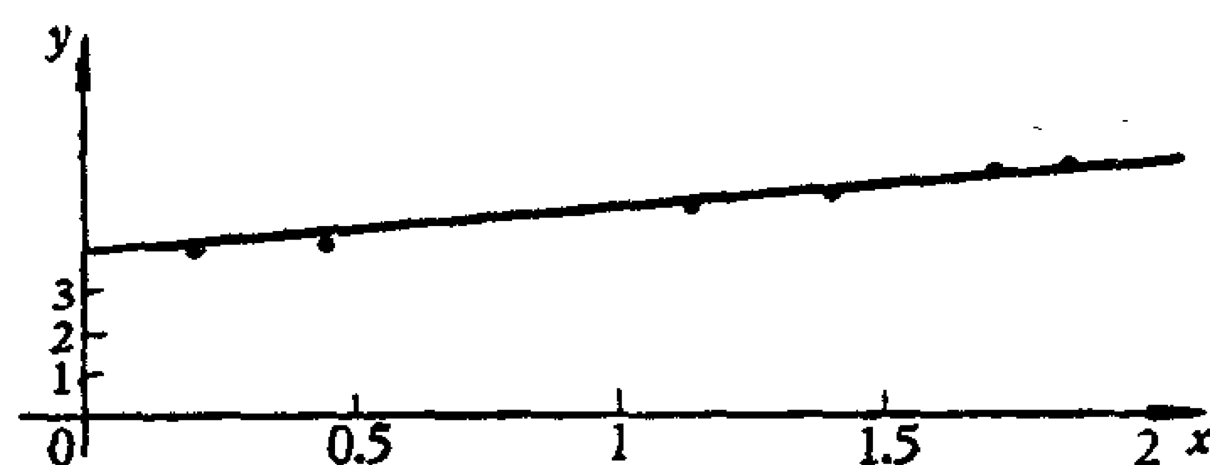


图 70

从实験中得到自变量 x 与因变量 y 的一組数据：

$$x: \quad x_1, x_2, \cdots, x_n,$$

$$y: \quad y_1, y_2, \cdots, y_n,$$

求直綫

$$y = a + bx,$$

使均方差

$$Q(a, b) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(y_i - a - bx_i)^2$$

达到最小．

将 $Q(a, b)$ 展开，并凑平方，得

$$Q = \frac{1}{n}\left[\sum_{i=1}^{n} y_i^2 + b^2\sum_{i=1}^{n} x_i^2 + na^2 - 2b\sum_{i=1}^{n} x_iy_i + 2ab\sum_{i=1}^{n} x_i - 2a\sum_{i=1}^{n} y_i\right] =$$

$$= \left(a + \frac{b}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} y_i\right)^2 + \frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2\right)b^2 +$$

$$+ \frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{n} y_i^2 - \frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{n} y_i\right)^2\right) - \frac{2b}{n}\left(\sum_{i=1}^{n} x_iy_i - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i\sum_{i=1}^{n} y_i\right) =$$

$$= (a + b\bar{x} - \bar{y})^2 + \sigma_x^2 b^2 + \sigma_y^2 - 2b\sigma_{xy} = (a + b\bar{x} - \bar{y})^2 +$$

$$+ \sigma_x^2\left(b - \frac{\sigma_{xy}}{\sigma_x^2}\right)^2 + \sigma_y^2 - \frac{\sigma_{xy}^2}{\sigma_x^2},$$

此处

$$\bar{x}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i,\quad \bar{y}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}y_i,$$

$$\sigma_x=\sqrt{\frac{1}{n}\left[\sum_{i=1}^{n}x_i^2-\frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{n}x_i\right)^2\right]}=\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2}{n}},$$

$$\sigma_y=\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(y_i-\bar{y})^2}{n}},$$

$$\sigma_{xy}=\frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{n}x_iy_i-\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i\sum_{i=1}^{n}y_i\right)=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})(y_i-\bar{y}).$$

因此当

$$b=\frac{\sigma_{xy}}{\sigma_x^2};\quad a=\bar{y}-\frac{\sigma_{xy}}{\sigma_x^2}\bar{x}$$

时，$Q(a,b)$ 最小,我們称直綫

$$y=\frac{\sigma_{xy}}{\sigma_x^2}x+\bar{y}-\frac{\sigma_{xy}}{\sigma_x^2}\bar{x}$$

为**迴归直綫**,或改写为

$$y-\bar{y}=r_{xy}\frac{\sigma_y}{\sigma_x}(x-\bar{x}),$$

此处

$$r_{xy}=\frac{\sigma_{xy}}{\sigma_x\sigma_y}.$$

下面我們来求直綫,使各点至該直綫的垂距的平方和最小.

定理 1. 命 A 与 B 表实数. 对于所有的实数 θ 常有

$$-\sqrt{A^2+B^2}\leqslant A\cos\theta+B\sin\theta\leqslant\sqrt{A^2+B^2},$$

命

$$\cos\psi=\frac{A}{\sqrt{A^2+B^2}},\quad \sin\psi=\frac{B}{\sqrt{A^2+B^2}}$$

仅当 $\theta=\psi$ 时,右边的等号才有可能;仅当 $\theta=\psi+\pi$ 时,左边的等号才有可能.

証. 由

$$\frac{A\cos\theta+B\sin\theta}{\sqrt{A^2+B^2}}=\cos\psi\cos\theta+\sin\psi\sin\theta=\cos(\psi-\theta)$$

即得定理 1.

定理 2. 命 A,B,C 表实数,对所有的实数 θ 常有

$$\frac{A+C}{2}-\sqrt{B^2+\left(\frac{A-C}{2}\right)^2}\leqslant A\cos^2\theta+2B\cos\theta\sin\theta+C\sin^2\theta\leqslant$$

$$\leqslant\frac{A+C}{2}+\sqrt{B^2+\left(\frac{A-C}{2}\right)^2}.$$

命

$$\cos\tau=\frac{A-C}{\sqrt{4B^2+(A-C)^2}},\quad \sin\tau=\frac{2B}{\sqrt{4B^2+(A-C)^2}}\qquad(1)$$

仅当 $2\theta=\tau$ 时,右边的等号才有可能，且仅当 $2\theta=\tau+\pi$ 时，左边的等号才有可能.必須注意，$B=0$，$A=C$ 的情况必須除外,該时对任一 θ 皆取极值.

証. 我們有

$$
\begin{aligned}
&A\cos^2\theta+2B\sin\theta\cos\theta+C\sin^2\theta=\\
&=\frac{A+C}{2}+2B\sin\theta\cos\theta+\frac{A-C}{2}(\cos^2\theta-\sin^2\theta)=\\
&=\frac{A+C}{2}+B\sin 2\theta+\frac{A-C}{2}\cos 2\theta.
\end{aligned}
$$

由定理 1 可以推得本定理.

給定 n 个点:

$$(x_1, y_1), (x_2, y_2), \cdots, (x_n, y_n),$$

求这样的直綫,使这些点到这直綫的距离的平方和最小.

命所求的直綫的方程为

$$x\cos\theta+y\sin\theta-p=0.$$

点 (x_i, y_i)和这直綫的距离等于

$$x_i\cos\theta+y_i\sin\theta-p.$$

所以諸距离的平方和等于

$$
\begin{aligned}
&\sum_{i=1}^{n}(x_i\cos\theta+y_i\sin\theta-p)^2\\
&=np^2-2p\left(\sum_{i=1}^{n}x_i\cos\theta+\sum_{i=1}^{n}y_i\sin\theta\right)+\left(\sum_{i=1}^{n}x_i^2\right)\cos^2\theta+\\
&\quad+2\left(\sum_{i=1}^{n}x_iy_i\right)\cos\theta\sin\theta+\left(\sum_{i=1}^{n}y_i^2\right)\sin^2\theta=\\
&=n\left(p-\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i\cos\theta-\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}y_i\sin\theta\right)^2+\left(\sum_{i=1}^{n}x_i^2-\frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{n}x_i\right)^2\right)\cos^2\theta+\\
&\qquad+2\left(\sum_{i=1}^{n}x_iy_i-\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i\sum_{i=1}^{n}y_i\right)\cos\theta\sin\theta+\\
&\qquad+\left(\sum_{i=1}^{n}y_i^2-\frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{n}y_i\right)^2\right)\sin^2\theta.
\end{aligned}
$$

由定理 2 可知,上式最后三項的和的最小值是

$$\frac{A+C}{2}-\sqrt{B^2+\left(\frac{A-C}{2}\right)^2},$$

此处

$$
\begin{aligned}
A&=\sum_{i=1}^{n}x_i^2-\frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{n}x_i\right)^2,\\
B&=\sum_{i=1}^{n}x_iy_i-\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i\sum_{i=1}^{n}y_i=\frac{1}{n}\sum_{i<j}(x_i-x_j)(y_i-y_j), \qquad (2)\\
C&=\sum_{i=1}^{n}y_i^2-\frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{n}y_i\right)^2,
\end{aligned}
$$

于是取

$$2\theta = \tau + \pi, \tag{3}$$

及

$$p = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i \cos\theta + \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} y_i \sin\theta, \tag{4}$$

便使前式达到最小值.

定理 3. 我們給了 n 点 $(x_1, y_1), \cdots, (x_n, y_n)$. 依公式(2)作出 A, B, C, 再依公式(1),(3)及(4)定出 θ 及 p_0,則直綫

$$x\cos\theta + y\sin\theta = p$$

有这样的性質: n 点到这直綫的距离的平方和最小.

这直綫的方程式也就是

$$\frac{y - \frac{1}{n}\Sigma y_i}{x - \frac{1}{n}\Sigma x_i} = -\frac{\cos\theta}{\sin\theta} = \frac{1-\cos\tau}{\sin\tau} = \frac{-A + C + \sqrt{(A-C)^2 + 4B^2}}{2B}.$$

我們用 $\sigma(\xi)$ 表

$$\sigma(\xi) = \frac{\xi_1 + \cdots + \xi_n}{n},$$

則直綫方程变为

$$\frac{y - \sigma(y)}{x - \sigma(x)} = \frac{-\alpha + \gamma + \sqrt{(\alpha - \gamma)^2 + 4\beta^2}}{2\beta},$$

此处

$$\alpha = \sigma(x^2) - (\sigma(x))^2,$$
$$\beta = \sigma(xy) - \sigma(x)\sigma(y),$$
$$\gamma = \sigma(y^2) - (\sigma(y))^2.$$

但必須指出,当 $B = 0$ 而 $A \neq C$ 时,我們所求的直綫就是

$$x = \sigma(x).$$

又如果 $B = 0$, $A = C$, 則任意一条通过 $(\sigma(x), \sigma(y))$ 的直綫都有同样的性質(例如取四点 $(0, 1), (1, 0), (0, -1), (-1, 0)$).

§ 10. Lagrange 插入公式

上节已經說明过,我們用直綫

$$y = ax + b$$

来做出經驗公式. 这种方法无疑地在很多情况下不能符合客观情况. 我們有时用多項式

$$y = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_{n-1}x + a_n \tag{1}$$

来接近客观的曲綫.

如果知道了 $y = f(x)$ 的 $n+1$ 个数值:

$$y_0 = f(x_0),\ y_1 = f(x_1),\ \cdots,\ y_n = f(x_n), \tag{2}$$

我們可以定出一条形状如(1)的曲綫經过这 $n+1$ 点. 我們知道,这样的多項式只可能有一个,因为如果另一个次数不超过 n 的多項式也滿足同样的要求,那么二者之差在 $n+1$ 点上等于 0,而其次数不超过 n,故其系数非全为 0 不可. 也就是說,并不是“另一个”.

这个曲綫的导出方法如下:先求一条曲綫使

$$1=l(x_0),\ 0=l(x_1),\ \cdots,\ 0=l(x_n).$$

这多項式 $l(x)$ 以 $x_1,\cdots,x_n$ 为根,所以

$$l(x)=A(x-x_1)\cdots(x-x_n).$$

再以 $x=x_0$ 代入,立得

$$l(x)=\frac{(x-x_1)\cdots(x-x_n)}{(x_0-x_1)\cdots(x_0-x_n)}.$$

由此可知

$$L(x)=f(x_0)\frac{(x-x_1)\cdots(x-x_n)}{(x_0-x_1)\cdots(x_0-x_n)}+f(x_1)\frac{(x-x_0)(x-x_2)\cdots(x-x_n)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)\cdots(x_1-x_n)}+\cdots+f(x_n)\frac{(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_{n-1})}{(x_n-x_0)(x_n-x_1)\cdots(x_n-x_{n-1})}$$

就是通过(2)中 $n+1$ 点的 n 次曲綫. 这个公式称为 Lagrange 公式.

如取等分点时,公式还可以化簡:

$$x_1=x_0+d,\ x_2=x_0+2d,\ \cdots,\ x_n=x_0+nd,$$

則

$$L(x)=\frac{P(x)}{n!d^n}\sum_{\nu=0}^{n}(-1)^{n-\nu}\binom{\nu}{n}\frac{f(x_\nu)}{x-x_\nu},$$

此处 $P(x)=(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_n)$.

关于实际求出 $L(x)$ 在 x 点的数值,我們运用如下的表格:

$$\begin{array}{lllll}
x_0-x & y_0 & & & \\
x_1-x & y_1 & (y_0,y_1) & & \\
x_2-x & y_2 & (y_0,y_2) & (y_0,y_1,y_2) & \\
\cdots & & & & \\
x_n-x & y_n & (y_0,y_n) & (y_0,y_1,y_n)\cdots & (y_0,y_1,\cdots,y_n).
\end{array}$$

具体的算法是一列一列地进行. 第一、二列显然不必加以說明,第三列由公式

$$(y_0,y_k)=\frac{(x_0-x)y_k-(x_k-x)y_0}{(x_0-x)-(x_k-x)} \tag{1}$$

算出. 这就是在过 (x_0,y_0) 与 (x_k,y_k) 的直綫上与 x 对应的 y 的数值. 第四列由公式

$$(y_0,y_1,y_k)=\frac{(x_1-x)(y_0,y_k)-(x_k-x)(y_0,y_1)}{(x_1-x)-(x_k-x)} \tag{2}$$

算出. 第五列与第四列的关系如第四列与第三列的关系,最后得出

$$L(x)=(y_0,y_1,\cdots,y_n).$$

要証明这点是不难的,用归納法. 首先有

$$(y_0,y_k)_{x=x_0}=y_0,\quad (y_0,y_k)_{x=x_k}=y_k.$$

再由

$$(y_0, y_1, \cdots, y_l, y_k)=\frac{(x_l-x)(y_0, \cdots, y_{l-1}, y_k)-(x_k-x)(y_0, \cdots, y_l)}{(x_l-x)-(x_k-x)}$$

显然有

$$(y_0, y_1, \cdots, y_l, y_k)_{x=x_l}=(y_0, \cdots, y_l)_{x=x_l}=y_l$$

及

$$(y_0, y_1, \cdots, y_l, y_k)_{x=x_k}=(y_1, \cdots, y_{l-1}, y_k)_{x=x_k}=y_k.$$

又当 $m<l$ 时

$$(y_0, y_1, \cdots, y_l, y_k)_{x=x_m}=\frac{(x_l-x_m)y_m-(x_k-x_m)y_m}{(x_l-x_m)-(x_k-x_m)}=y_m.$$

由此立得

$$(y_0, y_1, \cdots, y_n)_{x=x_m}=y_m, \quad m=0, 1, 2, \cdots, n.$$

由于 $(y_0, y_1, \cdots, y_n)$ 是 x 的 n 次多項式,故可知

$$(y_0, y_1, \cdots, y_n)=L(x).$$

例如,已知 0°, 30°, 45°, 60°, 90° 的正弦函数值,求 sin 50°. 其表格是

−50	0.00000				
−20	0.50000	0.83333			
−5	0.70711	0.78568	0.76980		
10	0.86603	0.72169	0.75890	6617	
40	1.00000	0.55556	0.74074	6657	04.

注意,如果有一列,其前几位数字都相同,这几位数字就不必再入算,因为后一列也一定有这几位数字(为什么?). 因此上表的第四列都有 0.7,因而第五列不再列入这几位数字,但理解为仍有 0.7 在前面. 第五列都有 66,第六列不再列这两数字,但理解为仍有 0.766 在前. 第六列的算法是

$$\frac{10\times 57-40\times 17}{10-40}=04.$$

因而 $\sin 50°=0.76604$.

§ 11. Newton, Bessel, Stirling 插入公式

我們現在考虑等分点的情况,也就是命

$$h=x_{i+1}-x_i.$$

如此則

$$x_k=x_0+hk.$$

我們还定义 $k<0$ 的情况.

以 h 为分距的差分(第一阶)定义为

$$\Delta f(x)=f(x+h)-f(x),$$

卽得

$$\Delta y_i=y_{i+1}-y_i.$$

第二阶差分是第一阶差分的差分,卽

$$\Delta^2 f(x)=\Delta f(x+h)-\Delta f(x)=f(x+2h)-2f(x+h)+f(x)$$

$$\Delta^2 y_i=\Delta y_{i+1}-\Delta y_i=y_{i+2}-2y_{i+1}+y_i.$$

同样定义高阶差分

$$\Delta^k f(x) = \Delta(\Delta^{k-1} f(x)),$$

$$\Delta^k f(x) = f(x+kh) - kf(x+(k-1)h) + \frac{k(k-1)}{2} f(x+(k-2)h) + \\ + \cdots \pm f(x).$$

(我們可用算符

$$\Delta^k f(x) = (E-1)^k f(x)$$

来表它，$E^j f(x) = f(x+jh)$.)

由函数値求插入公式,可以通过以下的差分表:

x	$f(x)$	$\Delta f(x)$	$\Delta^2 f(x)$	$\Delta^3 f(x)$	$\Delta^4 f(x)$	
$\cdots$	$\cdots$					
		Δy_{-3}				
x_{-2}	y_{-2}		$\Delta^2 y_{-3}$		$\Delta^4 y_{-4}$	$\to N_{II}$
		Δy_{-2}		$\Delta^3 y_{-3}$		
x_{-1}	y_{-1}		$\Delta^2 y_{-2}$		$\Delta^4 y_{-3}$	
		Δy_{-1}		$\Delta^3 y_{-2}$		
x_0	y_0		$\Delta^2 y_{-1}$		$\Delta^4 y_{-2}$	$\to S$
		Δy_0		$\Delta^3 y_{-1}$		$\to B$
x_1	y_1		$\Delta^2 y_0$		$\Delta^4 y_{-1}$	
		Δy_1		$\Delta^3 y_0$		
x_2	y_2		$\Delta^2 y_1$		$\Delta^4 y_0$	
		Δy_2		$\Delta^3 y_1$		$\to N_I$
x_3	y_3		$\Delta^2 y_2$			
$\cdots$	$\cdots$					

每一列都是第一列的差分(前两列除外). 注意,差分方法的应用并不是愈多算愈好,应当适可而止. 因为如果第一列的誤差不超过 ε,而第二列的誤差只能要求其不超过 2ε. 第三列的誤差只能要求其不超过 $2^2\varepsilon$,而第 m 列的誤差在 $2^{m-1}\varepsilon$ 之內. m 大时, 2^{m-1} 增长很快. 为了保証准确性,差分次数必須适可而止.

命

$$u = (x - x_0)/h.$$

利用差分表,我們常用以下的插入多項式

$$N_I(x) = y_0 + u\Delta y_0 + \frac{u(u-1)}{2}\Delta^2 y_0 + \cdots + \frac{u(u-1)\cdots(u-n+1)}{n!}\Delta^n y_0,$$

$$N_{II}(x) = y_0 + u\Delta y_{-1} + \frac{u(u+1)}{2}\Delta^2 y_{-2} + \cdots + \frac{u(u+1)\cdots(u+n-1)}{n!}\Delta^n y_{-n}$$

(Newton 公式),

$$s(x) = y_0 + u\frac{\Delta y_0 + \Delta y_{-1}}{2} + \frac{u^2}{2}\Delta^2 y_{-1} + \frac{u(u^2-1)}{3!}\frac{\Delta^3 y_{-2} + \Delta^3 y_{-1}}{2} + \\ + \frac{u^2(u^2-1)}{4!}\Delta^4 y_{-2} + \cdots + \frac{u^2(u^2-1)\cdots[u^2-(n-1)^2]}{(2n)!}\Delta^{2n} y_{-n}$$

(Stirling 公式),

$$B(x) = y_0 + u\Delta y_0 + \frac{u(u-1)}{2}\frac{\Delta^2 y_{-1} + \Delta^2 y_0}{2} + \\ + \frac{u(u-1)\left(u-\frac{1}{2}\right)}{3!}\Delta^3 y_{-1} + \frac{u(u-1)(u^2-2)}{4!}\frac{\Delta^4 y_{-2} + \Delta^4 y_{-1}}{2} +$$

$$+\cdots+\frac{\left(u-\frac{1}{2}\right)u(u^2-1)\cdots[u^2-(n-1)^2](u-n)}{(2n+1)!}\Delta^{2n+1}y_{-n}$$

(Bessel 公式).

讀者試自己找出这些公式与 Lagrange 公式的关系. 上表中的箭头表示这些插入公式与原数据的关系.

例. 函数 $f(x)$ 有下表的数据,現在要求出 $f(22)$.

x	f	Δf	$\Delta^2 f$	$\Delta^3 f$	$\Delta^4 f$
0	0				
		487			
5	4.87		78		
		565		29	
10	10.52		107		2
		672		31	
15	17.24		138		3
		810		34	
20	25.34		172		−7
		982		27	
25	35.16		199		5
		1181		32	
30	46.97		231		1
		1412		33	
35	61.09		264		
		1676			
40	77.85				

取 $x_0=20$, 則 $u=\frac{22-20}{5}=0.4$. 由 Bessel 公式得

$$f(22)=25.34+0.4\times 9.82-\frac{0.4\times 0.6}{2}\frac{1.72+1.99}{2}+$$

$$+\frac{0.4\times 0.6\times 0.1}{6}\times 0.27=29.05.$$

由 Stirling 公式得

$$f(22)=25.34+0.4\frac{8.10+9.82}{2}+\frac{0.16}{2}1.72-$$

$$-\frac{0.4\times 0.84}{6}\frac{0.34+0.27}{2}=29.04,$$

而由 Newton 公式得

$$f(22)=25.34+0.4\times 9.82-\frac{0.4\times 0.6}{2}1.99+\frac{0.4\times 0.6\times 1.6}{6}0.32=29.05.$$

如果我們仅取第二差分,則由 Bessel, Stirling, Newton 公式各得 29.05, 29.06 及 29.03.

§12. 經 驗 公 式

建立一个由經驗得出的函数关系 $y=f(x)$ 的經驗公式可以分为两部分: 首先选擇公式的大概形式, 然后再决定参数的数値, 这些参数应該使給定函数的逼近成为最好的(在某种意义下). 以上討論过的迴归直綫就是一个重要的例子. 从实际中来的数据总是有限的. 我們总可以找到一个 Lagrange 多項式在这許多点完全符合. 但这样做仅仅是

把数据机械地变为公式并不可能启发我們了解到自然現象中內在的規律. 例如: 极簡单的反比規律

$$y=\frac{1}{x}.$$

如果我們在 1 与 2 之間取出很多数据,因而得出了高阶的 Lagrange 多項式,結果可能愈来愈繁,但愈来愈不象这个簡单規律. 因此选择合适的曲綫类型,有它的基本重要性. 例如,在某区間內有一个最大值的情况,我們可以考虑选取公式 $y=ax^2+bx+c$.

函数的类型一般是在一些簡单的函数中去找寻,方法是把这些曲綫的一般形态与已知的若干图形的形态相比較. 但选择合适的变量有时可能更好地解决問題. 例如,曲綫

$$y=\frac{x}{a+bx}$$

也等价于

$$\frac{1}{y}=b+\frac{a}{x}.$$

如果我們选取了 $\frac{1}{x}=X$, $\frac{1}{y}=Y$,則 X 与 Y 間的关系就是綫性的了.

更难的选择是观察点的問題,坐标系选择的問題. 如果在地球上看木星运动,它的軌道是十分复杂的. 但是如果我們选取太阳作为我們的观察站,則木星的运动就是一个椭圓了.

总之,选坐标,选尺度,选綫型,定参数是我們找經驗公式的步驟. 至于怎样定参数,下面将具体說明.

下面我們介紹几个簡单的,但很常用的經驗公式,并附有曲綫图. 每一图对公式中的不同参数值画出不同的曲綫.

I. $$y=ax^h \text{ (图 71)}.$$

如果选定了这一曲綫作为定型, 我們可以取 $Y=\lg y$, $X=\lg x$, 用迴归直綫法定出 a, h.

II. $$y=a\cdot b^x \text{ (图 72)}.$$

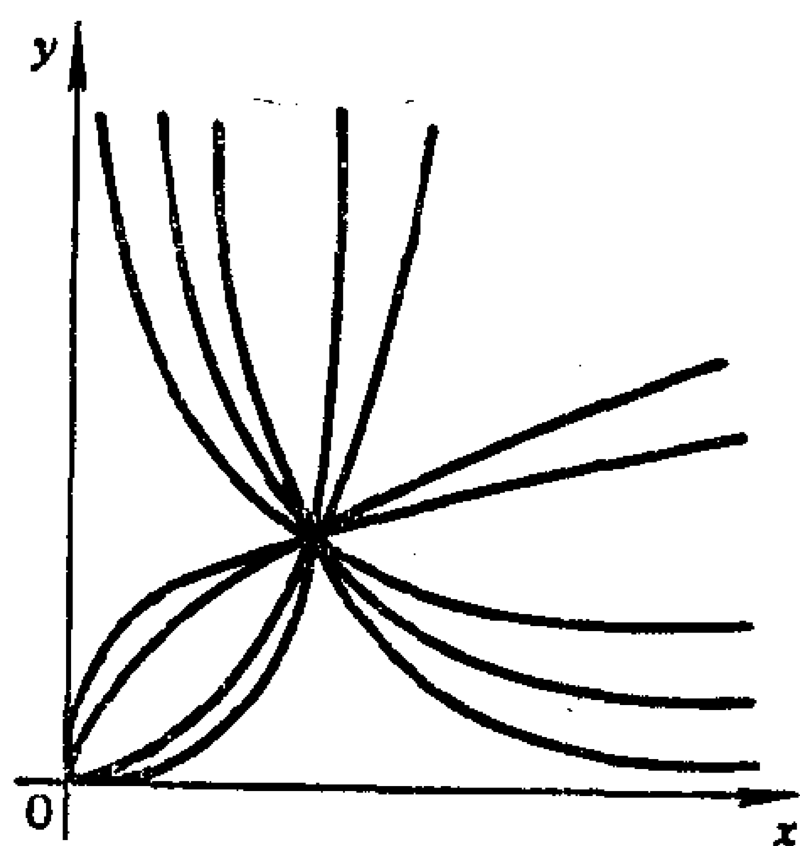


图 71

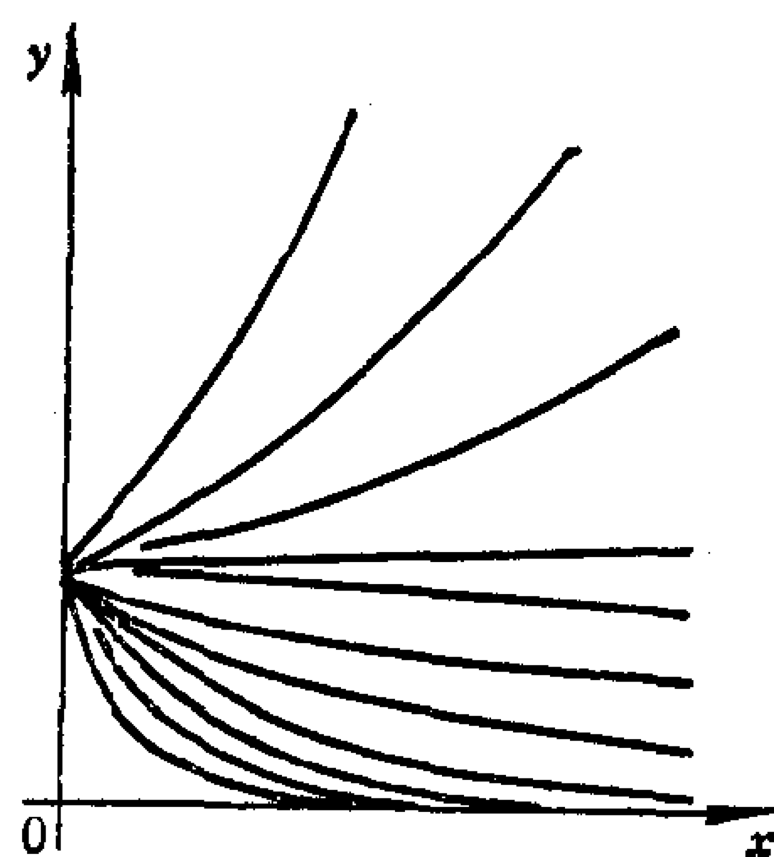


图 72

取 $Y=\lg y$, $X=x$, 用迴归直綫法定出 a, b.

III. $$y = ax^b + c \text{（图 73）}.$$

曲綫和公式 I 相同，但在 y 軸的方向作了移动．先在給定函数的曲綫上选取三点，設它們的横坐标是 x_1, x_2 及 $x_3 = \sqrt{x_1x_2}$，縱坐标是 y_1, y_2 及 y_3，而命

$$c = \frac{y_1y_2 - y_3^2}{y_1 + y_2 - 2y_3}.$$

确定 c 后，再命 $Y = \log(y - c)$，$X = \log x$，而用迴归直綫法确定 a, b．

IV. $$y = a \cdot b^x + c \text{（图 74）}.$$

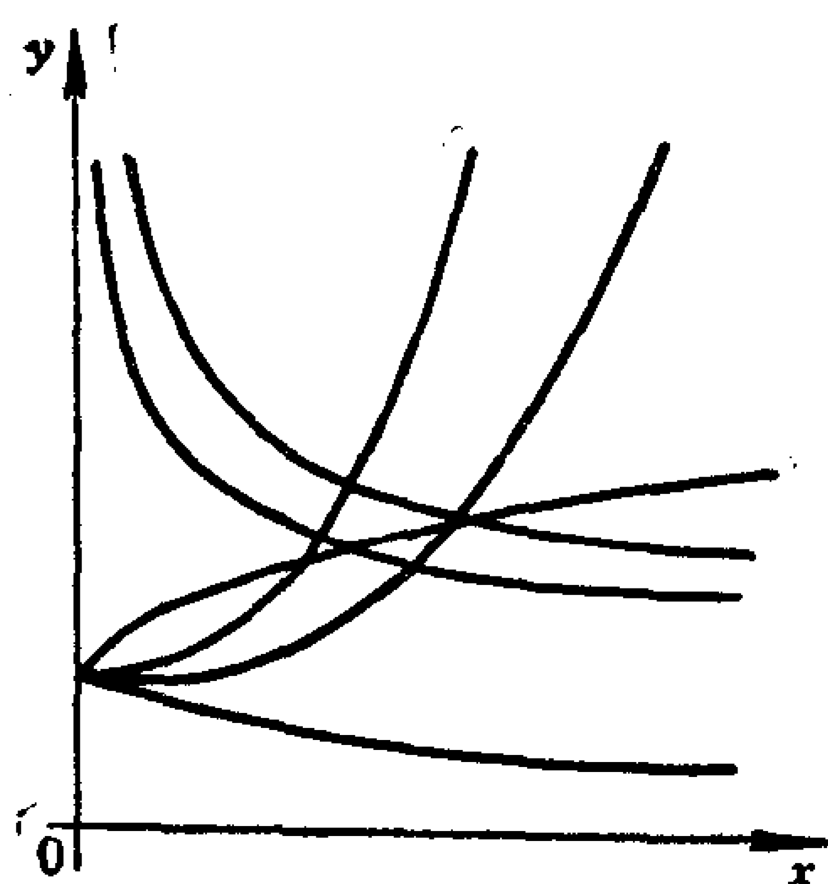


图 73

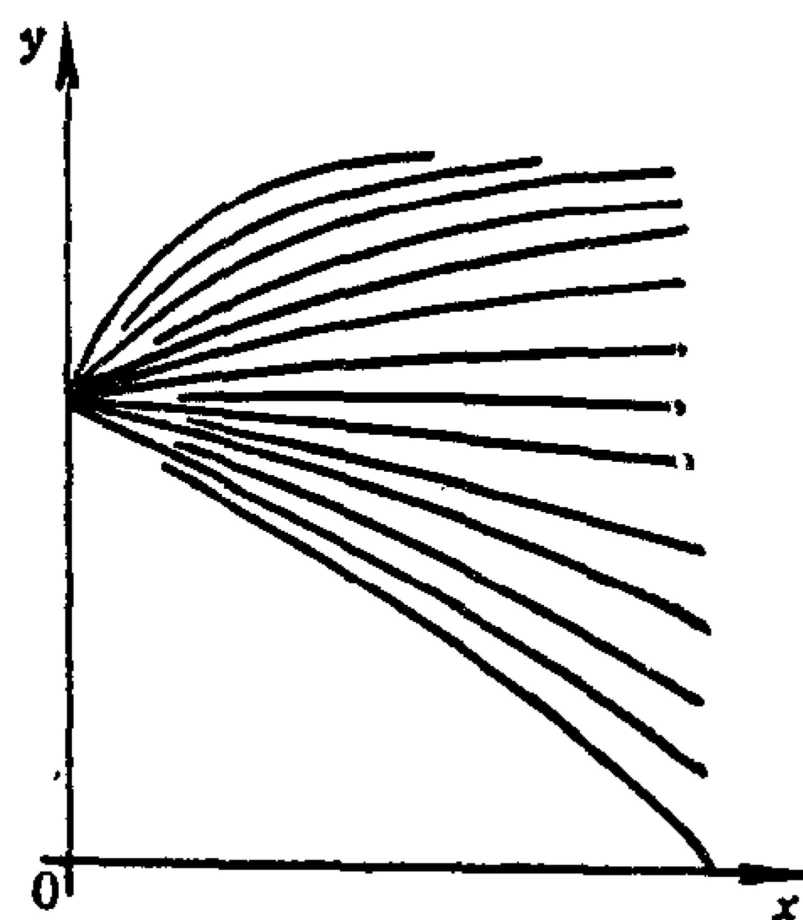


图 74

这曲綫图形和公式 II 的相同，但在 y 軸的方向作了移动．在給定函数的曲綫上选出三点，設它們的横坐标是 x_1, x_2，及 $x_3 = \frac{1}{2}(x_1 + x_2)$，縱坐标是 y_1, y_2 及 y_3，而命

$$c = \frac{y_1y_2 - y_3^2}{y_1 + y_2 - 2y_3}.$$

然后令 $Y = \log(y - c)$，$X = x$，而行迴归直綫法．

V. $$y = ax^2 + bx + c \text{（图 75）}.$$

在曲綫上任取一点 (x_1, y_1)，而命 $Y = \frac{y - y_1}{x - x_1}$，則有

$$Y = (b + ax_1) + ax;$$

如果給定的 x 值組成一个有公差等于 h 的等差数貫，則命 $Y = \Delta y$，而有

$$Y = (bh + ah^2) + 2ahx.$$

对这两种情形，都能用迴归直綫法定出 a, b，然后由

$$\Sigma y = a\Sigma x^2 + b\Sigma x + nc$$

定出 c，此处 n 是給定的 x 值的个数，Σ 是关于 x 或对应的 y 求和．

VI. $$y = \frac{ax + b}{cx + d},\quad ad - bc \neq 0 \text{（图 76）}.$$

在曲綫上任取一点 (x_1, y_1)，而命 $Y = \frac{x - x_1}{y - y_1}$，則有

$$Y = A + Bx.$$

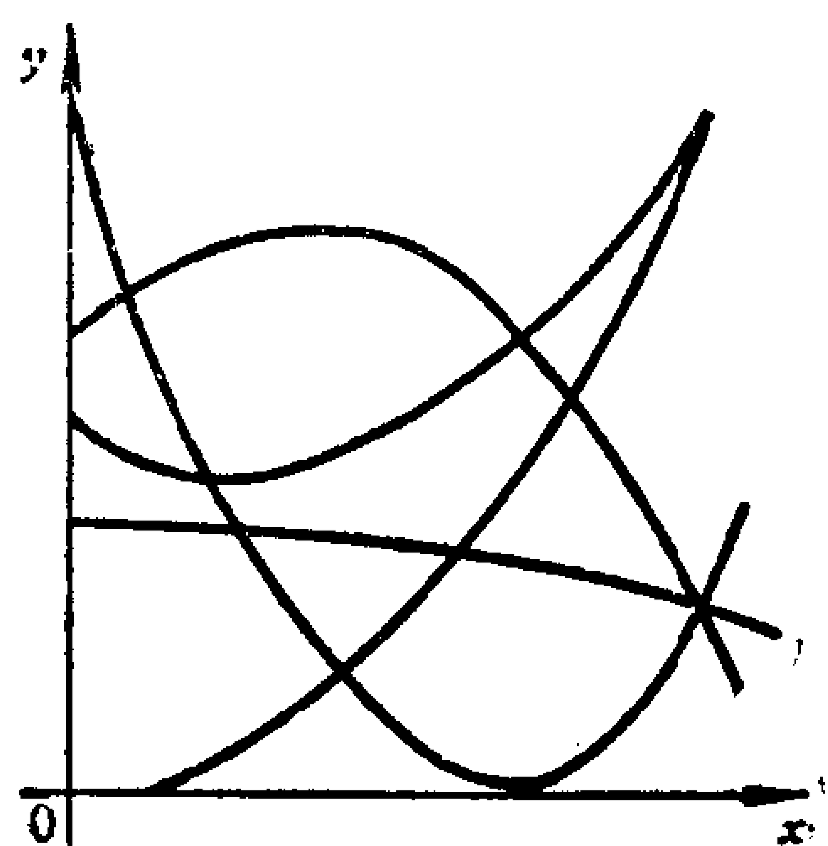


图 75

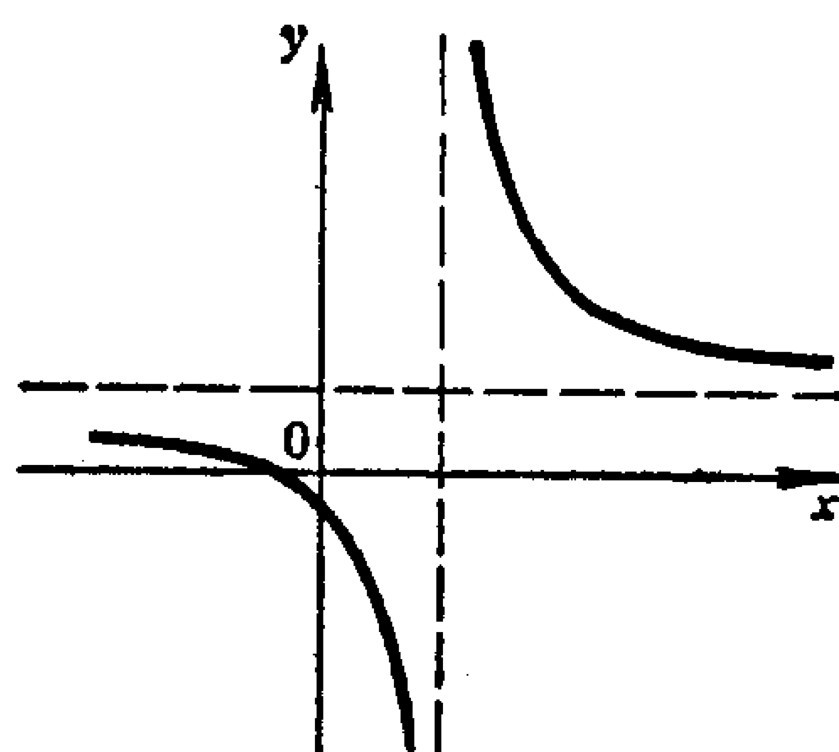


图 76

用迴归直綫法由给定的 x 值与 y 值可以定出 A, B,于是

$$y = y_1 + \frac{x - x_1}{A + Bx}.$$

VII. $$y^2 = ax^2 + bx + c \text{ (图 77)}.$$

作变换 $Y = y^2$,而化成V的情形.

VIII. $$y = ae^{b+cx+dx^2} \text{ (图 78)}.$$

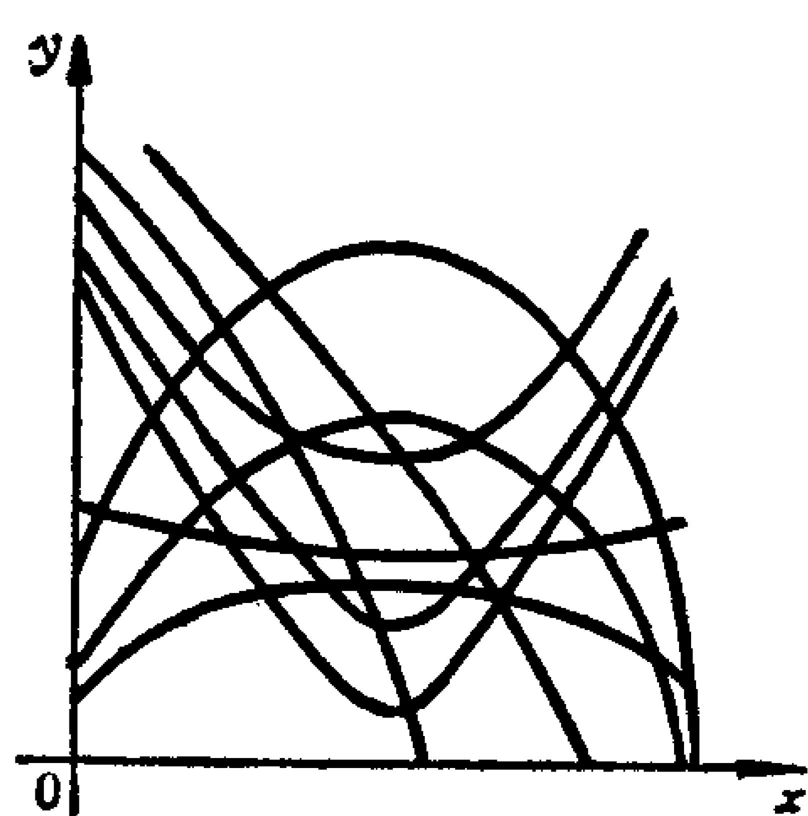


图 77

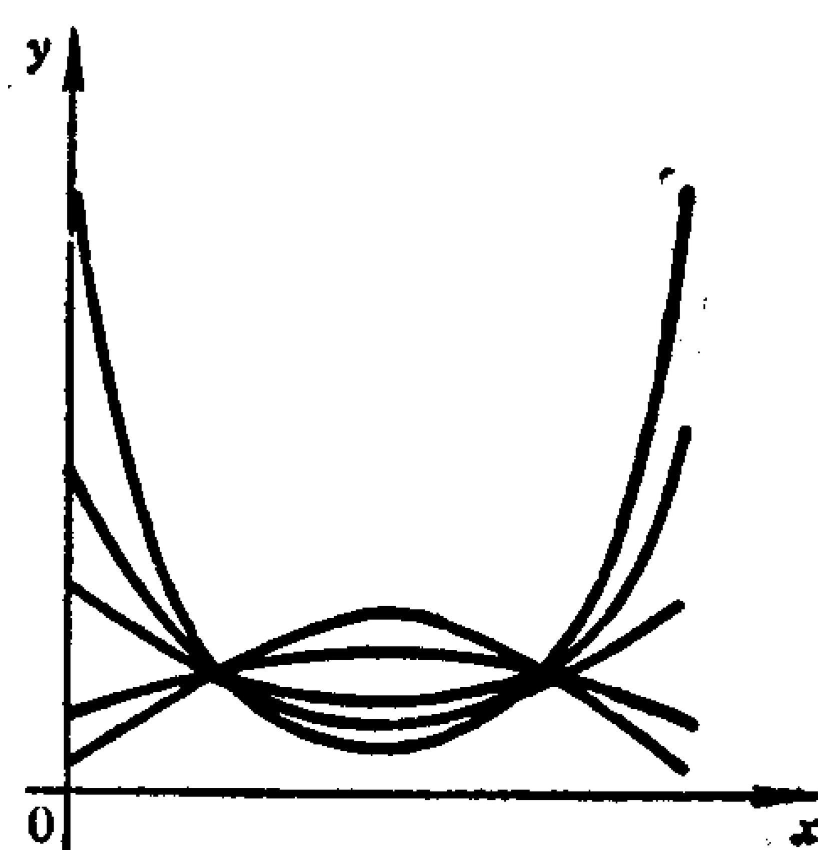


图 78

因为

$$\log y = \log a + b + cx + dx^2,$$

故通过变换 $Y = \log y$,又化成V的情形.

IX. $$y = \frac{1}{ax^2 + bx + c} \text{ (图 79)}.$$

通过变换 $Y = \frac{1}{y}$ 化成V的情形.

X. $$y = \frac{x}{ax^2 + bx + c} \text{ (图 80)}.$$

通过变换 $Y = \frac{x}{y}$ 化成情形 V.

XI. $$y = a + \frac{b}{x} + \frac{c}{x^2} \text{ (图 81)}.$$

通过变换 $X = \frac{1}{x}$ 又化为 V.

XII. $$y = ax^b e^{cx} \text{ (图 82)}.$$

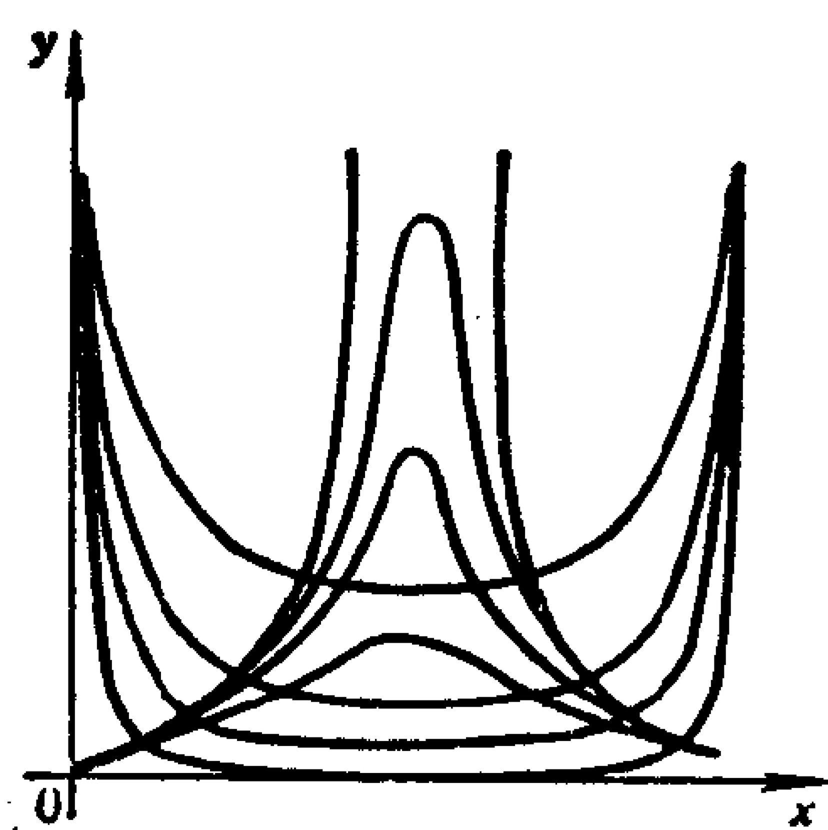


图 79

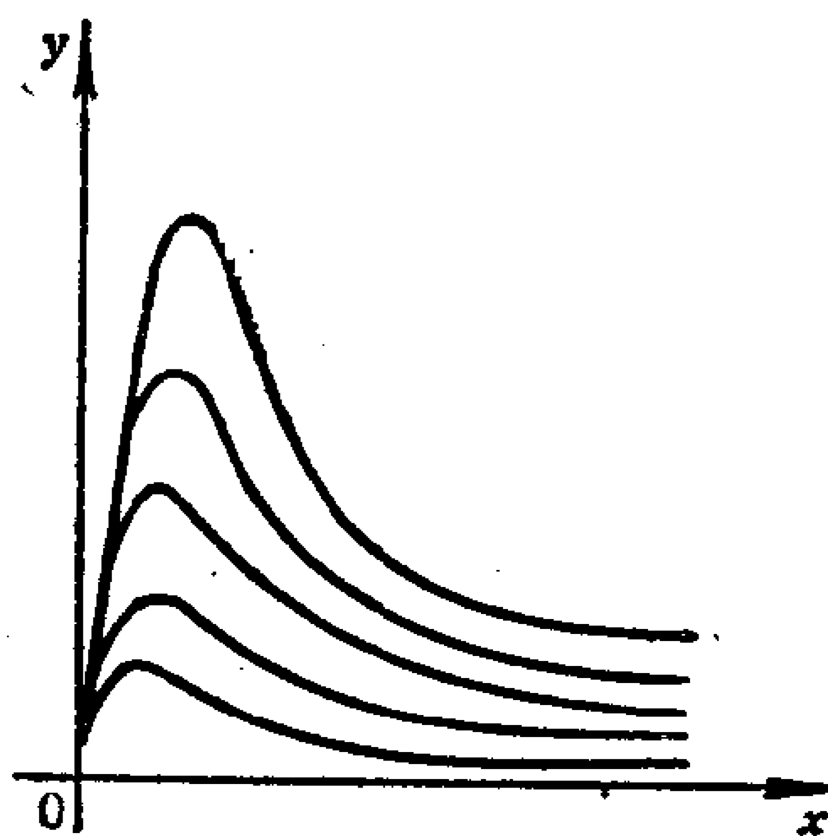


图 80

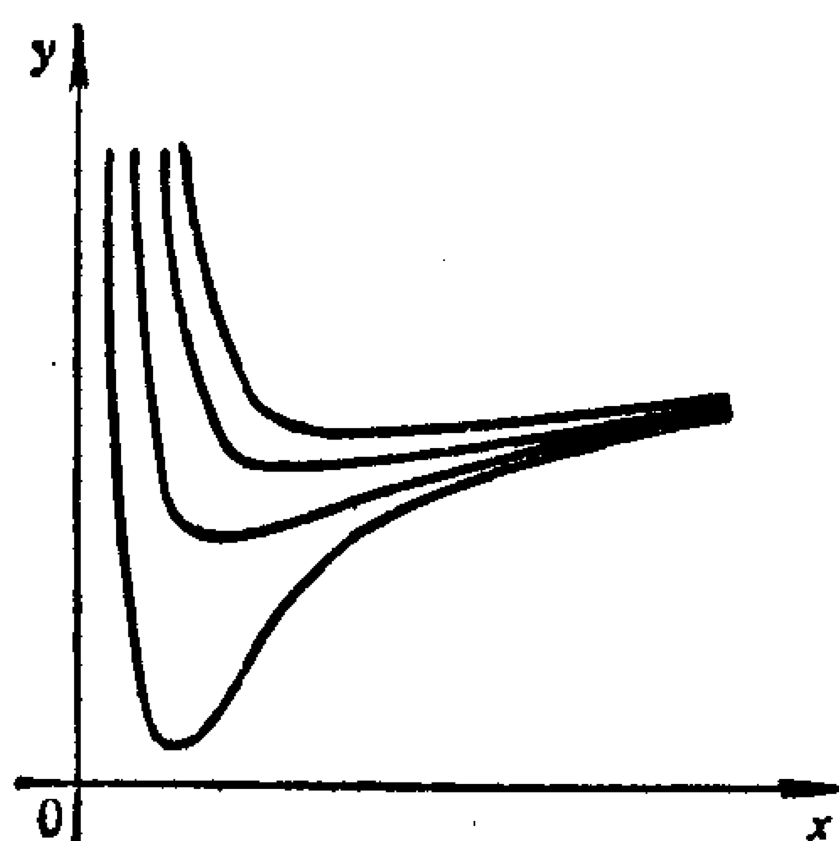


图 81

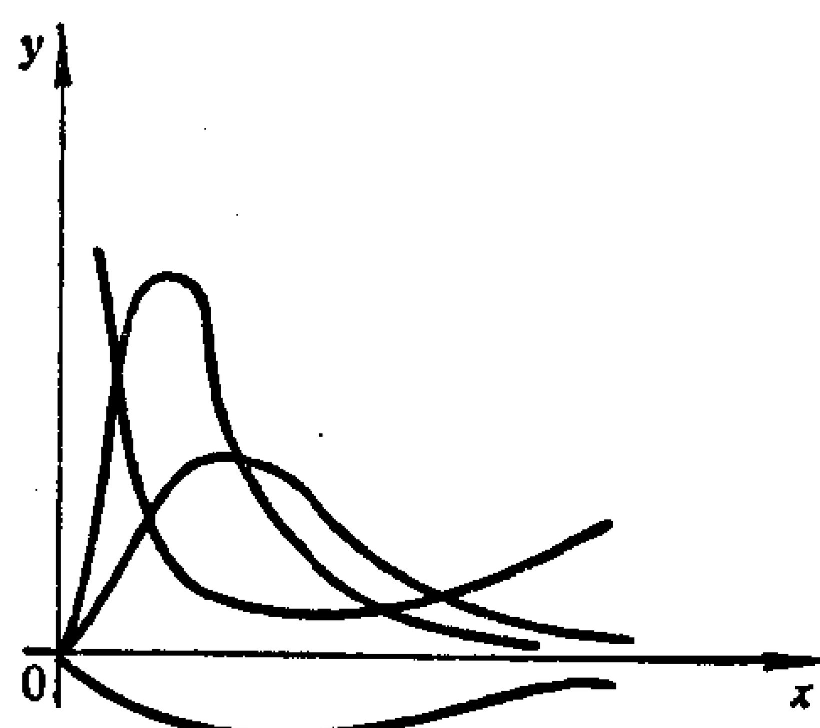


图 82

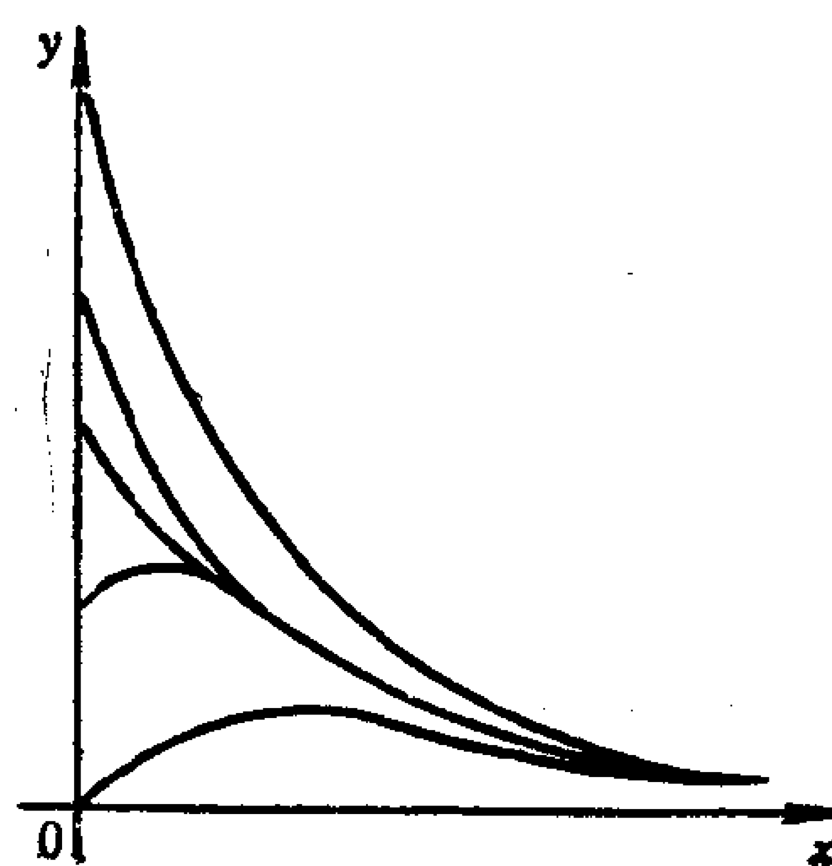


图 83

如果給定的 x 値构成以 h 为公差的等差数貫,則命 $Y = \Delta \log y$, $X = \Delta \log x$,而得

$$Y = ch + bX;$$

如果給定的 x 値构成以 q 为公比的等比数貫,則命 $Y = \Delta_1 \log y$,而得

$$Y = b \log q + c(q-1)x$$

($\Delta_1 \log y$ 是相邻两 $\log y$ 值之差). 对这两种情形,都能通过迴归直綫法定出 b, c。然后由

$$\Sigma \log y = b \Sigma \log x + c \Sigma x + n \log a$$

定出 $\log a$ 及 a 来.

XIII. $$y = ae^{bx} + ce^{dx} \text{ (图 83)}.$$

如果 x 値构成以 h 为公差的等差数貫,并且 y, y_1 及 y_2 是三个相継的 y 的数値,命

$$Y = \frac{y_2}{y}, \quad X = \frac{y_1}{y},$$

則得

$$Y = (e^{bh} + e^{dh})X - e^{bh}e^{dh}.$$

由此用迴归直綫法定出 b, d 后,再命 $\xi = e^{(b-d)x}$, $\eta = ye^{-dx}$,而由

$$\eta = a\xi + c$$

定出 a, c.

例. 試求 x, y 間的經驗公式,此处 x, y 之值在下表中之首二列給出:

x	y	$\frac{x}{y}$	$\Delta\frac{x}{y}$	$\log_{10}x$	$\log_{10}y$	$\Delta\log_{10}x$	$\Delta\log_{10}y$	$\Delta_1\log_{10}y$	由經驗公式所得 y 的值
0.1	1.78	0.056	0.007	−1.000	0.250	0.301	0.252	0.252	1.78
0.2	3.18	0.063	0.031	−0.699	0.502	0.176	+0.002	−0.097	3.15
0.3	3.19	0.094	0.063	−0.523	0.504	0.125	−0.099	−0.447	3.16
0.4	2.54	0.157	0.125	−0.398	0.405	0.097	−0.157	−0.803	2.52
0.5	1.77	0.282	0.244	−0.301	0.248	0.079	−0.191	−1.134	1.76
0.6	1.14	0.526	0.488	−0.222	0.057	0.067	−0.218	−1.455	1.14
0.7	0.69	1.014	0.986	−0.155	−0.161	0.058	−0.237	—	0.70
0.8	0.40	2.000	1.913	−0.097	−0.398	0.051	−0.240	—	0.41
0.9	0.23	3.913	3.78	−0.046	−0.638	0.046	−0.248	—	0.23
1.0	0.13	7.69	8.02	0.000	−0.886	0.041	−0.269	—	0.13
1.1	0.07	15.71	14.29	0.041	−1.155	0.038	−0.243	—	0.07
1.2	0.04	30.0	—	0.079	−1.398	—	—	—	0.04

在画出曲綫(图 84)后,发現它与公式X及 XII 的图形相似. 对于公式 X,我們采用修正变量 $\Delta\frac{x}{y}$ 及 x,由表易見,x 和 $\Delta\frac{x}{y}$ 間的关系跟綫性关系偏差很大. 又对公式 XII,我們作出 $\Delta\log_{10}x$ 及 $\Delta\log_{10}y$ 間的函数关系的曲綫图($h=0.1$, 图 85) 并作 $\Delta_1\log_{10}y$ 与 x 間的函数关系的曲綫图 ($q=2$, 图 86).

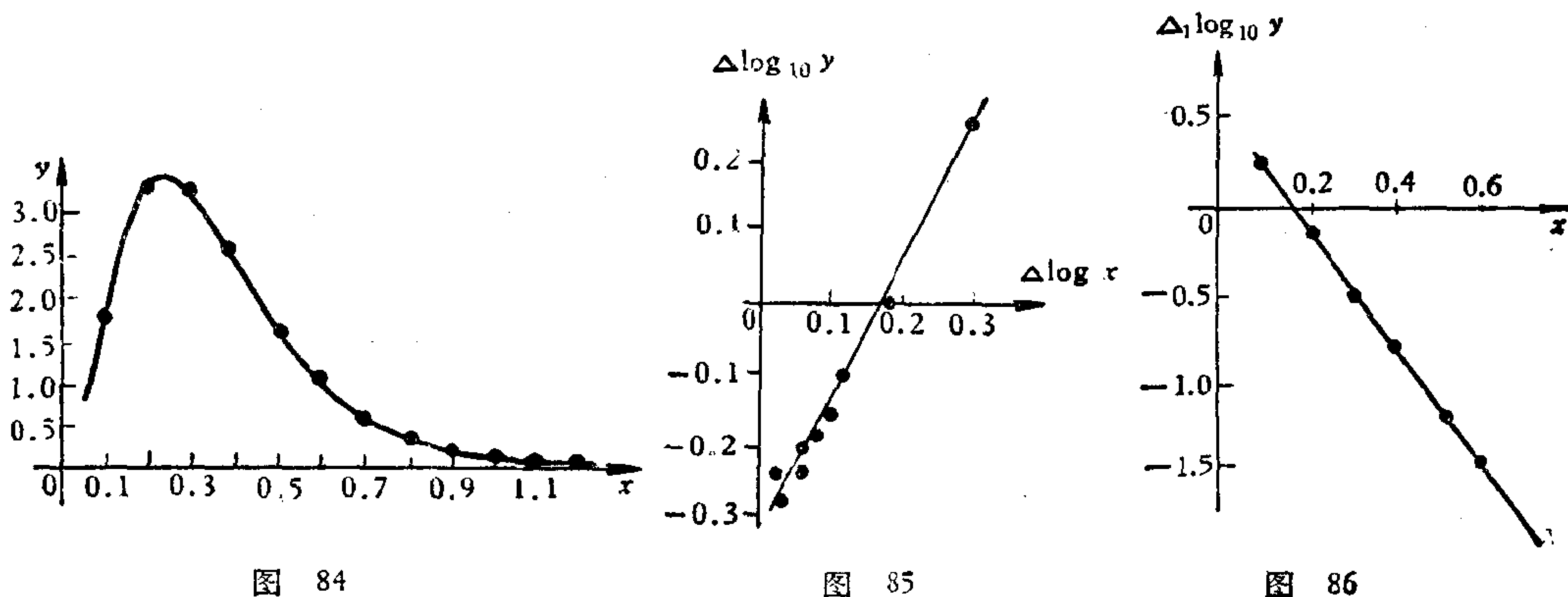


图 84　　图 85　　图 86

在这两种情形中,都可把曲綫看成与直綫完全一致,而有

$$y = ax^b e^{cx}.$$

为了定出 a, b 与 c,我們用下面的平均值方法找出 x 和 $\Delta_1\log_{10}y$ 間的綫性关系. 在把条件方程

$$\Delta_1\log_{10}y = b\log_{10}2 + cx\log_{10}e$$

分組相加后(每組含三个方程),得

$$-0.292 = 0.903b + 0.2606c,$$

$$-3.392 = 0.903b + 0.6514c.$$

从而算出 $b = 1.966$ 及 $c = -7.932$. 然后通过

$$\Sigma\log_{10}y = 12\log_{10}a + b\Sigma\log_{10}x + c\log_{10}e\Sigma x,$$

或即

$$-2.670 = 12\log_{10}a - 6.529 - 26.87,$$

算出 $\log_{10} a = 2.561$. 因此 $a = 364$. 于是我們有公式

$$y = 364x^{1.966}e^{-7.932x},$$

由此算出与各个 x 对应的 y 值. 上表最后一列就是按此公式与 $x=0.1, 0.2, \cdots, 1.1, 1.2$ 对应的各个 y 值.

§13. 曲 綫 族

两个自变量 x, y 的函数

$$z = f(x, y) \tag{1}$$

应当用三維空間的曲面来表达,但有时可以用一曲綫族来表达. 例如,把 y 作为常数,則(1)定义一曲綫,当 y 变化时得一曲綫族. 这样得出的曲綫族称为以 y 为参数的曲綫族.

取 y 抑取 x 为参数,須視应用时的目的性而定.

以弹道为例,一个射出物(炮弹或人造卫星)的軌道依賴于发射时的初速 v_0 与发射时的仰角 α 而定. 实質上,弹道曲綫是有两个参变数的曲綫.

在研究定型大炮时,初速 v_0 取定数,而发射角作为参数. 如取发射点为原点,x 軸为射向水平方向,y 軸的正向朝上,則弹道方程是

$$y = x\,\mathrm{tg}\,\alpha - \frac{x^2 g \sec^2\alpha}{2v_0^2}. \tag{2}$$

如图 87 所示,就是当 α 取不同数值所得的抛物軌道.

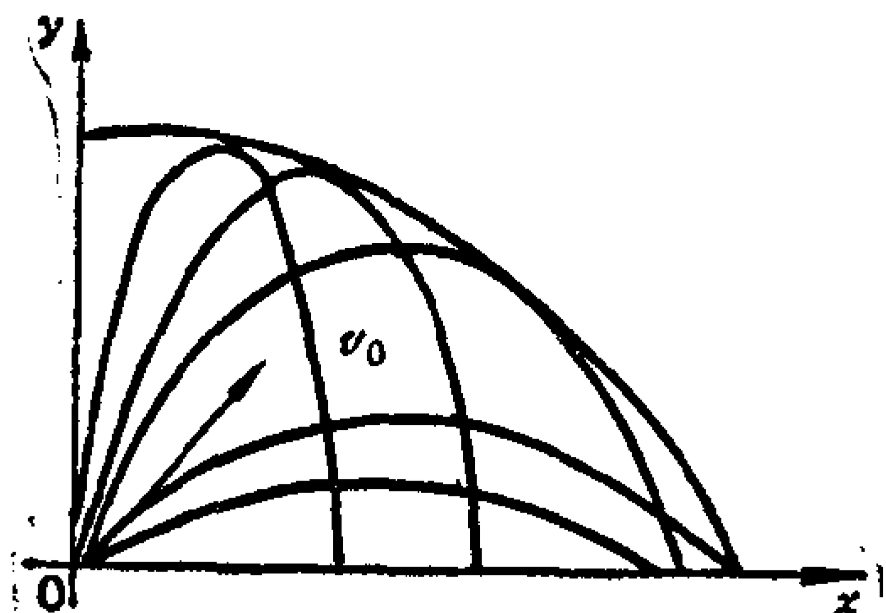


图 87

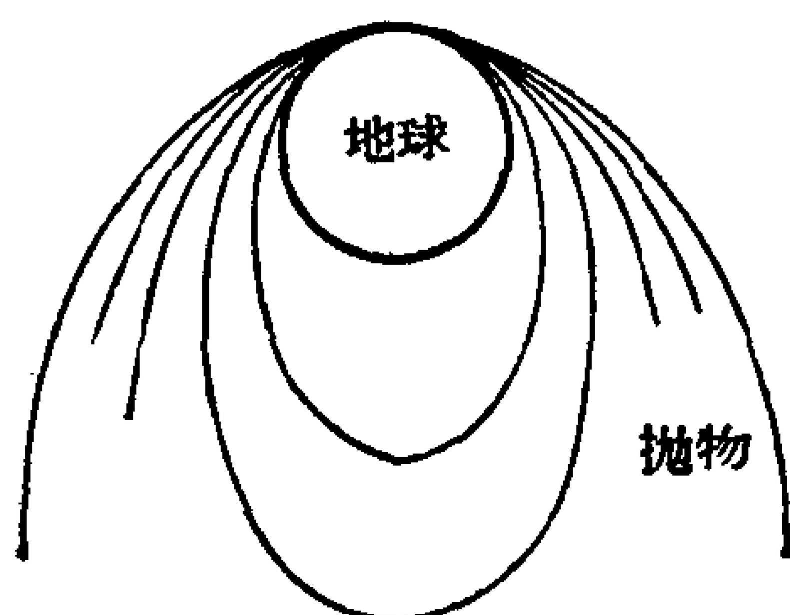


图 88

但人造卫星的发射,是依初速为主要依据. 不同的初速得不同的軌道,这样得一曲綫族:采用极坐标,以地心为极点,水平綫为基綫,并假定在某一高度依水平角发射,則軌道方程是

$$\rho = \frac{p}{1 + e\cos(\varphi - \varphi_0)}, \tag{3}$$

这里

$$p = \frac{R^2 v_0^2}{fM},$$

$$e = \sqrt{1 + \left(v_0^2 - \frac{2fM}{R}\right)\frac{R^2 v_0^2}{fM}},$$

其中 M 表地球質量 5.98×10^{27} 克, f 表引力常数 6.685×10^{-23} [公里]^3/[克][秒]^2, R 是发射点到球心的距离(地球半径 6370 公里).

从軌道方程(3)中可以算出：如果取 $R=6370$，速度小于第一宇宙速度（7.9 公里/秒），則物体回到地球上来．当初速等于第一宇宙速度时，(3)表示一圓．当初速在第一、第二(11.2 公里/秒)宇宙速度之間时，則得橢圓軌道．当取第二宇宙速度时，則取拋物綫軌道．超过第二宇宙速度时，則得双曲綫軌道(讀者試自做之，它是复习二次曲綫的一个好习題)．

習題 1．有二橢圓：

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1,\qquad \frac{x^2}{b^2}+\frac{y^2}{a^2}=1.$$

过这二橢圓的交点有一二次曲綫族：

$$\lambda\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-1\right)+\mu\left(\frac{x^2}{b^2}+\frac{y^2}{a^2}-1\right)=0.$$

証此族中有一个圓，有一对直綫，有一批双曲綫，求这些双曲綫的漸近綫．

習題 2．求过两二次曲綫 $Q_1=0$，$Q_2=0$ 及两条直綫 $l_1=0$，$l_2=0$ 的交点（如图）的三次曲綫．証明它有无穷多条(考慮 $\lambda l_1Q_2+\mu l_2Q_1=0$)．

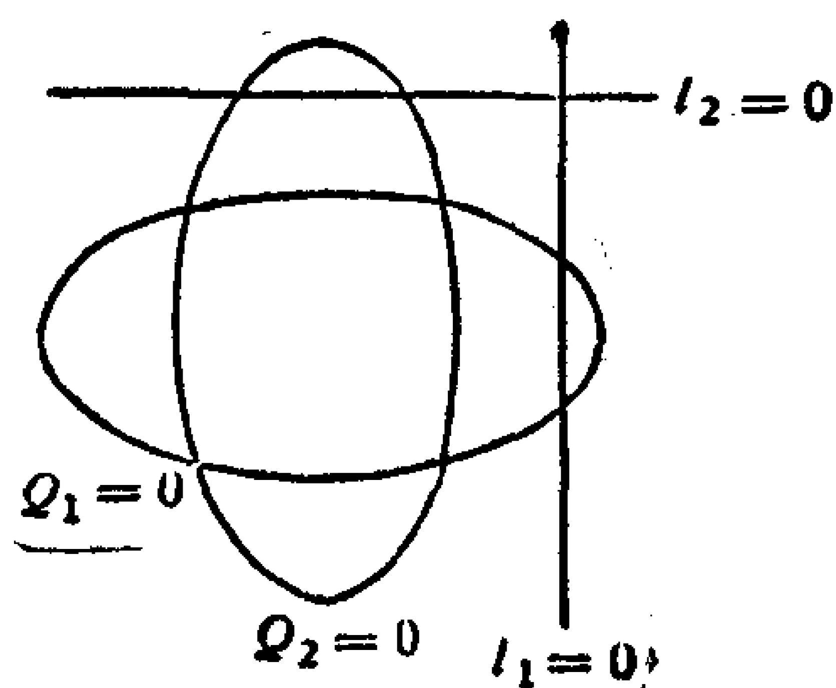


图 89

第四章　极　限

§1. 貫的趋限情况

仅仅从有极限和沒有极限来說明貫的性質，有的时候不够細致，不能符合客观需要。

先說一下趋限情况．命

$$x_1, x_2, \cdots, x_n, \cdots$$

是一实数貫趋于一限 x．一般讲来，有三种情况：(i) 当 n 充分大时，这些 x_n 都在 x 的左边，也可以說 $x_n \leqslant x$．在这样的情况下，我們說 x_n 从左趋限 x，也就是任給一个 $\varepsilon > 0$，我們有一个充分大的自然数 N 存在，使当 $n > N$ 时

$$0 \leqslant x - x_n \leqslant \varepsilon.$$

同样，可以說明，(ii) 右趋限的情况．还有 (iii) 或左或右地趋于限的情况．

例 1．$x_n = \frac{1}{n}$，$x_n = -\frac{1}{n}$，$x_n = \frac{(-1)^n}{n}$ 就各表一种情况．第三类还可以举更复杂一些的例子．对任一实数 x，$x_n = \frac{\sin nx}{n}$ 也是趋于 0 的貫．

例 2．研究貫

$$x_n = \frac{2n^2 + 3n + 4}{5n^2 + 6n + 7}.$$

我們将証明它的极限是 $\frac{2}{5}$．当 $n \geqslant 2$ 时，

$$0 \leqslant x_n - \frac{2}{5} = \frac{3n + 6}{5(5n^2 + 6n + 7)} \leqslant \frac{6n}{25n^2} < \frac{6}{25n} < \varepsilon;$$

当 $n > N = \left[\frac{6}{25\varepsilon}\right]$ 时，此式成立，所以我們的貫是从右边趋近于 $\frac{2}{5}$．

例 3．假定 $a > 1$，求証

$$\lim_{n\to\infty} a^{\frac{1}{n}} = 1.$$

这 $x_n = a^{\frac{1}{n}}$ 是递減的貫并且 $\geqslant 1$，所以极限存在，并且是从右边趋限的．从公式

$$a^{\frac{1}{n}} - 1 = \frac{a - 1}{(a^{\frac{1}{n}})^{n-1} + (a^{\frac{1}{n}})^{n-2} + \cdots + 1},$$

及 $(a^{\frac{1}{n}})^l > 1$ 可知

$$a^{\frac{1}{n}} - 1 \leqslant \frac{a-1}{n},$$

所以当 $n > N = \left[\frac{a-1}{\varepsilon}\right]$ 时，

$$0 < a^{\frac{1}{n}} - 1 < \varepsilon.$$

例 4. 假定 $|q|<1$ (q 可能是复数)，现在证明

$$\lim_{n\to\infty} q^n = 0.$$

$q=0$ 时显然. 今考察 $q\neq 0$ 时如何才能使

$$|q|^n < \varepsilon.$$

当

$$\log\frac{1}{\varepsilon} < n\log\left|\frac{1}{q}\right|,$$

亦即

$$n > N = \left[\frac{\log\frac{1}{\varepsilon}}{\log\left|\frac{1}{q}\right|}\right]$$

时,

$$|q^n| < \varepsilon.$$

我们现在来考察等比级数

$$a + aq + aq^2 + \cdots + aq^n.$$

这级数的和是

$$a\frac{1-q^{n+1}}{1-q} = \frac{a}{1-q} - \frac{aq^{n+1}}{1-q},$$

当 $n\to\infty$ 时,后面一项趋于 0 ,所以我们可以说级数

$$a + aq + aq^2 + \cdots$$

收敛于$\frac{a}{1-q}$.

例 5. 先给二数 a 与 b, $a<b$. 命 $x_0=a$, $x_1=b$, 并定义

$$x_n = \frac{x_{n-1}+x_{n-2}}{2} \quad (n\geqslant 2),$$

求 x_n 的极限. 由

$$x_n - x_{n-1} = -\frac{1}{2}(x_{n-1}-x_{n-2}),$$

所以

$$x_1-x_0=b-a,\ x_2-x_1,\cdots,\ x_{n-1}-x_{n-2},\ x_n-x_{n-1}$$

是一个等比级数的诸项,其公比是 $-\frac{1}{2}$. 所以

$$(x_1-x_0)+(x_2-x_1)+\cdots+(x_n-x_{n-1}) = x_n - a = \frac{b-a-\left(-\frac{1}{2}\right)^n(b-a)}{1-\left(-\frac{1}{2}\right)}$$

故当 $n\to\infty$ 时, x_n-a 趋向于 $\frac{2}{3}(b-a)$. 从而

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \frac{a+2b}{3}.$$

这种趋限的方法，是忽然在左，忽然在右的趋限方法.

在趋限的情况中，还有单调趋限或非单调趋限两种情况. 单调趋限是从一方面一步近于一步地接近于极限.

例 5 虽然不是从单方面趋限，但它还是一步近于一步地接近极限的贯.

§2. 贯的不趋限情况

不趋限的情况，更有许多值得注意的现象.

无穷大: 有以下性质的贯称为趋向无穷大，给了一个任意大的正数 E，我们可以找到一个自然数 $N(=N(E))$，使当 $n>N$ 时

$$|x_n| > E.$$

例如，$x_n=n$，$x_n=-n$，$x_n=(-1)^{n+1}n$ 都趋向无穷大.

特别重要的是当无穷大贯 x_n（当 n 充分大时）的符号（+或−）保持不变的情形；这时，按照符号为正或负，而称 x_n 趋向正无穷大（$+\infty$）或负无穷大（$-\infty$），并写成为

$$\lim_{n\to\infty} x_n = +\infty, \quad 或 \quad \lim_{n\to\infty} x_n = -\infty.$$

换言之，如果给了任意大的正数 E，我们有自然数 $N(=N(E))$ 存在，使当 $n>N$ 时，

$$x_n > E, \quad (或 \ < -E),$$

则 x_n 趋向 $+\infty$（或 $-\infty$）.

上例中，$x_n=n$ 趋向 $+\infty$，$x_n=-n$ 趋向 $-\infty$，而 $x_n=(-1)^{n+1}n$ 却不能说它趋向 $+\infty$ 或 $-\infty$，而仅能说它趋向无穷大.

趋于 0 的贯也称为无穷小，而无穷大与无穷小之间的关系是:

如果 x_n 趋向无穷大，则它的倒数 $y_n=\dfrac{1}{x_n}$ 是无穷小. 反之，如果 y_n（不等于 0）是无穷小，则 $x_n=\dfrac{1}{y_n}$ 趋向无穷大. x_n 与 y_n 中可能有些等于 0 的项，这些项必须除去.

如果 x_n 趋向 $+\infty$，则它的倒数 $y_n=\dfrac{1}{x_n}$ 从右趋向于 0；如果 x_n 趋向 $-\infty$，则 y_n 从左趋向于 0. 反之亦然.

不趋限的情况，有时还更复杂.

聚点: 把 $x_1, x_2, \cdots, x_n, \cdots$ 都记在一条直线上，因为有无穷个点，所以可能有以下的情况出现. 有一点 x，在 x 附近有无数点；换言之，任与 $\varepsilon>0$，我们有无穷多个自然数 $n_1, n_2, \cdots$，使

$$|x - x_{n_\nu}| < \varepsilon \quad \nu = 1,2,\cdots.$$

这样的点 x 称为贯 $\{x_n\}$ 的一个聚点或极限点．显然趋限的贯有唯一的聚点．没有聚点的贯一定趋向无穷．因对任一 $E > 0$, $|x_\nu| < E$ 的 x_ν 仅有有限个,所以，有一自然数 N 存在,使当 $n > N$ 时，$|x_n| > E$．即得所证.

例 1. $x_{2n} = \frac{1}{n}$, $x_{2n+1} = 1 - \frac{1}{n}$, 这一个贯显然有二聚点 0 与 1．一般地说，如果 $x_n \to x$, $y_n \to y$, $z_n \to z$, 则我们定义一新贯

$$x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2, \cdots.$$

这新贯有三个聚点 x, y, z.

例 2. 我们把(0,1)之间的全体有理数,用以下的方法排成一贯:

$$0\ ,1;\ \frac{1}{2};\ \frac{1}{3},\ \frac{2}{3};\ \frac{1}{4},\ \frac{3}{4};\ \frac{1}{5},\ \frac{2}{5},\ \frac{3}{5},\ \frac{4}{5};\ \frac{1}{6},\ \frac{5}{6};\ \cdots$$

一般讲来,先依分母排，再依分子大小排下所有的既约分数，这贯既然包含 [0,1] 间的全体有理数,则显然 [0,1] 间的任何一个实数都是极限点.

定义. 在聚点中最大的一个称为上极限,用

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} x_n$$

来表示(上极限可能是$\pm\infty$)．而最小的一个称为下极限,用

$$\underline{\lim_{n\to\infty}} x_n$$

来表示(也可能是$\pm\infty$).

上极限的定义也可转述为：对任一 $\varepsilon > 0$, 仅有有限个 n 使 $a_n > \alpha + \varepsilon$; 而有无穷个 n 使

$$|a_n - \alpha| < \varepsilon.$$

定理 1. 对于任何贯 $\{x_n\}$，上极限和下极限都存在．又 $\{x_n\}$ 有极限的必要且充分条件是

$$\underline{\lim_{n\to\infty}} x_n = \overline{\lim_{n\to\infty}} x_n.$$

证. 如果 $\{x_n\}$ 无上界,则一定有一子贯 x_{n_k}, 使

$$\lim_{k\to\infty} x_{n_k} = +\infty.$$

因此 $+\infty$ 是一聚点，从而上极限是 $+\infty$．如果 $\{x_n\}$ 有上界，定义 M_k 为 x_{k+1}, x_{k+2}, $\cdots$ 的确上限,用符号

$$M_k = \sup_{n>k}\{x_n\} = \sup\{x_{k+1}, x_{k+2}, \cdots\}$$

表之,则 M_k 为一单调减少贯,它或者以 $-\infty$ 为其极限,或者有有限的极限.

如果

$$\lim_{k\to\infty} M_k = -\infty,$$

则对任何正数 E，必有充分大的 K，使

$$M_K < -E.$$

于是由 M_k 的定义，当 $k > K$ 时，

$$x_k < -E$$

恒成立，所以

$$\lim_{n\to\infty} x_n = -\infty,$$

它同时是贯 $\{x_n\}$ 的上极限与下极限.

如果 $\lim\limits_{k\to\infty} M_k = M^*$ 为一有限数，则对任何 $\varepsilon > 0$，必有充分大的K，使

$$M_K < M^* + \varepsilon.$$

因此当 $k > K$ 时，x_k 适合

$$x_k < M^* + \varepsilon.$$

另一方面，我们有

$$M_k \geqslant M^* (k = 0, 1, 2, \cdots).$$

因为 $M_0 \geqslant M^*$，所以在 x_1，x_2，$\cdots$中必有一 x_{n_1} 适合

$$x_{n_1} > M_0 - \varepsilon \geqslant M^* - \varepsilon.$$

又因 $M_{n_1} \geqslant M^*$，所以在 x_{n_1+1}，x_{n_1+2}，$\cdots$中又必有一 $x_{n_2}(n_2 > n_1)$ 适合

$$x_{n_2} > M_{n_1} - \varepsilon \geqslant M^* - \varepsilon.$$

按此方法，我们可以找到无限多个 $x_{n_i}(i = 1, 2, \cdots)$，适合

$$x_{n_i} > M^* - \varepsilon;$$

另一方面，前已证明，大于 $M^* + \varepsilon$ 的 x_n 至多只有有限多个，所以 M^* 即为 $\{x_n\}$ 的上极限．因此不论何种情形，上极限恒存在．同样证明下极限的存在性．

定理的后半部分很是显然，读者试自补出它的证明．

§3. 级　数

所谓级数是指

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_n + \cdots \tag{1}$$

而言，其中 a_n 是实数或复数．命

$$s_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n,$$

称它为级数的部分和．如果

$$s_n \to s,$$

则称级数为收敛级数，并且称它收敛于 s.

关于贯有极限的 Cauchy 条件，就变为级数的收敛条件．

定理 1. 级数(1)收敛的必要且充分条件是：对任一 $\varepsilon > 0$，有一自然数N存在，使

当 $n > m > N$ 时,

$$|s_n - s_m| < \varepsilon,$$

亦即

$$|a_{m+1} + \cdots + a_n| < \varepsilon.$$

递增而限于上的贯必有极限的定理一变而为

定理 2. 如果 $a_\nu \geqslant 0$ 而 $|s_n| \leqslant M$, 则级数(1)一定收敛.

定义. 如果级数

$$|a_1| + |a_2| + \cdots + |a_n| + \cdots$$

收敛,则级数

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_n + \cdots$$

称为绝对收敛. 由定理 1 及 $|a_{m+1} + \cdots + a_n| \leqslant |a_{m+1}| + \cdots + |a_n|$ 可知

定理 3. 凡绝对收敛的级数一定收敛.

更一般些有

定理 4. 如果 $a_n \geqslant 0$, 且

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_n + \cdots$$

收敛. 若 $|b_n| \leqslant a_n$, 则级数

$$b_1 + b_2 + \cdots + b_n + \cdots$$

绝对收敛. (注意: 只要当 n 充分大时,有 $|b_n| \leqslant a_n$ 便已足够.)

取

$$a_n \leqslant r^n, \quad 0 < r < 1,$$

则由定理 4 可知,级数 Σa_n 收敛. 因之,如果当 n 充分大时,常有

$$|a_n| \leqslant r^n, \quad \text{或即} \quad |a_n|^{\frac{1}{n}} \leqslant r,$$

则 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 绝对收敛. 因得

定理 5 (Cauchy 判别法). 如果

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} |a_n|^{\frac{1}{n}} = r < 1,$$

则级数

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_n + \cdots$$

绝对收敛.

定理 6 (此例判别法). 命

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = r < 1,$$

则级数 $a_1 + a_2 + \cdots + a_n + \cdots$ 绝对收敛.

证. 由假定可知, 对任一 $0 < \varepsilon < 1 - r$, 我们有一自然数 N 存在,使当 $n \geqslant N$ 时,

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \leqslant r + \varepsilon, \quad \text{或即} \quad |a_{n+1}| \leqslant (r + \varepsilon)|a_n|.$$

即得

$$|a_{N+p}| \leqslant (r+\varepsilon)^p |a_N|.$$

因为 $\sum_{p=1}^{\infty} |a_N|(r+\varepsilon)^p$ 收敛，所以 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 绝对收敛.

例 1. 假定 $z = x + yi$ 是一个复数，则当 $|z| < 1$ 时，

$$1 + z + z^2 + \cdots = \frac{1}{1-z}.$$

例 2. 当 $|z| < 1$ 时

$$1 + 2z + 3z^2 + \cdots + (n+1)z^n + \cdots$$

也绝对收敛，

因为

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \left|\left(\frac{n+1}{n}\right)z\right| \to |z|.$$

所以得出需要的结果.

例 3. 命 α 是任一实数，当 $|z| < 1$ 时

$$1 + 2^\alpha z + 3^\alpha z^2 + \cdots + (n+1)^\alpha z^n + \cdots$$

也绝对收敛.

例 4. 级数

$$1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots + \frac{1}{n^2} + \cdots$$

的收敛性不能由比例判别条件得到 $\left(\text{因为} \frac{n^2}{(n+1)^2} \to 1\right)$，也不能用 Cauchy 判别法得到 $\left(\text{因为} \left(\frac{1}{n^2}\right)^{\frac{1}{n}} \to 1\right)$，但可通过以下的方法来证明它的收敛性. 先考虑

$$\frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \cdots + \frac{1}{n(n+1)} + \cdots,$$

这个级数的收敛性可由

$$\frac{1}{m(m+1)} + \frac{1}{(m+1)(m+2)} + \cdots + \frac{1}{(m+p)(m+p+1)} =$$
$$= \left(\frac{1}{m} - \frac{1}{m+1}\right) + \left(\frac{1}{m+1} - \frac{1}{m+2}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{m+p} - \frac{1}{m+p+1}\right) =$$
$$= \frac{1}{m} - \frac{1}{m+p+1} \to 0, \ (\text{当 } m \to \infty \text{ 时})$$

导出，而

$$\frac{1}{n^2} \leqslant \frac{1}{n(n-1)}, \quad n \geqslant 2,$$

所以原级数收敛.

更一般些，我们还可证明:

定理 7. 对任一 $\alpha > 1$，级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$$

常收敛.

证. 由于

$$\frac{1}{3^\alpha}+\frac{1}{4^\alpha}<\frac{2}{2^\alpha},$$

$$\frac{1}{5^\alpha}+\cdots+\frac{1}{8^\alpha}<\frac{4}{4^\alpha},$$

$$\cdots\cdots$$

$$\frac{1}{(2^n+1)^\alpha}+\cdots+\frac{1}{(2^{n+1})^\alpha}<\frac{2^n}{(2^n)^\alpha},$$

而级数

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2^{\alpha-1})^n}$$

是收敛的,所以定理成立.

下面我们来说明绝对收敛级数的一个重要性质.

定理 8. 如果级数

$$a_1+a_2+\cdots+a_n+\cdots$$

绝对收敛,并且它的和等于 s, 则在任意颠倒它的各项次序后所得到的级数

$$a_1'+a_2'+\cdots+a_n'+\cdots,$$

也一定绝对收敛,并且它的和也等于 s. 简单地说,任意颠倒一个绝对收敛级数的各项次序,对级数的绝对收敛性与级数的和不生影响.

证. 因为 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 绝对收敛,故对任何 $\varepsilon>0$, 存在 N, 使

$$\sum_{n=N+1}^{\infty}|a_n|<\varepsilon. \tag{1}$$

因为级数 $\sum\limits_{k=1}^{\infty}a_k$ 的前 N 项 $a_1,\cdots,a_N$ 就是级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n'$ 的某 N 项 $a_{i_1}',\cdots,a_{i_N}'$, 命 $m_N=\max(i_1,\cdots,i_N)$, 则对任何 $m>m_N$,

$$\sum_{k=1}^{m}a_k'=\sum_{k=1}^{N}a_k+r,$$

此处 r 是足标 $>N$ 的某些 a_k 之和,所以由不等式(1)得到

$$|r|<\varepsilon.$$

因此,对于 $m>m_N$,

$$\left|\sum_{k=1}^{m}a_k'-s\right|\leqslant\left|\sum_{k=1}^{N}a_k-s\right|+|r|=\left|\sum_{k=N+1}^{\infty}a_k\right|+|r|<2\varepsilon.$$

这說明了級数 $\sum_{n=1}^{\infty} a'_n$ 的收斂性,并且它的和就等于 s.

因为

$$\sum_{k=1}^{n} |a'_k|$$

是級数 $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ 中的某 n 項之和,所以

$$\sum_{k=1}^{n} |a'_k| \leqslant \sum_{k=1}^{\infty} |a_k|,$$

而左方是 n 的增加貫,由此得到 $\sum_{n=1}^{\infty} a'_n$ 的絕对收斂性.

不收斂的級数称为发散. 发散也有种种不同的情况. 由定理 1 可以立刻推得: 如果級数 Σa_n 收斂,則

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0,$$

所以任何一个公項不趋 0 的級数一定是发散的.

例如, $1-1+1-1+1-1+\cdots$就是发散級数.

但是公項趋于 0 的級数并不一定收斂,例如,調和級数

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\cdots$$

就是一个发散級数,因为該級数

$$\geqslant 1+\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}\right)+\cdots\geqslant$$
$$\geqslant 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\cdots.$$

故調和級数是发散的.

与收斂相仿,我們也有一批与发散性有关的定理:

定理 4′. 如果 $a_n \geqslant 0$ 且 Σa_n 发散. 若 $b_n \geqslant a_n$,則 Σb_n 也发散.

定理 5′. 如果

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} |a_n|^{\frac{1}{n}} = r > 1,$$

則級数 Σa_n 发散(因为如果这样,則 $\lim_{n\to\infty} a_n \neq 0$).

定理 6′. 如果

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = r > 1,$$

則級数 Σa_n 发散.

証法也是如此,即在此情形中, a_n 不趋于 0. 注意,由

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = r > 1$$

不能推出級数发散. 例如,

$$\frac{1}{1^2}+\frac{2}{1^2}+\frac{1}{2^2}+\frac{2}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{2}{3^2}+\cdots+\frac{1}{n^2}+\frac{2}{n^2}+\cdots$$

适合以上的条件,但这是一收斂級数.

附記. 凡能用比例判別法判定是收斂的級数,一定能用 Cauchy 判別法判定之;反之不眞. 对于发散的情形,也是如此.

§4. 条件收斂的級数

不絕对收斂的收斂級数称为条件收斂級数.

例如, $1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots$ 不絕对收斂,但是

$$\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+(-1)^p\frac{1}{n+p}\leqslant\frac{1}{n}-\left(\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}\right)-$$
$$-\left(\frac{1}{n+3}-\frac{1}{n+4}\right)-\cdots-\left(\frac{1}{n+2\left[\frac{p}{2}\right]-1}-\frac{1}{n+2\left[\frac{p}{2}\right]}\right)\leqslant\frac{1}{n}$$

及

$$\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+(-1)^p\frac{1}{n+p}\geqslant\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)+$$
$$+\left(\frac{1}{n+2}-\frac{1}{n+3}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{n+2\left[\frac{p-1}{2}\right]}-\frac{1}{n+2\left[\frac{p-1}{2}\right]+1}\right)\geqslant 0.$$

所以当 $n\to\infty$ 时, $s_n-s_{n+p}\to 0$. 由定理 3.1 可知級数收斂.

以上的証明原則立卽可以推广,而得

定理 1. 如果 $0\leqslant a_{n+1}\leqslant a_n$ 及 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$, 則級数

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n$$

收斂.

証. 由于

$$a_n-a_{n+1}+a_{n+2}+\cdots+(-1)^p a_{n+p}\begin{cases}\leqslant a_n\\ \geqslant 0,\end{cases}$$

故由定理 3.1 推得本定理.

在检驗非絕对收斂級数的收斂性时, 經常用到下面的 Abel 判別法与 Dirichlet 判別法. 我們先証明一个重要的引理.

引理 1. 設 a_n 单調,又設

$$\left|\sum_{k=1}^{n}b_k\right|\leqslant M\quad(n=1,2,\cdots,N),$$

則对 $n=1,2,\cdots,N$, 可有

$$\left|\sum_{k=1}^{n}a_kb_k\right|\leqslant M(|a_1|+2|a_n|).$$

証. 命 $s_0=0,\ s_n=\sum_{k=1}^{n} b_k\ (n\geqslant 1)$,則有

$$\sum_{k=1}^{n} a_k b_k=\sum_{k=1}^{n} a_k(s_k-s_{k-1})=\sum_{k=1}^{n} a_k s_k-\sum_{k=2}^{n} a_k s_{k-1}=$$

$$=\sum_{k=1}^{n} a_k s_k-\sum_{k=1}^{n-1} a_{k+1} s_k=\sum_{k=1}^{n-1} s_k(a_k-a_{k+1})+s_n a_n. \tag{1}$$

因为 a_n 是单調貭,所以 a_k-a_{k+1} 有固定的符号,于是得到

$$\left|\sum_{k=1}^{n} a_k b_k\right|\leqslant M\left(\left|\sum_{k=1}^{n-1}(a_k-a_{k+1})\right|+|a_n|\right)\leqslant M(|a_1|+2|a_n|).$$

等式(1)俗称为分部求和公式,这与以后积分中的分部积分公式相当.

定理 2 (Abel 判别法). 設 a_n 有界单調,又設級数 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 收斂,則級数

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$$

也收斂.

証. 設 $|a_n|\leqslant K$, 由級数 Σb_n 的收斂,故对任何 ε,存在 N,使

$$\left|\sum_{k=N+1}^{N+p} b_k\right|<\varepsilon,\quad (p=1, 2, \cdots).$$

于是由引理 1 得到

$$\left|\sum_{k=N+1}^{N+p} a_k b_k\right|\leqslant \varepsilon(|a_{N+1}|+2|a_{N+p}|)\leqslant 3K\varepsilon,\quad (p=1, 2, \cdots).$$

所以定理得証.

定理 3 (Dirichlet 判别法). 設 a_n 单調,且当 $n\to\infty$ 时趋于 0. 又設級数 Σb_n 的部分和有界,也卽

$$\left|\sum_{k=1}^{n} b_k\right|\leqslant M\quad (n=1, 2, \cdots),$$

則級数 $\Sigma a_n b_n$ 收斂.

証. 对于任何 $\varepsilon>0$,存在 N,使当 $n>N$ 时, $|a_n|<\varepsilon$. 于是由引理得到

$$\left|\sum_{k=N+1}^{N+p} a_k b_k\right|\leqslant M(|a_{N+1}|+2|a_{N+p}|)<6M\varepsilon.$$

所以 $\Sigma a_n b_n$ 收斂.

在上一节中,我們講到,任意顚倒絕对收斂級数的各項次序并不影响級数的和値. 对于条件收斂級数,却无此性質. 事实上,我們有

定理 4. 如果 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 条件收斂,則适当顚倒它的各項次序,可以作出发散級数,也可以作出收斂于任何預給数 s 的收斂級数.

在証明之前,先証明一个引理.

引理 2. 如果 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 条件收斂,則它所有的正項构成一个发散級数,同样,它所有的負項也构成一发散級数.

証. 用 $p_1, p_2, \cdots$ 表示从 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 中依次取出的各个正項, $q_1, q_2, \cdots$ 表示从 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 中依次取出的負項,則

$$\sum_{k=1}^{n} a_k = \sum_{k=1}^{n'} p_k + \sum_{k=1}^{n''} q_k,$$

此处 $n'(n'')$ 为前 n 个 a_n 中的正(負)項个数,自然有 $n' + n'' = n$,且当 $n \to \infty$ 时, n' 与 n'' 也都趋向 ∞. 因为 $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ 收斂,故若 $\sum_{k=1}^{\infty} p_k$ 与 $\sum_{k=1}^{\infty} q_k$ 中有一收斂,則另一个也收斂. 但因

$$\sum_{k=1}^{n} |a_k| = \sum_{k=1}^{n'} p_k - \sum_{k=1}^{n''} q_k,$$

于是推出 $\Sigma|a_k|$ 也收斂,这与 Σa_k 为条件收斂矛盾,所以 Σp_k 与 Σq_k 都发散.

定理 4 的証明. 为了得到一个发散級数,我們将原級数的各項次序作如下的調整. 先取級数的若干个正項,使它們的和大于 1. 根据引理,此事总为可能. 然后在它們后面添一負項,之后再加若干正項,而使这些新加的正項之和仍大于 1,然后再加一負項,……等等,将此手續繼續进行以至无穷,于是得到一个新的級数. 很显然,原級数的每一項一定在这新級数中出現. 又此新級数一定发散,因为在无論怎样远的地方,此新級数总有一片段,它們的和数大于 1 所以它发散.

其次,为了得到一个和数为預先給定的 s 的收斂級数,我們調整級数的各項次序如下. 为确定起見,不妨假設 $s \geqslant 0$. 我們依次取出原級数中的各个正項,直到它們的和大于 s 为止. 然后再依次添上原級数的各个負項,直到这些負項与前面这些正項之和小于或等于 s 为止. 然后再添正項、添負項、……等等,按此手續进行以至无穷. 这样我們又得到一个新級数

$$a_1' + a_2' + \cdots + a_n' + \cdots.$$

显然这个新級数是通过对原級数調整各項次序而得. 我們将証明这个新級数的和就等于 s. 命

$$\sum_{k=1}^{n} a_k' = s_n' \quad (n = 1, 2, \cdots).$$

今設 $\varepsilon > 0$ 任意小,因为 $a_n' \to 0$,故必有 N,使当 $n > N$ 时, $|a_n'| < \varepsilon$. 依据上述 $\Sigma a_n'$ 的构造方法,必有 $n_0 > N$,使

$$s_{n_0-1}' \leqslant s < s_{n_0}',$$

所以

$$0 < s_{n_0}' - s \leqslant s_{n_0}' - s_{n_0-1}' = a_{n_0}' < \varepsilon.$$

而对 $n > n_0$,又根据 $\Sigma a_n'$ 的构造方法,一定有

$$|s_n' - s| < \varepsilon \quad (n \geqslant n_0),$$

所以 s_n' 趋于 s；也就是說

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n' = s.$$

定理証毕.

从引理 2 及定理 4 可以看到，在絕对收斂級数与条件收斂級数之間存在着深刻的实質性的差异。

§5. 祖冲之計算圓周率的方法

祖冲之首先証明了圓周率 π 落在

$$3.1415926 < \pi < 3.1415927$$

之間，这是数学史上的一个光輝成就. 他的算法也是极限的最好說明，他从单位圓的內接正六边形和外切正六边形出发. 显然圓夹在这两个六边形之間，再作內接的和外切的正 12 边形、正 24 边形、…正 $6\cdot2^{n-1}$ 边形等等，边数愈多，內接的和外切的正 $6\cdot2^{n-1}$ 边形的面积就愈接近于圓的面积，由此可以逐步地精确地算出圓周的长度.

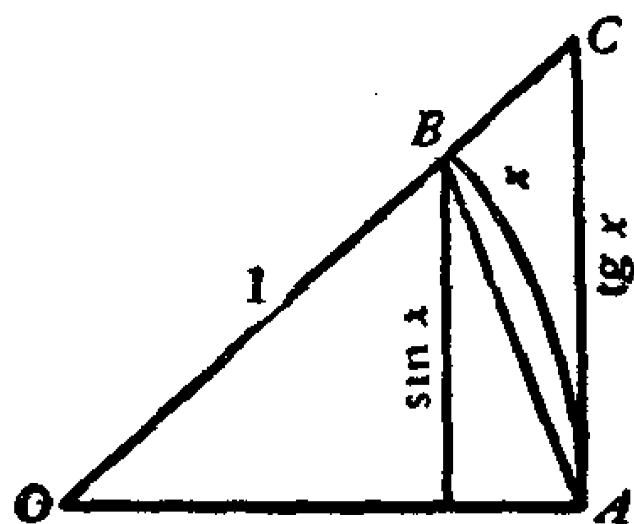


图 90

由图 90 可見

$$\sin x < x < \operatorname{tg} x \quad \left(0 < x < \frac{\pi}{2}\right). \tag{1}$$

圓內接正 l 边形的一边长度等于

$$2\sin\frac{\pi}{l},$$

而外切正 l 边形的一边长度等于

$$2\operatorname{tg}\frac{\pi}{l}.$$

命 x_n 表內接正 $6\cdot2^{n-1}$ 边形的总边长，而 y_n 表外切正 $6\cdot2^{n-1}$ 边形的总边长. 由两点之間的距离以直綫为最短的原則，我們可以証明 $x_n < x_{n+1}$, $y_n > y_{n+1}$，因而得出两个貫

$$x_1 < x_2 < x_3 < \cdots,$$

及

$$y_1 > y_2 > y_3 > \cdots.$$

这儿

$$x_n = 6\cdot2^n \sin\frac{2\pi}{6\cdot2^n}, \qquad y_n = 6\cdot2^n \operatorname{tg}\frac{2\pi}{6\cdot2^n}.$$

由(1)式可知

$$x_n < 2\pi < y_n \quad (n = 1, 2, \cdots),$$

即內接正 $6\cdot2^{n-1}$ 边形的周长恆小于圓的周长，而外切正 $6\cdot2^{n-1}$ 边形的周长恆大于圓的周长. 又由

$$0 \leqslant y_n - x_n = 6\cdot2^n\left(\operatorname{tg}\frac{2\pi}{6\cdot2^n} - \sin\frac{2\pi}{6\cdot2^n}\right) =$$

$$= 6\cdot2^n \operatorname{tg}\frac{2\pi}{6\cdot2^n}\left(1 - \cos\frac{2\pi}{6\cdot2^n}\right) = 6\cdot2^{n+1}\operatorname{tg}\frac{2\pi}{6\cdot2^n}\sin^2\frac{\pi}{6\cdot2^n},$$

及 $\sin x < x$（也就是两点之間直綫最短）可知，当 n 趨向∞时

$$y_n - x_n \leqslant \frac{\pi^2}{6\cdot 2^{n-1}} \operatorname{tg} \frac{2\pi}{6\cdot 2^n} \to 0.$$

因此我們知道

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} y_n = 2\pi.$$

在实际計算时，我們用以下的方法．因

$$\cos\frac{x}{2} = \sqrt{\frac{1+\cos x}{2}},$$

故能从 $\cos\frac{2\pi}{6} = \frac{1}{2}$ 开始逐步算出

$$\cos\frac{2\pi}{6\cdot 2^n}.$$

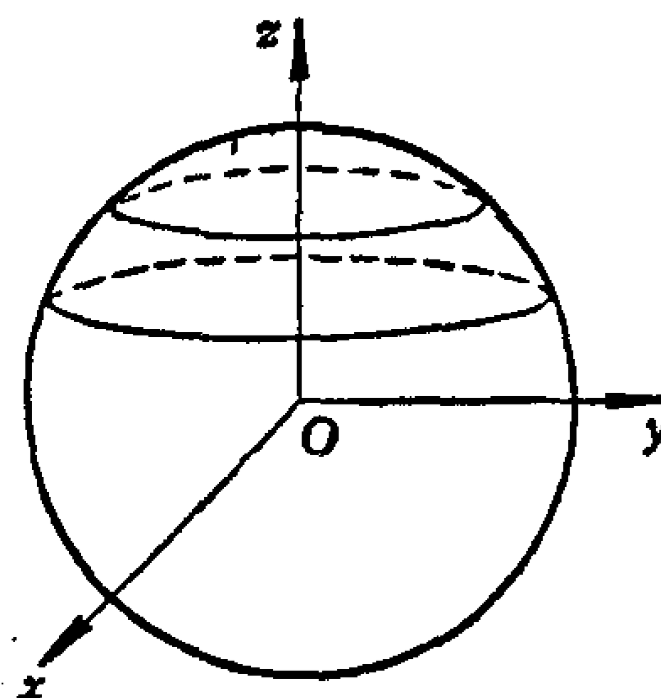


图 91

同法可以算出半径为 r 的圓面积是 πr^2.

我們也可以求半径为 r 的球体积，把一半径分为 n 分，依垂直于这半径的方向切片，第 i 切片，是一圓台，其上底与下底的半径分别等于 $r\sqrt{1-\left(\frac{i}{n}\right)^2}$ 与 $r\sqrt{1-\left(\frac{i-1}{n}\right)^2}$，所以第 i 片的体积在

$$\pi\left(1-\left(\frac{i-1}{n}\right)^2\right) r^2 \times \frac{r}{n} \quad 与 \quad \pi\left(1-\left(\frac{i}{n}\right)^2\right) r^2 \times \frac{r}{n}$$

之間，即在两柱之間，因而球体积 V 适合于

$$2\pi\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{n}\left(1-\left(\frac{i-1}{n}\right)^2\right) r^3 > V > 2\pi\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{n}\left(1-\left(\frac{i}{n}\right)^2\right) r^3.$$

由于

$$\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{1}{6} n(n+1)(2n+1),$$

可知

$$\lim_{n\to\infty} 2\pi\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{n}\left(1-\left(\frac{i}{n}\right)^2\right) r^3 = 2\pi r^3\left(1-\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^3}\sum_{i=1}^{n} i^2\right) = 2\pi r^3\left(1-\frac{1}{3}\right) = \frac{4}{3}\pi r^3.$$

后面的方法就是祖冲之的儿子祖暅之所用到的“綴术”．

§6. Archimedes 求抛物形面积法

求图形 OPM 的面积 Q.

图形 OPM 由抛物綫 $y = ax^2$ $(a > 0)$ 上的一部分 OM，x 軸上的綫段 OP 及綫段 PM 围成，将 OP 分成 n 等分，并在各部分上作一系列的內含及外包的矩形，如图 92 所示，其面积分别記之为 Q_n 及 Q_n'，而其面积之差，就等于最大外凸矩形之面积，也即 $\frac{x}{n}\cdot y$.

由

$$Q_n < Q < Q_n'$$

及

$$\lim_{n\to\infty}\frac{x}{n}\cdot y=0,$$

得

$$Q=\lim_{n\to\infty}Q_n=\lim_{n\to\infty}Q'_n,$$

各分点的坐标是

$$\frac{1}{n}x,\ \frac{2}{n}x,\ \cdots,\ \frac{i}{n}x,\ \cdots,\ \frac{n}{n}x=x,$$

其对应的高分别为

$$a\frac{1}{n^2}x^2,\ a\frac{2^2}{n^2}x^2,\ \cdots,\ a\frac{i^2}{n^2}x^2,\ \cdots,\ ax^2.$$

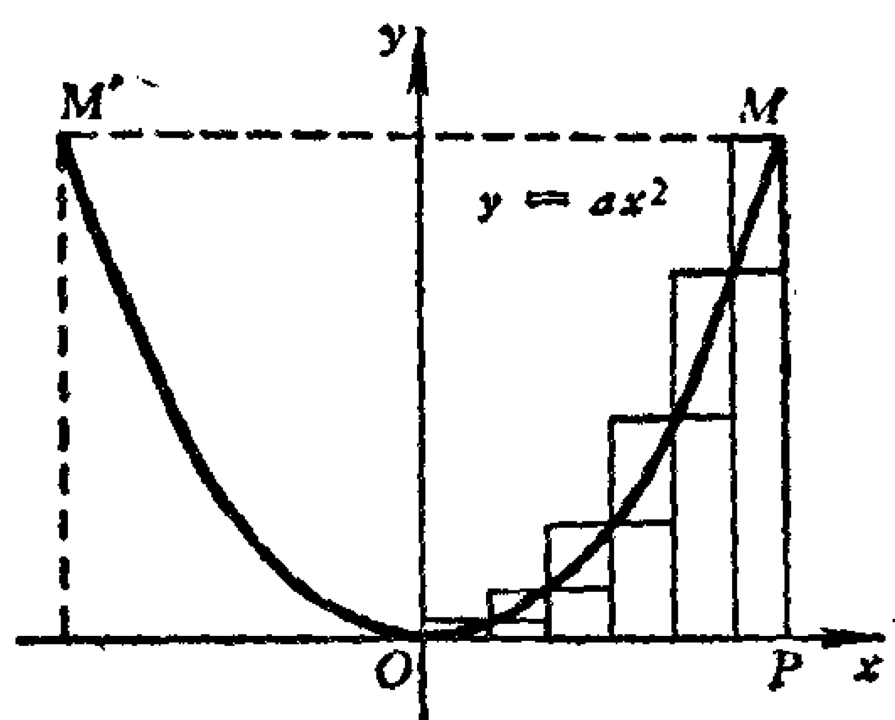


图 92

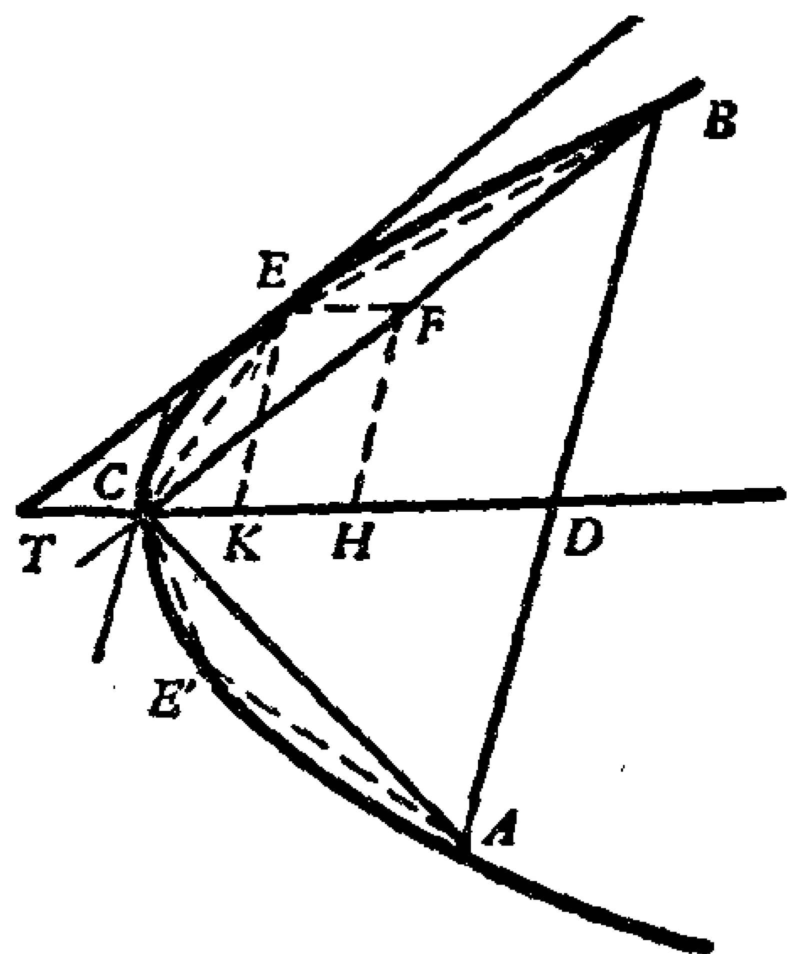


图 93

故得

$$Q'_n=\frac{ax^2}{n^2}(1^2+2^2+\cdots+n^2)\cdot\frac{x}{n}=\frac{ax^3}{6}\cdot\frac{(n+1)(2n+1)}{n^2},$$

因此

$$Q=\lim_{n\to\infty}Q'_n=\frac{ax^3}{3}=\frac{xy}{3}.$$

现在来談談 Achimede 原来算抛物形面积的方法:算出抛物綫 ACB 与弦 AB 之間的面积(图 93).

通过 AB 的中点D及与 AB 平行而切于抛物綫的切綫的切点C作一直綫,这直綫称为抛物綫的直径;再联弦 BC(与 CA),由之再作平行于 BC(与 CA)的切綫,切点在E(与E'),我們将証明:如果用S表 $\triangle ABC$ 的面积,则

$$\triangle BEC+\triangle CE'A=\frac{1}{4}S. \tag{1}$$

如果这一点証明了,再对 $\triangle BEC$(与 $\triangle CE'A$)繼行此法,經过n次后,总面积将等于

$$S+\frac{1}{4}S+\frac{1}{4^2}S+\cdots+\frac{1}{4^n}S=S\cdot\frac{1-\left(\frac{1}{4}\right)^n}{1-\frac{1}{4}}.$$

当 $n\to\infty$ 时,抛物形的面积将等于 $\frac{4}{3}S$,也就是由矢量 AB 与 CD 所做出的平行四边

形面积的 $\frac{2}{3}$ 倍.

我們現在来証明(1)式,实际上,祇需証明

$$\triangle BEC=\frac{1}{8}\triangle BAC,$$

由于这是有公底 BC 的三角形,所以如果我們能够証明 AB 所对应的直径 CD 是 BC 所对应的直径 EF 的长的 4 倍即足.

在 E 点作切綫交 CD 于 T,从 E 与 F 各作平行于 AB 的直綫交 CD 于 K, H. 因为 F 是 BC 的中点,所以 H 也是 CD 的中点,抛物綫的直径是平行的,所以 $EF=KH$. 因为 E 点的切綫平行于 BC,所以 $TC=EF$. 再由抛物綫的性質, $TC=CK$,所以得到

$$EF=CK=KH=\frac{1}{2}CH=\frac{1}{4}CD.$$

定理已經証明.

(这儿用了抛物綫的两个性質. 如果未曾学过,可以当作練习題).

§7. 旁压力的計算

决定长方形容器壁上的压力.

假定有一个盛滿了水的长方形容器,我們要求出在前壁上所承受的压力 P.

对底面說来問題很簡单,底上任一块地方的压力就等于在这一块上垂直水柱的重量,也就是等于这块地方的面积乘上水柱的高度 h.

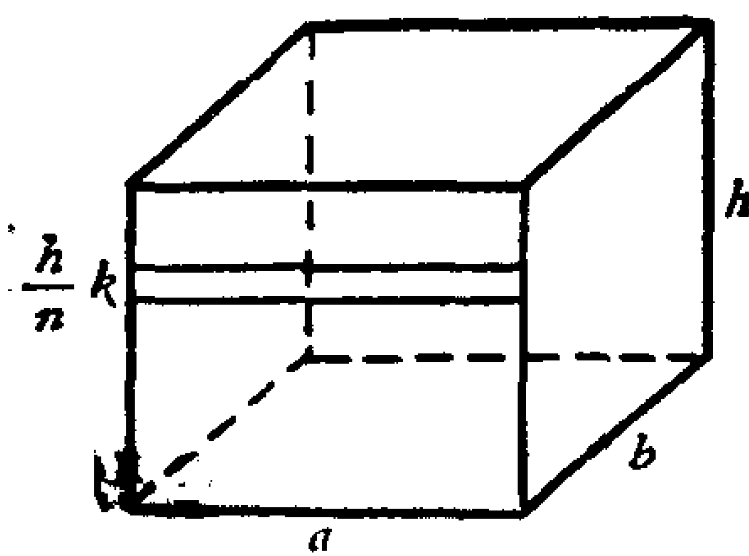


图 94

对一个小水滴来說,它四面八方所承受的压力应当是一样的,不然它就不会成为稳定的情况.

我們把前壁分为 n 个同样寬度的水平长条,每一条的寬度是 $\frac{h}{n}$. 我們現在考虑从上往下数的第 k 条,如果这一条是依水平面摆着,它上面所承受的压力应当是

$$P_k=\left(\text{在这一块上垂直水柱的高度}=k\frac{h}{n}\right)\times\left(\text{面积}=a\times\frac{h}{n}\right)=\frac{ah^2}{n^2}\cdot k.$$

当 n 充分大时,这就可以看成为在这条上的旁压力. 总起来旁压力等于

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}P_k=ah^2\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n}k=ah^2\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}\cdot\frac{1}{2}n(n+1)=\frac{1}{2}ah^2.$$

§8. 数 e

我們現在用极限来定义一个数 e. 命

$$x_n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^n.$$

先証明 x_n 是单調增加的:

$$x_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = 1 + n\cdot\frac{1}{n} + \frac{n(n-1)}{1\cdot 2}\frac{1}{n^2} + \frac{n(n-1)(n-2)}{1\cdot 2\cdot 3}\frac{1}{n^3} + \cdots +$$

$$+ \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{1\cdot 2\cdots k}\frac{1}{n^k} + \cdots + \frac{n(n-1)\cdots(n-n+1)}{1\cdot 2\cdots n}\frac{1}{n^n} =$$

$$= 1 + 1 + \frac{1}{2!}\left(1-\frac{1}{n}\right) + \frac{1}{3!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right) + \cdots +$$

$$+ \frac{1}{k!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{k-1}{n}\right) + \cdots +$$

$$+ \frac{1}{n!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{n-1}{n}\right).$$

若改 n 为 $n+1$,則因

$$1-\frac{s}{n} \leqslant 1-\frac{s}{n+1},$$

并且多了一項 $\frac{1}{(n+1)!}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)\cdots\left(1-\frac{n}{n+1}\right)$, 所以 $x_{n+1} > x_n$.

又因

$$x_n \leqslant 1+1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\cdots+\frac{1}{n!} < 1+1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{2^{n-1}} < 3,$$

所以 x_n 囿于上. 因之,貫 x_n 必有一有限的极限,用 e 表它,即

$$e = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n.$$

不論在分析学上或在应用方面,这个实数 e 都有极端重要性. 容易看到,它落在 2 与 3 之間. 事实上,它的前 15 位小数是

$$e = 2.71828\ 18284\ 59045\cdots.$$

由于 e 的一些性質(以后再說),使得选它作为对数系統的底能有特殊的方便. 以 e 为底的对数称为自然对数,以往用 10 为底的对数称为常用对数. 以 e 为底的对数,我們就以 log 来表它,而在其他情况則需表明底是什么. 例如,今后用 $\log_{10}$ 来表常用对数. 在理論的研究中,总是用自然对数.

以 10 为底的常用对数与自然对数的关系式是:

$$\log_{10} x = \log x \cdot M,$$

此处

$$M = \log_{10} e = \frac{1}{\log 10} = 0.434294.$$

这公式是从

$$x = e^{\log x}$$

两边求以 10 为底的对数而得.

現在来介紹 e 的近似計算法. 当 $k < n$ 时,

$$x_n > 2 + \frac{1}{2!}\left(1-\frac{1}{n}\right) + \frac{1}{3!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right) + \cdots +$$

$$+ \frac{1}{k!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{k-1}{n}\right).$$

命 $n\to\infty$,

$$e\geqslant 2+\frac{1}{2!}+\cdots+\frac{1}{k!}=y_k.$$

于是由

$$x_n<y_n\leqslant e$$

得

$$e=\lim_{n\to\infty}x_n=\lim_{n\to\infty}y_n=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}.$$

在計算 e 的近似值时,用 y_n 比較方便,由于

$$\begin{aligned}y_{n+m}-y_n&=\frac{1}{(n+1)!}+\frac{1}{(n+2)!}+\cdots+\frac{1}{(n+m)!}=\\&=\frac{1}{(n+1)!}\left\{1+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{(n+2)\cdots(n+m)}\right\}<\\&<\frac{1}{(n+1)!}\left\{1+\frac{1}{n+2}+\frac{1}{(n+2)^2}+\cdots+\frac{1}{(n+2)^{m-1}}\right\}<\\&<\frac{1}{(n+1)!}\cdot\frac{n+2}{n+1},\end{aligned}$$

命 $m\to\infty$, 乃得

$$0<e-y_n<\frac{1}{n!n},$$

此处用到 $\frac{n+2}{(n+1)^2}<\frac{1}{n}$. 故得

$$e=1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\cdots+\frac{1}{n!}+\frac{\theta}{n!n},\quad 0<\theta<1.$$

用这公式就可对 e 进行近似計算,例如希望准确至 $\frac{1}{10^7}$, 取 $n=10$,

$$\frac{\theta}{n!n}=\frac{\theta}{10!10}<0.00000003.$$

其他各項在第八位小数上四舍五入,則最大誤差在絕对值上不超过 $\frac{1}{2\cdot10^8}$. 現在分别将各項的近似值写下:

$$\begin{array}{r}2.000\,000\,00\\1/2!=0.500\,000\,00\\1/3!=0.166\,666\,67-\\1/4!=0.041\,666\,67-\\1/5!=0.008\,333\,33+\\1/6!=0.001\,388\,89-\\1/7!=0.000\,198\,41+\\1/8!=0.000\,024\,80+\\1/9!=0.000\,002\,76-\\1/10!=0.000\,000\,28-\\\hline 2.718\,281\,81-\end{array}$$

可知 e 的近似值的总校正数必在 $-\frac{3}{10^8}$ 及 $\frac{5}{10^8}$ 之间,由此得出 e 位于

$$2.718\,281\,78 \quad 及 \quad 2.718\,281\,86$$

之间.

在此容易得出 e 是无理数. 倘若不然,若 $e=\frac{m}{n}$, 则

$$e=\frac{m}{n}=1+\frac{1}{1!}+\cdots+\frac{1}{n!}+\frac{\theta}{n!n} \quad (0<\theta<1).$$

等式双方乘以 $n!$, 则得出 $\frac{\theta}{n}$ 为一整数. 此不可能,所以 e 是无理数.

§9. 连 续 趋 限

假定 $f(x)$ 是一函数, 它在 $x=a$ 附近定义, 也就是有一 $d>0$ 存在, 使 $f(x)$ 在 $0<|x-a|<d$ 中定义.

如果对任一 $\varepsilon>0$, 我们能求出 $\delta>0$, 使在 $0<|x-a|<\delta$ 时

$$|f(x)-A|<\varepsilon,$$

则称为: 当 $x\to a$ 时, $f(x)\to A$. A 称为 $f(x)$ 在 $x\to a$ 时的极限,记之为

$$\lim_{x\to a}f(x)=A.$$

我们可以定义右极限,即对任一 $\varepsilon>0$, 能求出 $\delta>0$, 使当 $0<x-a<\delta$ 时

$$|f(x)-A|<\varepsilon.$$

记之为

$$A=\lim_{x\to a+0}f(x) \quad 或 \quad A=f(a+0),$$

同法定义左极限,

$$\lim_{x\to a-0}f(x) \quad 或 \quad f(a-0).$$

我们可以类似地定义上极限与下极限.

例 1. 函数 $f(x)=x-[x]-\frac{1}{2}$,在 0 点的极限是不存在的, 但是, $f(0+0)=$ $=-\frac{1}{2}$, $f(0-0)=\frac{1}{2}$.

对任一 $E>0$, 如果有 $\delta>0$ 存在,使当 $0<|x-a|<\delta$ 时, $|f(x)|>E$, 则称为: 当 $x\to a$ 时, $f(x)$ 趋向无穷.

例 2. 当 $x\to 0$ 时, $\frac{1}{x}$ 趋向无穷,但

$$\lim_{x\to+0}\frac{1}{x}=+\infty, \quad \lim_{x\to-0}\frac{1}{x}=-\infty.$$

例 3. 当 $x\to 0$ 时, $\frac{1}{x^2}\to+\infty$.

例 4. 当 $x\to\pm 0$ 时, $\operatorname{ctg}x\to\pm\infty$.

又若对任一 $\varepsilon>0$, 有正数 K 存在,使当 $x>K$ 时,

$$|f(x)-A|<\varepsilon,$$

甲

乙

则定义为

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = A.$$

同法可以定义

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty.$$

的情况等等.

連續趋限可以归結为貫的趋限法.

命 $x_1, x_2\cdots, x_n, \cdots$ 是任何一个趋向于 a 的貫,定义

$$f(x_n) = y_n.$$

如果 $\lim\limits_{x\to a} f(x) = A$, 則有

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = \lim_{n\to\infty} y_n = A;$$

反之,如果对任何一个趋向于 a 的貫 x_n, 都有此性质,則不难証明

$$\lim_{x\to a} f(x) = A.$$

事实上,倘若 $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ 不存在,或存在而不等于 A, 則由极限的定义,必存在 ε, 使对无論怎样小的 δ,在 $0<|x-a|<\delta$ 中,都必有点 x,使

$$|f(x) - A| > \varepsilon.$$

于是我們命 δ_n 为一趋向于 0 的貫,而命 x_n 为落在 $0<|x-a|<\delta_n$ 中且使

$$|f(x_n) - A| > \varepsilon \tag{1}$$

成立的点,則 x_n 为一趋向于 a 的貫. 由(1)可知, 当 $n\to\infty$ 时, $f(x_n)$ 不能趋于 A, 但这与假設矛盾. 所以必須有

$$\lim_{x\to a} f(x) = A.$$

相当的 Cauchy 判定条件是

定理 1. 当 $x\to a$ 时,函数 $f(x)$有有限极限的必要且充分条件是: 給了任一 $\varepsilon>0$, 必存在 $\delta>0$,使适合于

$$0<|x-a|<\delta, \quad 0<|x'-a|<\delta$$

的 x 与 x' 常有不等式

$$|f(x) - f(x')| < \varepsilon.$$

証明的方法与貫趋极限的証明完全相仿,讀者自証之. 并試叙述 $a=\infty$ 时的相仿定理.

又易証:如果下式右边两項都存在,則有

$$\lim_{x\to a}(f(x)\pm g(x)) = \lim_{x\to a} f(x) \pm \lim_{x\to a} g(x),$$

$$\lim_{x\to a} f(x)g(x) = \lim_{x\to a} f(x) \lim_{x\to a} g(x).$$

又如果 $\lim\limits_{x\to a} g(x) \neq 0$,則

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a} f(x)/\lim_{x\to a} g(x).$$

習題. 在球面三角的諸公式中,取 $\alpha=\frac{a}{R}$, $\beta=\frac{b}{R}$, $\gamma=\frac{c}{R}$, 命 $R\to\infty$,則得平面三角所有的公式.

§ 10. 几个重要极限

$1°$. $e=\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x$.

前已証明了

$$e=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n,$$

因此对于任何一个趨向无穷的整数貫 $\{n_k\}$,

$$e=\lim_{k\to\infty}\left(1+\frac{1}{n_k}\right)^{n_k}.$$

今設 x 依任何趨向于 $+\infty$ 的序列 $\{x_k\}$ 而递变，并且可以当作一切 $x_k>1$. 命 $n_k=[x_k]$,于是

$$n_k\leqslant x_k<n_k+1,$$

及 $n_k\to\infty$. 由

$$\frac{1}{n_k+1}<\frac{1}{x_k}\leqslant\frac{1}{n_k},$$

可得

$$\left(1+\frac{1}{n_k+1}\right)^{n_k}<\left(1+\frac{1}{x_k}\right)^{x_k}<\left(1+\frac{1}{n_k}\right)^{n_k+1}.$$

由

$$\lim_{k\to\infty}\left(1+\frac{1}{n_k}\right)^{n_k}=\lim_{k\to\infty}\left(1+\frac{1}{n_k+1}\right)^{n_k+1}=e$$

及

$$\left(1+\frac{1}{n_k}\right)\to1,\quad\left(1+\frac{1}{n_k+1}\right)^{-1}\to1,$$

得到

$$\lim_{k\to\infty}\left(1+\frac{1}{x_k}\right)^{x_k}=e.$$

所以得 $1°$.

再研究 $x_k\to-\infty$,命 $x_k=-y_k$,则 $y_k\to+\infty$. 显然

$$\left(1+\frac{1}{x_k}\right)^{x_k}=\left(1-\frac{1}{y_k}\right)^{-y_k}=\left(\frac{y_k}{y_k-1}\right)^{y_k}=\left(1+\frac{1}{y_k-1}\right)^{y_k-1}\left(1+\frac{1}{y_k-1}\right),$$

所以

$$\lim_{x\to-\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=e.$$

把 x 换成 $\frac{1}{\alpha}$, 则得

$$e=\lim_{\alpha\to0}(1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}}.$$

例 1. $\lim\limits_{\alpha\to0}(1+\alpha x)^{\frac{1}{\alpha}}=e^x$.

$2°$. $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin x}{x}=1$.

由(5.1)式可知,在 $0 < x < \frac{\pi}{2}$ 的假定下,有

$$1 > \frac{\sin x}{x} > \cos x,$$

因此

$$0 < 1 - \frac{\sin x}{x} < 1 - \cos x = 2\sin^2\frac{x}{2} < 2\sin\frac{x}{2} < x.$$

因而得出

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1.$$

例 2.

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2} = \frac{1}{2}.$$

由

$$1 - \cos x = 2\sin^2\frac{x}{2}$$

可知,

$$\frac{1-\cos x}{x^2} = \frac{2\sin^2\frac{x}{2}}{x^2} = \frac{1}{2}\left(\frac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}\right)^2 \to \frac{1}{2}.$$

例 3.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg} x - \sin x}{x^3} = \frac{1}{2}.$$

由

$$\frac{\operatorname{tg} x - \sin x}{x^3} = \frac{1}{\cos x}\,\frac{\sin x}{x}\cdot\frac{1-\cos x}{x^2},$$

及 $\cos x \to 1$ 可得結果.

例 4.

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\left(\frac{\sec x - \operatorname{tg} x}{x - \frac{\pi}{2}}\right) = -\frac{1}{2}.$$

换变数 $a = \frac{\pi}{2} - x$,则当 $x \to \frac{\pi}{2}$ 时 $a \to 0$. 所以

$$\sec x - \operatorname{tg} x = \csc a - \operatorname{ctg} a = \frac{1-\cos a}{\sin a} = \frac{1-\cos a}{a^2}\,\frac{a}{\sin a}\cdot a.$$

故得所求.

§11. 一 些 例 子

1°. 研究当 $x \to \infty$ 时, $\sin x$ 的情况.

对任意一个絕对值小于 1 的数 α,一定有一个 $x_0\left(|x_0| \leqslant \frac{\pi}{2}\right)$, 使 $\sin x_0 = \alpha$. 从而在点 $x_0 + 2\pi n(n = \pm 1, \pm 2, \cdots)$ 上也有

$$\sin(x_0 + 2\pi n) = \alpha,$$

所以

$$\lim_{n\to\infty}\sin(x_0+2\pi n)=\alpha.$$

所以 $\sin x$ 沒有极限.

2°. 我們研究函数 $y=\sin\frac{1}{x}$ 在 $x\to 0$ 时的情况.

取递减于 0 的 x 的数值:

$$\frac{2}{\pi},\ \frac{1}{\pi},\ \frac{2}{3\pi},\ \frac{1}{2\pi},\ \frac{2}{5\pi},\ \cdots,\ \frac{2}{(2n-1)\pi},\ \frac{1}{n\pi},\ \frac{2}{(2n+1)\pi},\ \cdots,$$

与它們对应的递增至 ∞ 的 $\frac{1}{x}$ 的数值是

$$\frac{\pi}{2},\ \pi,\ \frac{3\pi}{2},\ 2\pi,\ \frac{5\pi}{2},\ \cdots,\ \frac{(2n-1)\pi}{2},\ n\pi,\ \frac{(2n+1)}{2}\pi,\ \cdots.$$

在上述各相邻的区間內,函数 $\sin\frac{1}{x}$ 的值由 1 減至 0,再由 0 減至 -1,然后又由 -1 增至 0,再由 0 增至 1. 如此反复不已. 由于 $\sin x$ 是奇函数,所以关于原点,图形是对称的.

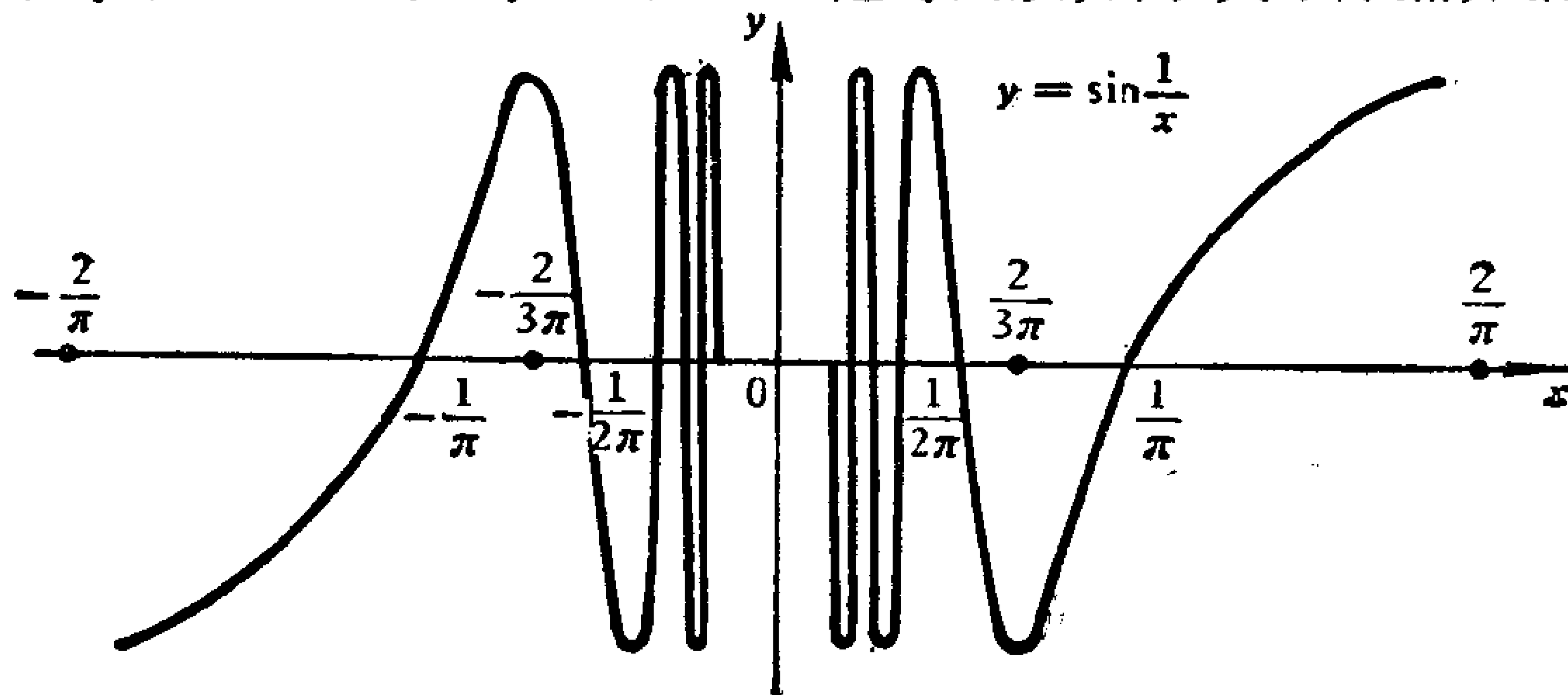


图 95

3°. 我們再来考虑函数 $y=x\sin\frac{1}{x}$ 在 $x=0$ 时的情况.

由

$$\left|x\sin\frac{1}{x}\right|\leqslant|x|\quad(x\neq 0),$$

得

$$\lim_{x\to 0}x\sin\frac{1}{x}=0.$$

但当 $x\to 0$ 时,函数 $y=x\sin\frac{1}{x}$ 仍发生无数次的振动,不过振幅逐漸減少而趋于零. 故极限仍存在,如图 96 所示.

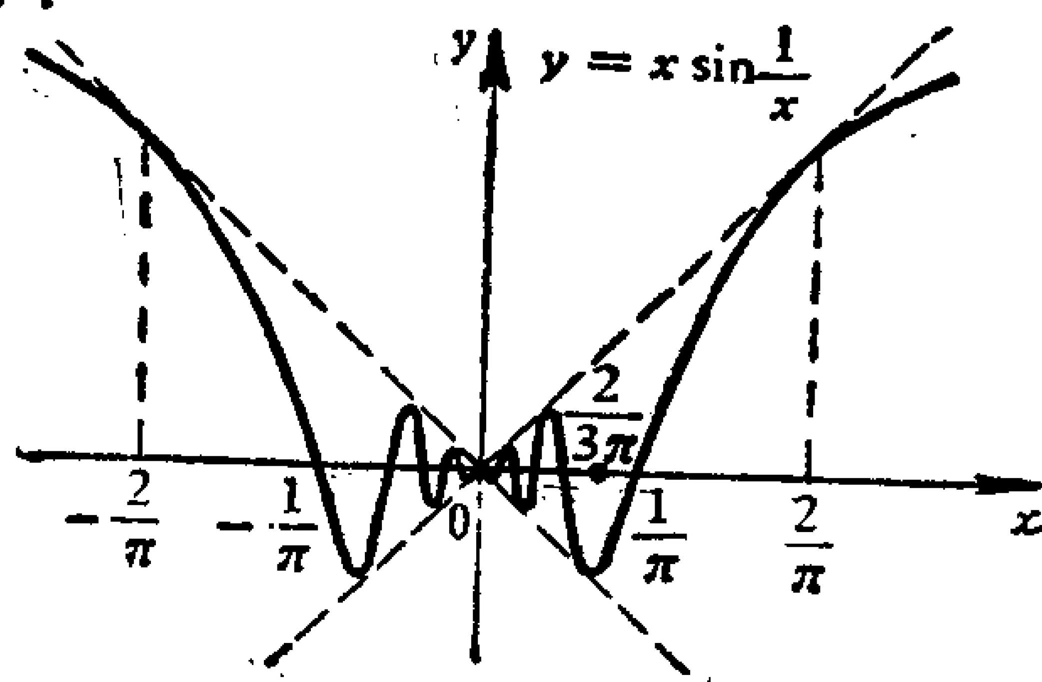


图 96

4°. 对任意有理数 r 常有

$$\lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^r-1}{x}=r.$$

証. 先研究 $r=n$ 是自然数的情况:由二項式定理得到

$$\frac{(1+x)^n-1}{x}=n+\frac{n(n-1)}{1\cdot 2}x+\cdots+x^{n-1}\to n\quad(\text{当 } x\to 0 \text{ 时}).$$

再研究 $r=\frac{1}{m}$ (m 是自然数)的情况. 命

$$\sqrt[m]{1+x}-1=y,$$

则 $x=(1+y)^m-1$. 我們有

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[m]{1+x}-1}{x}=\lim_{y\to 0}\frac{y}{(1+y)^m-1}=\frac{1}{m}.$$

对于一般情形 $r=\frac{n}{m}$, 仍用以上的变换,当 $y\to 0$ 时,有

$$\frac{(1+x)^{n/m}-1}{x}=\frac{(1+y)^n-1}{(1+y)^m-1}=\frac{(1+y)^n-1}{y}\,\frac{y}{(1+y)^m-1}\to\frac{n}{m}.$$

§12. 无穷大之阶

当 $x\to\infty$ 时,如果 $y=f(x)$ 也趋向于 ∞, 则 y 称为一个无穷大. 如果

$$0<\varliminf_{x\to\infty}\frac{z}{y}\leqslant\varlimsup_{x\to\infty}\frac{z}{y}<\infty,$$

则称 z 与 y 有相同的阶,用 $z\asymp y$ 表之. 如果

$$\lim_{x\to\infty}\frac{z}{y}=\infty,$$

则称 z 的阶大于 y 的阶,用 $y\prec z$ 表示. 显然有:如果 $y\prec z$, $z\prec w$,则 $y\prec w$. 又有

$$\cdots\prec x^{\frac{1}{3}}\prec x^{\frac{1}{2}}\prec x\prec x^2\prec x^3\prec x^4\prec\cdots.$$

又对任意二实数 $\alpha<\beta$,常有

$$x^\alpha\prec x^\beta.$$

例1. 命

$$p(x)=a_0x^k+a_1x^{k-1}+\cdots+a_{k-1}x+a_k,\quad a_0>0,$$
$$q(x)=b_0x^l+b_1x^{l-1}+\cdots+b_{l-1}x+b_l,\quad b_0>0.$$

我們可以証明: 按照 $k>l$, $k=l$ 及 $k<l$,分别有

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{p(x)}{q(x)}=\infty,\quad\frac{a_0}{b_0},\quad 0.$$

再研究,当 $a>1$ 时,有

$$\lim_{x\to\infty}\frac{a^x}{x}=\infty.$$

命 $n = [x]$,则

$$\frac{a^x}{x} \geqslant \frac{a^n}{n+1} \geqslant \frac{(a-1)^2 n^2}{4(n+1)} \to \infty.$$

此处用了:若 $a = 1 + \lambda$, 当 $n > 2$ 时,

$$a^n = (1+\lambda)^n = 1 + n\lambda + \frac{n(n-1)}{2}\lambda^2 + \cdots > \frac{n(n-1)}{2}\lambda^2 > \frac{(a-1)^2}{4}n^2.$$

对任一 $\alpha > 0$,我們命 $a^{\frac{1}{\alpha}} = b$,则

$$\lim_{x\to\infty}\frac{a^x}{x^\alpha} = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{a^{\frac{1}{\alpha}x}}{x}\right)^\alpha = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{b^x}{x}\right)^\alpha = \infty.$$

所以对任一 $\alpha > 0$,常有

$$x^\alpha \prec a^x.$$

又命 $x = \log_a y$,则得

$$\log_a y \prec y^{\frac{1}{\alpha}},$$

即可得出一系列的无穷大之阶

$$x^\alpha \prec e^x \prec e^{e^x} \prec e^{e^{e^x}} \prec \cdots$$

及

$$x^\alpha \succ \log x \succ \log\log x \succ \log\log\log x \succ \cdots.$$

§ 13. 符号 $\sim$, O 与 o

现在研究 $x \to a$ 的情况. $g(x)$ 是一正值函数. 如果

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} = 1,$$

我們用符号 $f(x) \sim g(x)$ 来表示. 如果

$$\overline{\lim_{x\to a}}\frac{|f(x)|}{g(x)} < \infty,$$

则用

$$f(x) = O(g(x))$$

来表示. 又若

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} = 0,$$

我們就用

$$f(x) = o(g(x))$$

来表示.

例 1. 当 $x \to \infty$ 时, $\sin x = O(1)$.

例 2. 当 $x \to \infty$ 时, $x^k = o(e^x)$.

例 3. 当 $x \to 0$ 时,

$$\sin x = x + o(x) \quad 或 \quad \sin x \sim x.$$

这就是 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1$ 的改写.

例 4. 当 $x \to 0$ 时,

$$\cos x = 1 - \frac{1}{2}x^2 + o(x^2) \text{ 或 } 1 - \cos x \sim \frac{1}{2}x^2.$$

例 5. 当 $x \to 0$ 时,

$$\operatorname{tg} x - \sin x \sim \frac{1}{2} x^3 \text{ 或 } \operatorname{tg} x = \sin x + \frac{1}{2} x^3 + o(x^3).$$

例 6. 当 $x \to +\infty$ 时,

$$\sqrt{x+1} + \sqrt{x-1} - 2\sqrt{x} \sim -\frac{1}{4}\left(\frac{1}{x}\right)^{\frac{3}{2}}.$$

这些例子也建議我們精密更精密的过程. 更淸楚些,还是举一个例.

例 7. 当 $x \to 0$ 时,我們首先知道(m 自然数)

$$\sqrt[m]{1+x} \sim 1.$$

那也就是 $\sqrt[m]{1+x} - 1 \to 0$. 其次便进一步研究, $\sqrt[m]{1+x} - 1$ 如何趋于 0. 我們前已証明

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sqrt[m]{1+x} - 1}{x} = \frac{1}{m},$$

也就是得到更精密一步的結果:

$$\sqrt[m]{1+x} = 1 + \frac{1}{m} x + g(x), \quad \text{而} \quad g(x) = o(x).$$

换变数 $\sqrt[m]{1+x} - 1 = y$, 則

$$\frac{\sqrt[m]{1+x} - 1 - \frac{1}{m} x}{x^2} = \frac{y - \frac{1}{m}((1+y)^m - 1)}{((1+y)^m - 1)^2} = \frac{-\frac{m-1}{2} y^2 + \cdots}{m^2 y^2 + \cdots} =$$

$$= \frac{-\frac{m-1}{2} + \cdots}{m^2 + \cdots} \to -\frac{m-1}{2m^2}.$$

所以又得到更精密的公式

$$\sqrt[m]{1+x} = 1 + \frac{1}{m} x - \frac{m-1}{2m^2} x^2 + o(x^2);$$

换言之,

$$\sqrt[m]{1+x} \quad \text{与} \quad 1,\ 1 + \frac{1}{m} x, \quad 1 + \frac{1}{m} x - \frac{m-1}{2m^2} x^2$$

所差的无穷小的阶一个高于一个. 当然我們还能求出更精密的表示式来,这表示式称为原函数的主要部分. 在应用的时候,原函数与它主要部分的誤差往往可以略去不計.

例 8. 用 l 米长的直尺量直綫长度时, 因为沒有把尺准确地沿着直綫放好, 因此量得的結果往往比眞实的长度大一些. 假如尺的两端距直綫的距离都是 λ 米,今估計其誤差.

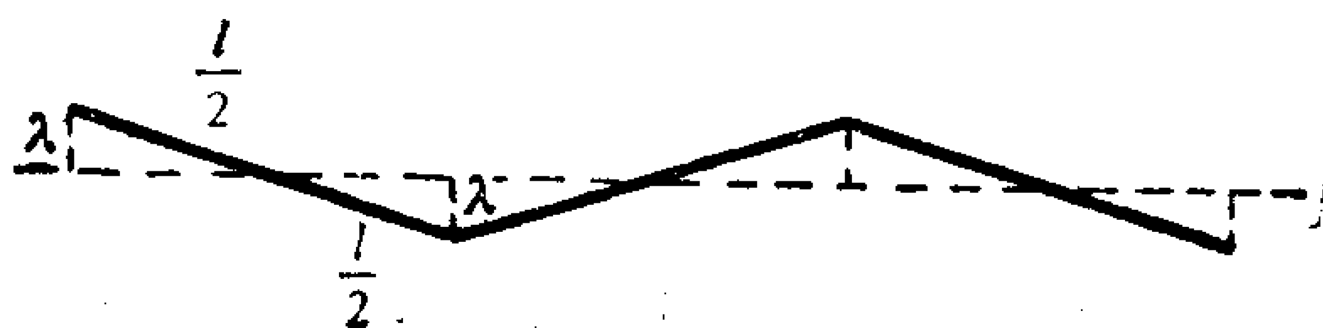


图 97

尺在直綫上的投影是

$$2\sqrt{\left(\frac{l}{2}\right)^2-\lambda^2}=l\sqrt{1-\frac{4\lambda^2}{l^2}}.$$

由于λ比l小得多，由例7投影长度可以換为

$$l\left(1-\frac{2\lambda^2}{l^2}\right)=l-\frac{2\lambda^2}{l}.$$

因此絕对誤差是 $\frac{2\lambda^2}{l}$，相对誤差是 $\frac{2\lambda^2}{l^2}$.

例 9. 求套在一对滑輪上的皮带的长度. 滑輪的半径各为R及r，中心的距离为d，则

$$\frac{l}{2}=\widehat{AC}+Cc+\widehat{ca}.$$

由于 $\widehat{AC}=R\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)$, $\widehat{ca}=r\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)$ 及

$$Cc=Do=\sqrt{d^2-(R-r)^2},$$

乃得

$$l=\pi(R+r)+2\alpha(R-r)+2\sqrt{d^2-(R-r)^2}.$$

若 $R-r$ 相对于d来說很小，则有

$$\alpha\doteq\sin\alpha=\frac{R-r}{d}$$

及

$$\sqrt{d^2-(R-r)^2}=d\left(1-\left(\frac{R-r}{d}\right)^2\right)^{\frac{1}{2}}\doteq d\left[1-\frac{1}{2}\left(\frac{R-r}{d}\right)^2\right],$$

故得

$$l\doteq\pi(R+r)+2d+\frac{(R-r)^2}{d}.$$

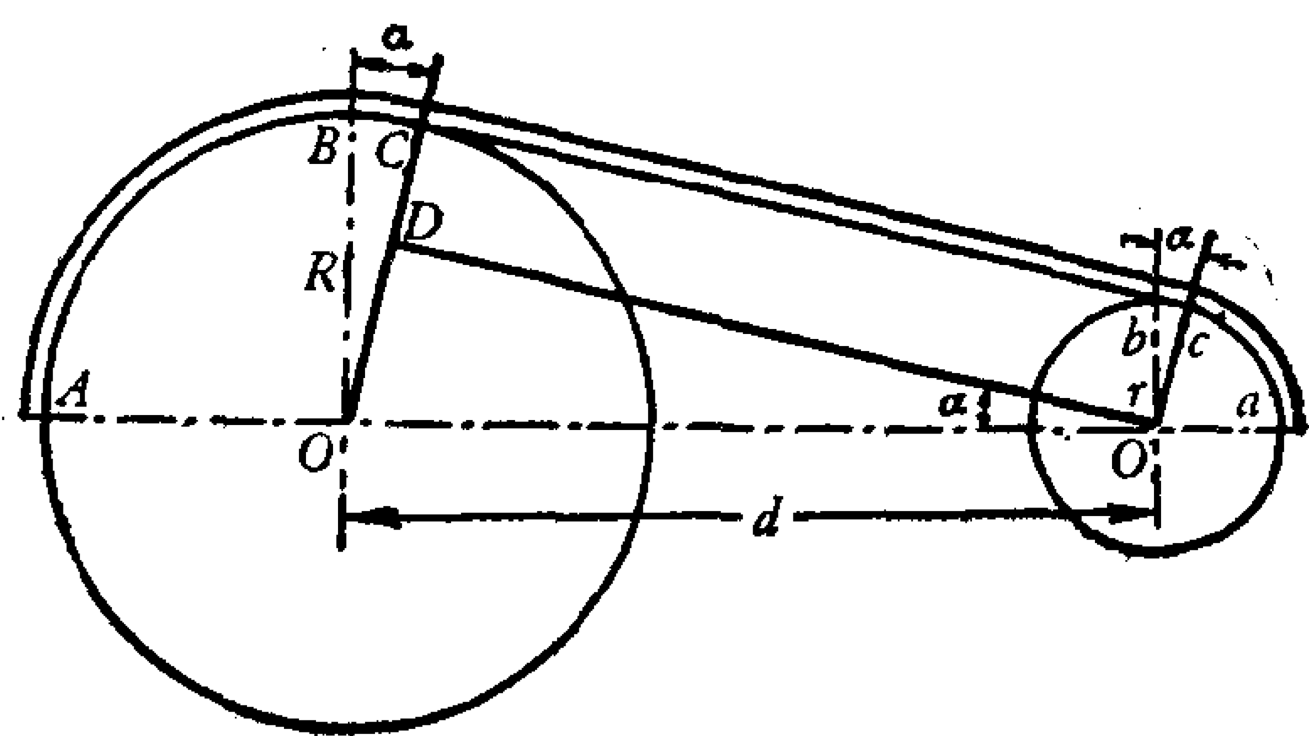


图 98

例 10. 求圓弧 ABC 內的矢 $f=DB$ 与其半弧 AB_1B 的矢 $f_1=D_1B_1$ 的比值. 若圓的半径为 r, $\angle AOB=\varphi$，則 $\angle AOB_1=\varphi/2$. 故

$$\frac{f}{f_1}=\frac{r(1-\cos\varphi)}{r\left(1-\cos\frac{\varphi}{2}\right)}=\frac{1-\cos\varphi}{1-\cos\frac{\varphi}{2}}.$$

当 $\varphi \to 0$,则由 § 10 例 2 得到

$$\lim_{\varphi\to 0}\frac{f}{f_1}=\lim_{\varphi\to 0}\frac{\frac{1}{2}\varphi^2}{\frac{1}{2}\left(\frac{\varphi}{2}\right)^2}=4,$$

故当 φ 很微小时；$\frac{f}{f_1}$ 的值可以用 4 代之.

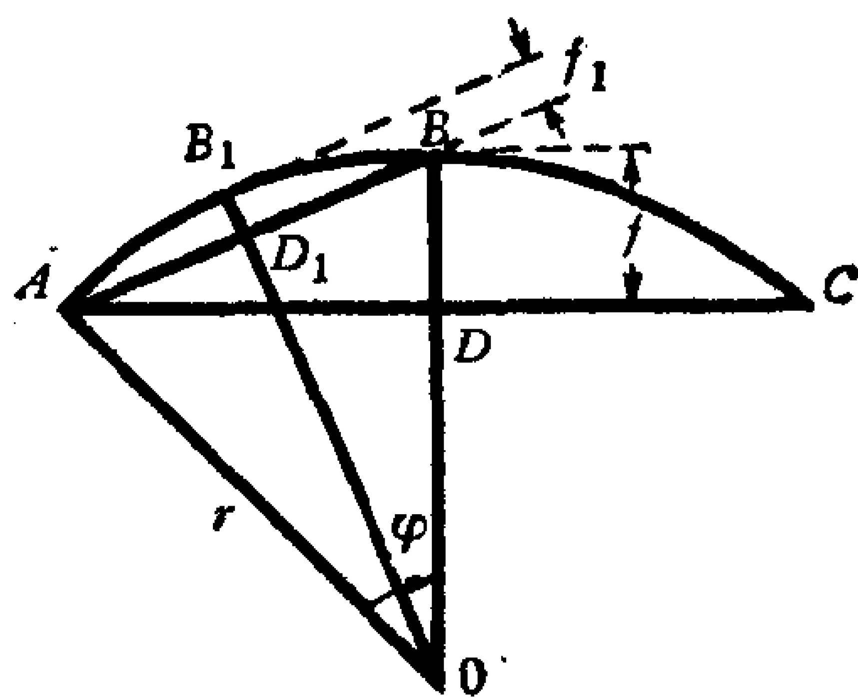


图 99

§ 14. 連續函数

定义. 命 $f(x)$ 是一函数，它在某一点 x_0 附近定义. 如果 $f(x_0-0)=f(x_0)=f(x_0+0)$,则称此函数在 $x=x_0$ 連續. 如果有 $f(x_0)=f(x_0+0)$,则称为右連續. 如果 $f(x_0)=f(x_0-0)$,则称为左連續.

使函数不連續的点称为函数的間断点.

例 1. $[x]$ 是一个函数,它在整数点上間断,而在其他点上連續.

如果函数 $f(x)$ 在一区間的每一点上都連續,则称 $f(x)$ 在这区間上連續.

請讀者細看第三章的函数的图形,看出那些函数在什么样的点上連續或間断.

定理 1. 若二函数 $f(x)$ 与 $g(x)$ 都在 x_0 点上連續,则

$$f(x)\pm g(x),\quad f(x)g(x),\quad \frac{f(x)}{g(x)}$$

都在那点上連續,但对商我們必須假定 $g(x_0)\neq 0$.

这可以直接从极限性质推出. 現在討論一些常用的連續性质.

定理 2. 如果 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 处連續，且 $f(x_0)=y_0$, 又 $\varphi(y)$ 在 $y=y_0$ 处連續,则 $\varphi(f(x))$ 在 $x=x_0$ 处也連續.

証. 給了任意 $\varepsilon>0$. 因为 $\varphi(y)$ 在 $y=y_0$ 連續,所以必有 σ,使当 $|y-y_0|<\sigma$ 时，$|\varphi(y)-\varphi(y_0)|<\varepsilon$; 另一方面，因为 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 連續，所以必有 δ, 使当 $|x-x_0|<\delta$ 时，$|f(x)-y_0|<\sigma$,从而

$$|\varphi(f(x))-\varphi(f(x_0))|=|\varphi(y)-\varphi(y_0)|<\varepsilon.$$

所以 $\varphi(f(x))$ 在 $x=x_0$ 連續.

1°. 有理函数.

$f(x)=x$ 显然是 $(-\infty, +\infty)$ 內的連續函数. 根据定理 1,

$$\overbrace{a \cdot x \cdot x \cdots x}^{m\text{次}} = ax^m$$

也連續;而

$$a_0x^m + a_1x^{m-1} + \cdots + a_{m-1}x + a_m$$

是連續函数的和所以也連續. 所以多項式(或称有理整函数)在 $(-\infty, \infty)$ 內是連續的.

两多項式的商(称为有理函数)

$$\frac{a_0x^m + a_1x^{m-1} + \cdots + a_{m-1}x + a_m}{b_0x^l + b_1x^{l-1} + \cdots + b_{l-1}x + b_l}$$

除了在使分母为 0 的一些点上外,也是連續的.

2°. 指数函数.

假定 $a > 1$. 如果我們能够証明

$$\lim_{x\to 0} a^x = 1,$$

則得

$$\lim_{x\to x_0} a^x = \lim_{x\to x_0} a^{x_0+(x-x_0)} = a^{x_0}\lim_{y\to 0} a^y = a^{x_0}.$$

換言之, a^x 是一个連續函数.

由 § 1 例 3, 我們已經証明了

$$\lim_{n\to\infty} a^{\frac{1}{n}} = 1.$$

命 $\left[\frac{1}{x}\right] = n$, 則 $\frac{1}{n+1} < x \leqslant \frac{1}{n}$, 所以得到 $a^{\frac{1}{n+1}} < a^x \leqslant a^{\frac{1}{n}}$. 当 x 充分小时, 显然 $a^{\frac{1}{n}} < 1+\varepsilon$, 而 $a^{\frac{1}{n+1}} > 1-\varepsilon$, 所以 $|a^x - 1| < \varepsilon$.

卽得所証.

关于 e^x 的图形見图 100.

3°. 对数函数.

$$y = \log x$$

是指数函数的反函数,在 $(0, \infty)$ 之間这函数是連續的.

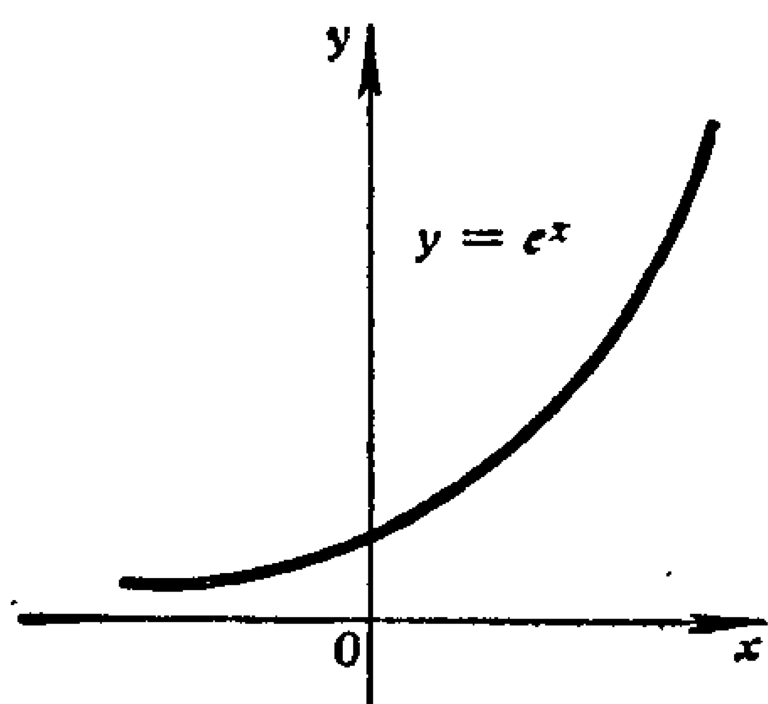


图 100

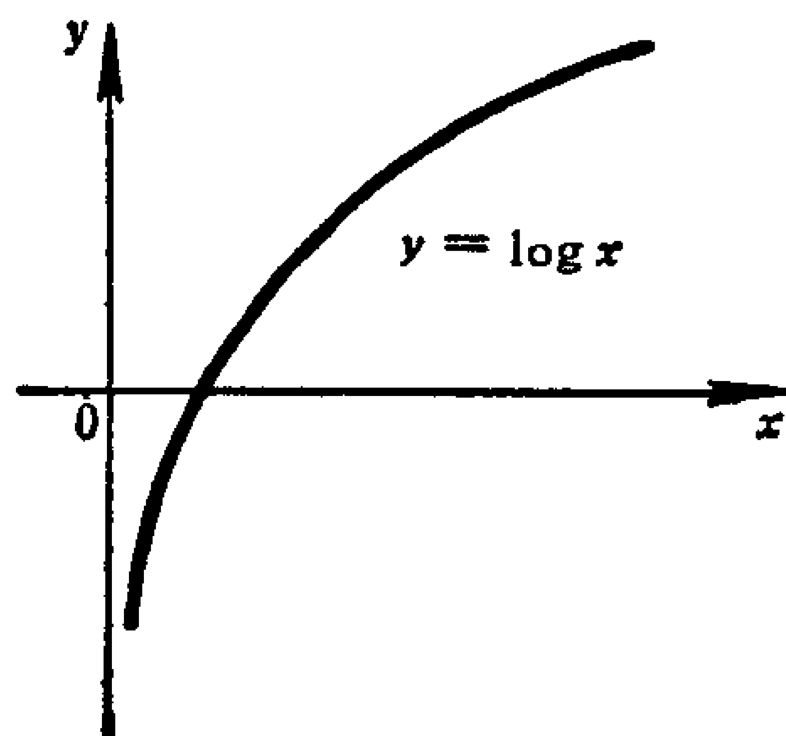


图 101

4°. 三角函数.

先証 $\lim_{x\to x_0} \sin x = \sin x_0$. 由

$$\sin x - \sin x_0 = 2\sin\frac{1}{2}(x - x_0)\cos\frac{1}{2}(x + x_0)$$

可知

$$|\sin x - \sin x_0| \leqslant 2\left|\sin\frac{1}{2}(x - x_0)\right| \leqslant |x - x_0|,$$

此处用了 $|\sin x| \leqslant |x|$ 及 $|\cos x| \leqslant 1$. 因此 $\sin x$ 連續.

由于 $\cos x = \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$, $\cos x$ 也連續. 由

$$\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x}, \quad \sec x = \frac{1}{\cos x}, \quad \operatorname{ctg} x = \frac{\cos x}{\sin x}, \quad \csc x = \frac{1}{\sin x}$$

可知,除去使 $\cos x = 0$ 的諸点外, $\operatorname{tg} x$, $\sec x$ 都是連續的. 除去使 $\sin x = 0$ 的諸点外, $\operatorname{ctg} x$, $\csc x$ 都連續.

5°. 反三角函数.

$$y = \arcsin x, \quad y = \arccos x$$

在 $[-1, +1]$ 之間連續;又

$$y = \operatorname{arc\,tg} x, \quad y = \operatorname{arc\,ctg} x$$

在 $(-\infty, \infty)$ 之間連續;而

$$y = \operatorname{arc\,sec} x, \quad y = \operatorname{arc\,csc} x$$

在 $(-\infty, -1)$, $(1, \infty)$ 間連續.

讀者不难研究 e^{e^x}, $\log\log x$, $\log\sin x$, $\log\operatorname{tg} x$ 等的連續性問題.

§15. 間 断 种 种

已經說过右連續和左連續, 当然也就有右間断和左間断. 我們举些例子来識别間断性.

1) 我們定义

$$y = \begin{cases} 0 & \text{若 } x \neq 0, \\ 1 & \text{若 } x = 0. \end{cases}$$

对此函数, $f(+0)$ 与 $f(-0)$ 都存在且都 $=0$. 但在 $x = 0$ 这一点上的值 $=1$,所以在 $x = 0$ 上不連續.

2) 阶梯函数. 把区間 $[a, b]$ 分为

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_n = b,$$

定义

$$f(x) = y_\nu, \quad (\text{若 } x_{\nu-1} \leqslant x < x_\nu),$$

便得一阶梯函数. 显然

$$f(x_\nu - 0) = y_\nu, \quad f(x_\nu + 0) = y_{\nu+1},$$

$y_{\nu+1} - y_\nu$ 称为飞跃幅度,这种函数在应用中經常出現(图 102).

3) $y = f(x) = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{x^{2n} - 1}{x^{2n} + 1}$. 对于 $|x| > 1$,因为 $x^{2n} \to \infty$,所以 $f(x) = 1$; 又对

于 $|x|<1$，因为 $x^{2n}\to 0$，所以 $f(x)=-1$. 因此可知它在 $x=\pm 1$ 处各有一間断点(图 103).

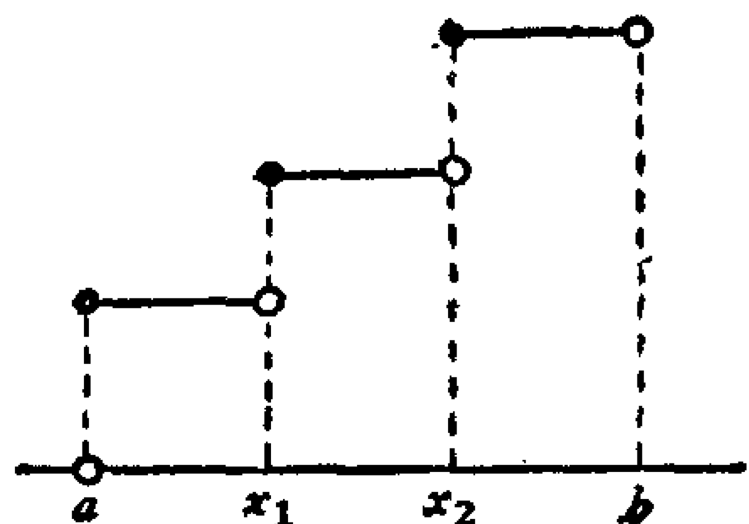


图 102

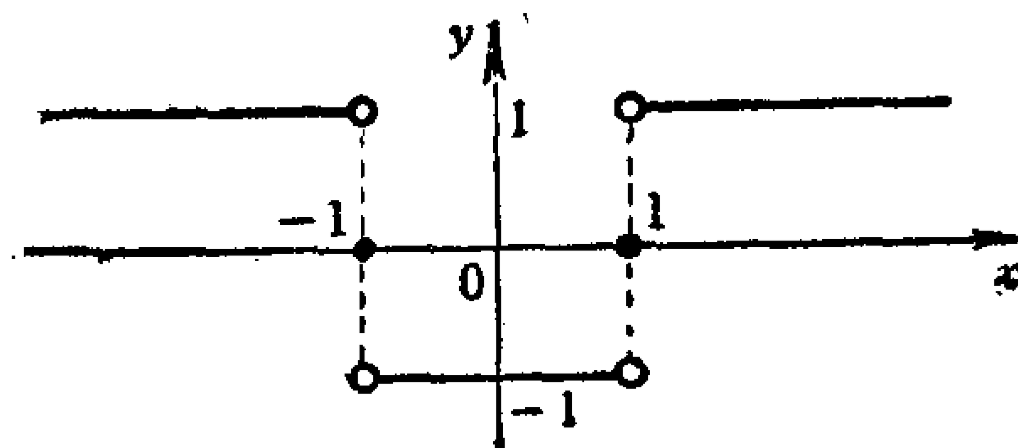


图 103

4) $f(x)=\sin\frac{1}{x}\ (x\neq 0)$. 当 $x\to 0$ 时，$f(x)$ 不趋于极限，所以它在 $x=0$ 上不連續.

5) $f(x)=x\sin\frac{1}{x}\ (x\neq 0)$. 我們有 $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=0$. 故若定义 $f(0)=0$，这函数就为連續.

6) $\chi(x)=\begin{cases}1, & \text{若 } x \text{ 是有理数},\\ 0, & \text{若 } x \text{ 是无理数}.\end{cases}$

这函数无处不間断.

7) 在 $(0,1)$ 之間我們定义 $f(x)$ 如下：如果 x 是有理数 $\frac{p}{q}$（既約分数），定义 $f(x)=\frac{1}{q}$；对无理数 x，则定义 $f(x)=0$. 可以証明，在任一有理点上，$f(x)$ 是間断的，而在任一无理点上，$f(x)$ 为連續.

証. 設 x_0 是区間中的任一点. 任意給出 $\varepsilon>0$，因为不超过 $\frac{1}{\varepsilon}$ 的正整数只有有限多个，故只有有限多个 $\frac{p}{q}$ 使 $f\left(\frac{p}{q}\right)=\frac{1}{q}\geqslant\varepsilon$. 取 x_0 的邻域 $(x_0-\delta,\ x_0+\delta)$，使它不包含任何这种 $\frac{p}{q}$（可能要除去 x_0 本身），则有

$$|f(x)|<\varepsilon,\quad (0<|x-x_0|<\delta).$$

因此

$$f(x_0+0)=f(x_0-0)=0.$$

若 x_0 是无理数，则 $f(x_0)=0$. 故函数在无理点处連續. 又若 x_0 为有理数，则 $f(x_0)\neq 0$. 故任何有理点都是 $f(x)$ 的間断点.

§ 16. 連續函数的一些基本性質

定理 1. 假定函数 $f(x)$ 在閉区間 $[a,b]$ 上連續，并且在 a, b 两点所取的值异号，则在 a, b 間必有一点 c，使

$$f(c)=0\quad (a<c<b).$$

也就是一条連續曲綫，从 x 軸的一边通到 x 軸的另一边时，它必与 x 軸相交.

証 (Bolzano 法). 把 a, b 分为两等分,如果 $f\left(\frac{a+b}{2}\right)=0$,則定理已明. 不然, 在 $\left[a, \frac{a+b}{2}\right]$, $\left[\frac{a+b}{2}, b\right]$ 中必有一区間使 $f(x)$ 在其两端取异号,命之为 $[a_1, b_1]$,逐步进行得出 $[a_2, b_2]$, $[a_3, b_3]$, $\cdots$一系列的、一个包有下一个的区間,而 $b_n-a_n=\frac{b-a}{2^n}$. 因为 $a_1 \leqslant a_2 \leqslant \cdots$, $b_1 \geqslant b_2 \geqslant \geqslant \cdots$, 而 $b_n-a_n \to 0\ (n \to \infty)$,所以

$$\lim a_n=\lim b_n=c.$$

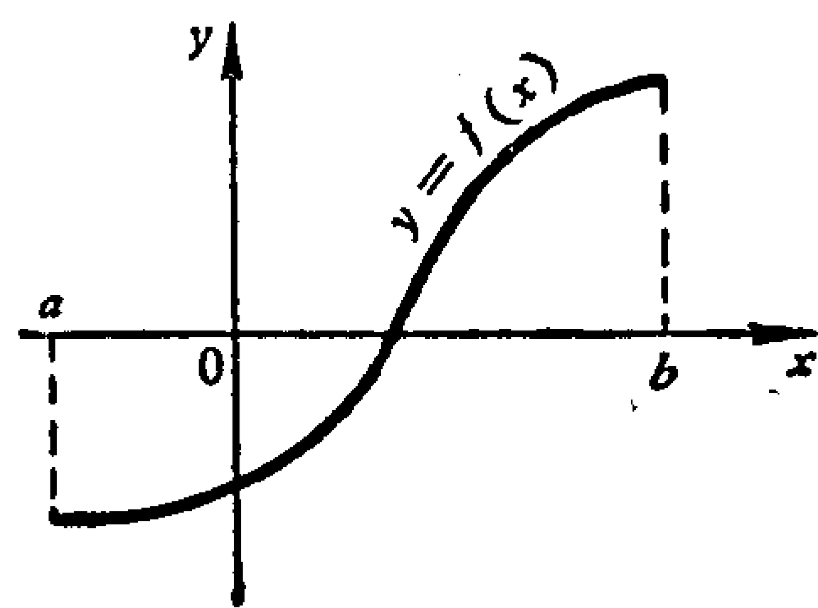


图 104

由于

$$f(c)=\lim_{n \to \infty} f(a_n) \leqslant 0, \quad f(c)=\lim_{n \to \infty} f(b_n) \geqslant 0,$$

所以 $f(c)=0$.

例 1. 解方程 $2^x=4x$.

这方程显然有一根 $x=4$,我們再找一根就困难了. 但命 $f(x)=2^x-4x$,由 $f(0)= =1 \geqslant 0$, $f\left(\frac{1}{2}\right)=\sqrt{2}-2<0$ 可知,在 0 与 $\frac{1}{2}$ 之間有一根.

定理 2. 同上的假定. 如果 $f(a)=A$, $f(b)=B$, 則对 A, B 之間的任一数 C,一定有 $x=c$ 使 $f(c)=C$.

这定理就是上面定理的推論,研究 $f(x)-C$ 卽得所求.

定理 3 (Weierstrass). 若函数 $f(x)$ 在閉区間 $[a, b]$ 中連續,它必有界. 换言之,一定存在二常数 m 与 M 使

$$m \leqslant f(x) \leqslant M. \tag{1}$$

証. 用反証法. 如果 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 无界, 卽对任一自然数 n,在 $[a, b]$ 中一定有一 x_n, 使

$$|f(x_n)| \geqslant n. \tag{2}$$

由 Bolzano 定理,在貫 $\{x_n\}$ 中可以选出一个子貫 $\{x_{n_k}\}$, 使

$$x_{n_k} \to x_0, \quad (k \to \infty).$$

显然 $a \leqslant x_0 \leqslant b$. 由于函数的連續性

$$f(x_{n_k}) \to f(x_0)$$

这是不可能的,因为它和性質(2)相矛盾.

使(1)式成立的最小的 M,称为上确界;使(1)式成立的最大的 m,称为下确界.

定理 4 (Weierstrass). 同上定理的假定, $f(x)$ 在 $[a, b]$ 中一定取得到上确界与下确界.

换言之,在 $[a, b]$ 中必存在 $x=x_0$ 与 $x=x_1$,使 $f(x_0)$ 与 $f(x_1)$ 各为 $f(x)$ 的一切数值中的最大的和最小的.

証. 命 M 是上确界. 由定理 3 已知 M 为有限. 我們也用反証法,假定恆有 $f(x)<M$, 卽 $f(x)$ 不能达到 M. 作函数

$$\varphi(x) = \frac{1}{M - f(x)},$$

这是一个分母永不为 0 的函数,所以是連續的. 由定理 3 可知,它为有界,也卽 $\varphi(x) \leqslant \mu$, $(\mu > 0)$,因此得出

$$f(x) \leqslant M - \frac{1}{\mu}.$$

于是有一小于 M 的数 $M - \frac{1}{\mu}$ 成为 $f(x)$ 的上界. 这和上确界的定义矛盾,所以必有一 x_0, 使

$$f(x_0) = M.$$

同法必有一 x_1,使 $f(x_1) = m$.

§ 17. Heine-Borel 定理

我們研究閉区間 $[a, b]$. 假定我們有一組开区間 σ,它們遮盖了閉区間 $[a, b]$. 也就是說,对 $[a, b]$ 中的任何一点,都有那組中的一个开区間 σ 包着这点. Heine-Borel 定理的結論是:

定理 1. 在这样的組中我們可以找出有限个开区間,使它們能够遮盖閉区間 $[a, b]$.

証. 我們用 Bolzano 的方法. 用反証法,也就是假定区間不能为这組內的有限个开区間所遮盖. 我們把 $[a, b]$ 分为两半,其中一定有一半不能为該組內的有限个 σ 所遮盖,命之为 $[a_1, b_1]$,再把 $[a_1, b_1]$ 分为两半,幷用 $[a_2, b_2]$ 表示不能为有限个 σ 所遮盖的一半.

繼續进行,我們得出一个无穷序列

$$[a, b], [a_1, b_1], \cdots [a_n, b_n], \cdots.$$

每一个前面的包有后面的一个,而且长度趋于 0,它們都不能用有限个 σ 所遮盖,我們有

$$a \leqslant a_1 \leqslant a_2 \leqslant \cdots \leqslant a_n \leqslant \cdots,$$
$$b \geqslant b_1 \geqslant b_2 \geqslant \cdots \geqslant b_n \geqslant \cdots,$$

幷且

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n = c.$$

这点 c 象 $[a, b]$ 中的任一点一样,一定被包括在某一 σ 內,令之为 $\sigma_0 = (\alpha, \beta)$,则 $\alpha < c < \beta$. 当 n 充分大时,$[a_n, b_n]$ 也被包括在 (α, β) 之中,这与 $[a_n, b_n]$ 的性質矛盾.

若将开区間組 σ 改为閉区間組定理成立否? 把閉区間 $[a, b]$ 改为开区間怎样?

这条定理在高等数学中十分有用,我們現在用它来处理連續函数的变差問題.

定义. 函数 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 內的变差是指 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 中最大値与最小値的差.

定理 2. 若 $f(x)$ 是 $[a, b]$ 中的連續函数,我們能把 $[a, b]$ 分为有限部分: $[a, x_1]$, $[x_1, x_2]$, $\cdots$, $[x_n, b]$,使在每一部分中,函数 $f(x)$ 的变差都小于任一予給的正数 ε.

証. 我們扩大 $f(x)$ 的定义:当 $x < a$ 时,定义 $f(x) = f(a)$; 又当 $x > b$ 时,定义

$f(x)=f(b)$. 命 ξ 为任一适合 $a \leqslant \xi \leqslant b$ 的点. 由 $f(x)$ 的連續性,我們可以找到 $\delta>0$,使在

$$\sigma=(\xi-\delta, \xi+\delta)$$

中的任二点 x_1, x_2 都有 $|f(x_1)-f(x_2)|<\varepsilon$(这 δ 可能依賴于 ξ). 这样我們得出一个开区間組 Σ, 它遮盖了整个 $[a, b]$, 由 Heine-Borel 定理,其中可以取出有限个 $\sigma_1, \sigma_2, \cdots, \sigma_n$, 使它們遮盖 $[a, b]$.

这些区間的任二相邻者一定有重迭的部分,在重迭部分中取分点,从而得出适合定理要求的一組閉的分区間.

定理 3. 給与任一 $\varepsilon>0$, 我們可以找到 $\delta>0$, 使对任一长度不超过 δ 的閉区間, $f(x)$ 的变差常 $<\varepsilon$; 也就是: 对 $[a, b]$ 中任意二个适合 $|x_1-x_2|<\delta$ 的数 x_1, x_2, 都有 $|f(x_1)-f(x_2)|<\varepsilon$. 这种性质,我們将称为一致連續性.

証. 取 $\varepsilon_1<\frac{1}{2}\varepsilon$. 由定理 2, 可知存在一批分区間,在其中 $f(x)$ 的变差 $<\varepsilon_1$. 命 δ 为这些区間的最小长度, 长度 $<\delta$ 的任意一个分区間一定包在以上这些区間之一或相邻两个区間之內,因此在长度 $<\delta$ 的分区間內, $f(x)$ 的变差 $<2\varepsilon_1<\varepsilon$.

这定理在定积分理論中有基本重要性.

第五章　微　分

§1. 微商概念

我們現在先研究一个点作直綫运动的情况．从一定点O算起，經过时間t，这点离O点的距离等于s．如此s就是t的函数



图 105

$$s=f(t).$$

在一个一定的时刻t，有一个确定的对应的距离s．若給t一个改变量Δt，在新时刻$t+\Delta t$时，距离是$s+\Delta s$．比

$$\frac{\Delta s}{\Delta t}$$

就是在这一段时間內的平均速度．

在等速运动中，$\frac{\Delta s}{\Delta t}$就是常数．一般講来，平均速度就是假想一个作等速运动的点在时間区間Δt內經过距离Δs所应有的速度．当$\Delta t\to 0$，这个比$\frac{\Delta s}{\Delta t}$的极限，給出在給定时刻$t$的速度

$$v=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta s}{\Delta t}.$$

例如，对等加速运动，我們有

$$s=\frac{1}{2}gt^2+v_0t$$

v_0是始速．如此我們有

$$v=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta s}{\Delta t}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{1}{\Delta t}\left[\frac{1}{2}g(t+\Delta t)^2+v_0(t+\Delta t)-\frac{1}{2}gt^2-v_0t\right]$$

$$=\lim_{\Delta t\to 0}\left(gt+v_0+\frac{1}{2}g\Delta t\right)=gt+v_0.$$

和距离一样，速度也是t的函数，这个函数叫做$s(t)$对t的微商函数．我們說**速度是距离对时間的微商**（速度的量綱是LT^{-1}），微商有时也称为导数．

在热力学中三态变化有以下的情况：我們对一固体加热，假定它的初温是t_0．在沒有达到融点之前，加热时物体的温度上升．在达到融点而未全部变成液体状态时，加热时物体的温度不变，直到全变为液体以后，又开始上升．由液体状态变为气体状态也有类似情况．命Q表示物体所吸收的热量，它当然是温度t的函数．

在图 106 中以横坐标表温度t，縱坐标表吸收的热量Q．固体轉化为液体的温度为

t_1，液体轉化为气体的温度为 t_2. 显然函数 Q 在 t_1 与 t_2 有二飞跃. 于是

$$\lim_{t\to t_1+0} Q - \lim_{t\to t_1-0} Q = BC$$

表示物体的融解热，而

$$\lim_{t\to t_2+0} Q - \lim_{t\to t_2-0} Q = EF$$

表示物体的汽化热.

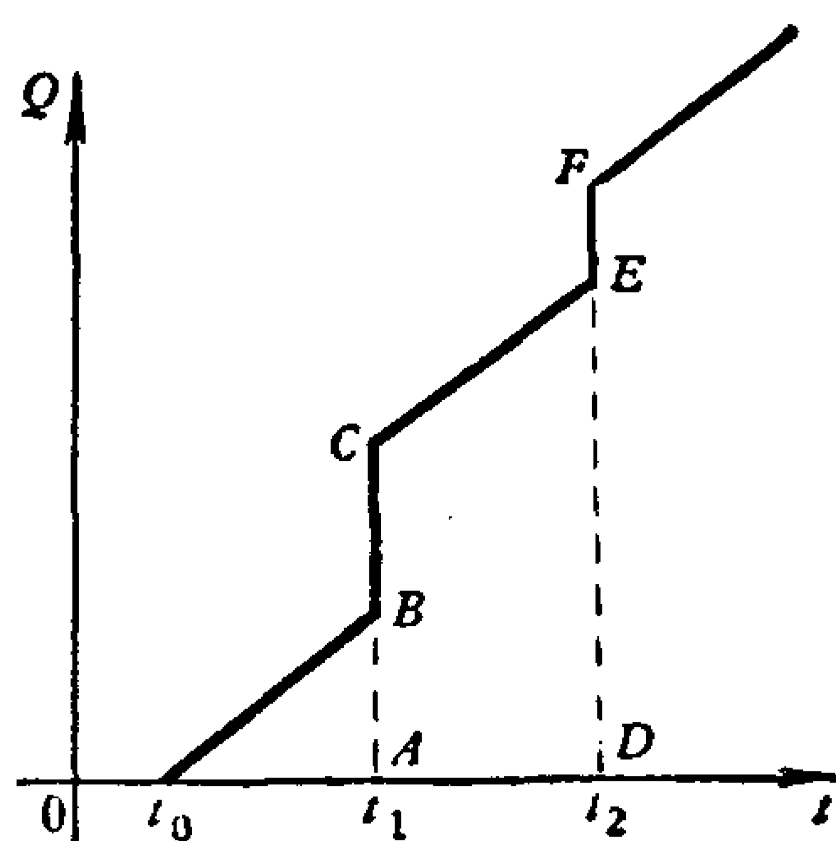


图 106

在其他各点函数 Q 是 t 的連續函数. 命 Δt^0 及 ΔQ 各是温度与吸收热量的改变量，經过精确的測量証明 ΔQ 与 Δt^0 不是正比例的关系. 換言之，$\frac{\Delta Q}{\Delta t^0}$ 不是常数. 当 $\Delta t^0\to 0$，这比的极限就是在温度 t^0 的这物体的比热. 比热就是物体所吸收的热量对温度的微商.

这些例子建議我們下面的微商的概念：

給定一个函数 $y=f(x)$，对应于自变量的改变量 Δx，函数的改变量是 Δy. 则当 $\Delta x\to 0$ 时，比 $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ 的极限(如果存在的話)叫做这函数的**微商**. 微商記成为 y' 或 $f'(x)$：

$$y'=f'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}.$$

求微商的运算称为微分法，有时还記成为 f'_x 或 f_x.

当然，如果极限 $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ 并不存在，微商也就不存在. 如果 $f(x+\Delta x)-f(x)$ 不趋于 0，則微商显然不存在，所以对不連續函数我們是不能定义微商的. 但是并不是所有的連續函数都可以定义微商的.

和左极限及右极限相仿，我們可以定义左微商及右微商. 左微商的定义是

$$f'(x-0)=\lim_{\substack{h\to 0\\(h<0)}}\frac{f(x+h)-f(x)}{h},$$

而右微商的定义是

$$f'(x+0)=\lim_{\substack{h\to 0\\(h>0)}}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}.$$

§2. 微商的几何意义

我們考虑函数 $y=f(x)$ 所画出的曲綫. 联两点 (x, y) 与 $(x+\Delta x, y+\Delta y)$ 的直綫是曲綫的割綫，这割綫的斜率是

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}.$$

当 $\Delta x\to 0$ 时，这割綫的极限位置就是通过点 (x, y) 的切綫. 所以

$$f'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}$$

就是曲綫 $y=f(x)$ 在 (x, y) 这一点的切綫的斜率. 切綫与 x 軸的夹角是 α，則

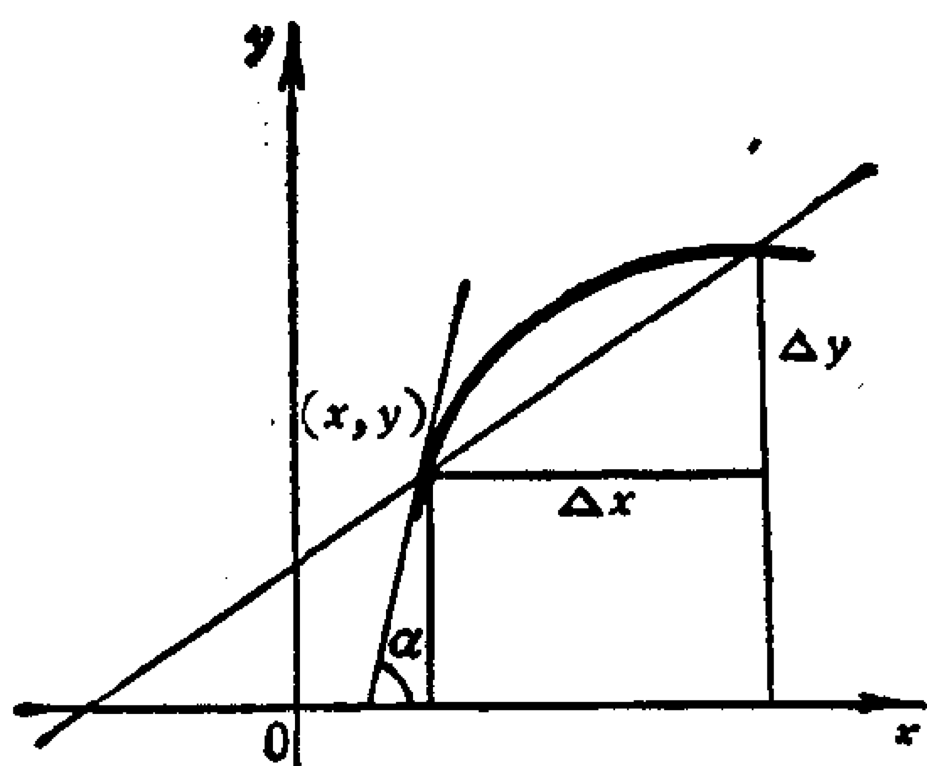


图 107

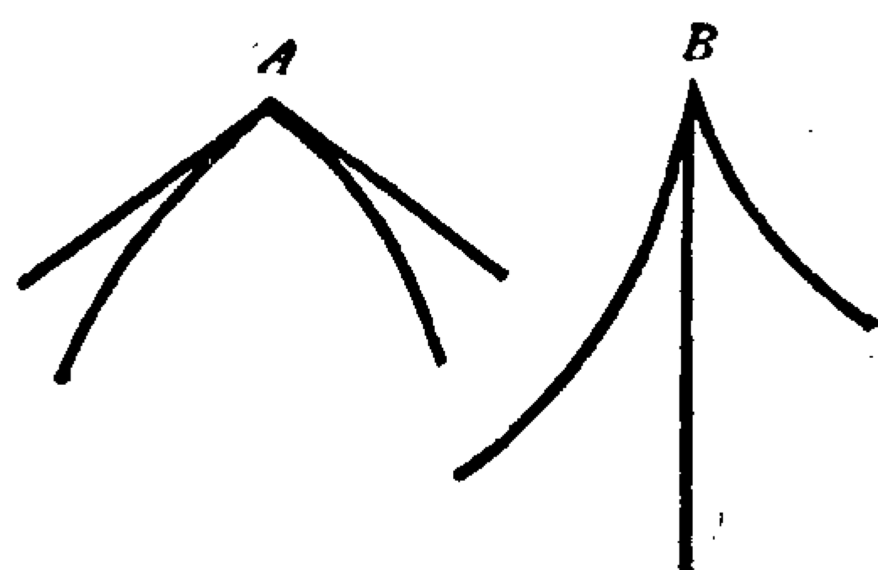


图 108

$$f'(x) = \operatorname{tg} \alpha.$$

因此在曲綫上一点 (x_0, y_0) 的切綫方程是

$$y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0).$$

如图 108 的 A 点，左微商与右微商是不同的，又如在 B 点的微商变为 ∞. 还有人举例說明有这样的連續函数存在，在任一点它都沒有微商.

再叙述另一个几何意义. 在 (x, y) 平面上画曲綫 $y = f(x)$. 假定它在 $a \leqslant x \leqslant b$ 上是連續的，并且是单調上升的. 从 $x = a$ 到 $x = x$ 的长条內，曲綫以下，x 軸以上的面积，我們用 $A(x)$ 表它. 当 x 有一增量 Δx 时，面积增加了 $A(x + \Delta x) - A(x)$. 这一增加的面积显然在两长方形之間(如图 109 所示)，所以

$$f(x)\Delta x \leqslant A(x + \Delta x) - A(x) \leqslant f(x + \Delta x)\Delta x.$$

图 109

除以 Δx，且命 $\Delta x \to 0$，則得

$$f(x) \leqslant \lim_{\Delta x \to 0} \frac{A(x + \Delta x) - A(x)}{\Delta x} \leqslant f(x),$$

即得

$$A'(x) = f(x).$$

所以該面积的微商就等于定义曲綫的函数 $f(x)$.

更广泛地講来，在任何两个量之間，一个量的无穷小变化所应当得到的另一量的变化，都可以用微商来描繪. 特別經常用的是随时間 t 而变化的量 $Q(t)$. 微商 $Q'(t)$ 就是表达了这一量在一瞬間的变化率.

例如，速度 $v(t)$ 也是依时間而变化的. 瞬时的变化速率

$$a(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta t} = v'(t)$$

就是加速度(加速度的量綱是 LT^{-2}).

又如 $Q(t)$ 表示从 0 到 t 秒时所流过导綫的横截面的电量(庫伦)，則

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta Q}{\Delta t} = Q'(t)$$

就是在所給时刻的电流強度，也就是电流強度是流过的电量对时間的微商.

§3. 函数的和、差、积、商的微商

首先我們知道

$$(u(x)\pm v(x))'=\lim_{h\to 0}\frac{u(x+h)\pm v(x+h)-(u(x)\pm v(x))}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{u(x+h)-u(x)}{h}\pm\lim_{h\to 0}\frac{v(x+h)-v(x)}{h}=u'(x)\pm v'(x).$$

所以如果 $u(x)$ 与 $v(x)$ 都有微商，則 $u(x)$ 与 $v(x)$ 的和（或差）的微商就是 $u(x)$ 与 $v(x)$ 的微商的和(或差).

又由

$$(u(x)v(x))'=\lim_{h\to 0}\frac{u(x+h)v(x+h)-u(x)v(x)}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{(u(x+h)-u(x))v(x+h)}{h}+\lim_{h\to 0}\frac{u(x)(v(x+h)-v(x))}{h}$$

$$=u'(x)v(x)+u(x)v'(x)$$

可知如果 $u(x)$ 与 $v(x)$ 都有微商，則 $u(x)$ 与 $v(x)$ 的积的微商就是 $u(x)$ 乘 $v(x)$ 的微商加上 $v(x)$ 乘 $u(x)$ 的微商.

再用一次可以推导出

$$(u(x)v(x)w(x))'=u'(x)v(x)w(x)+u(x)(v(x)w(x))'$$

$$=u'(x)v(x)w(x)+u(x)v'(x)w(x)+u(x)v(x)w'(x).$$

以 $u(x)v(x)w(x)$ 除之,可見

$$\frac{(u(x)v(x)w(x))'}{u(x)v(x)w(x)}=\frac{u'(x)}{u(x)}+\frac{v'(x)}{v(x)}+\frac{w'(x)}{w(x)}.$$

讀者試由此推出 n 个函数相乘积微商的公式.

再研究

$$\left(\frac{1}{v(x)}\right)'=\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\left(\frac{1}{v(x+h)}-\frac{1}{v(x)}\right)$$

$$=-\lim_{h\to 0}\frac{1}{v(x)v(x+h)}\frac{v(x+h)-v(x)}{h}=-\frac{v'(x)}{v^2(x)},$$

根据乘积的微商公式立得

$$\left(\frac{u(x)}{v(x)}\right)'=\frac{u'(x)}{v(x)}+u(x)\left(\frac{1}{v(x)}\right)'=\frac{u'(x)v(x)-v'(x)u(x)}{v(x)^2}.$$

就是分式的微商等于分子的微商乘以分母減去分母的微商乘以分子，再以分母的平方除之.

§4. 初等函数的微商

1°. $y=c$（常数).

$$y' = \lim_{h\to 0}\frac{c-c}{h} = 0.$$

所以常数的微商是 0 .

由上面的乘积公式立得

$$(cu(x))' = cu'(x),$$

即一函数乘一常数的微商等于这函数的微商乘此常数。

2°. $y = x^n$, n 是自然数。

現在用归納法来証明

$$(x^n)' = nx^{n-1}.$$

易知

$$x' = \lim_{h\to 0}\frac{(x+h)-x}{h} = 1.$$

如果已知 $(x^{n-1})' = (n-1)x^{n-2}$, 則由乘法公式

$$(x^n)' = (x^{n-1}\cdot x)' = x^{n-1}\cdot x' + (x^{n-1})'x = x^{n-1} + (n-1)x^{n-1} = nx^{n-1}.$$

再由除法公式,可知

$$(x^{-n})' = -\frac{(x^n)'}{x^{2n}} = -nx^{-n-1}.$$

并可推得

$$(a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_{n-1}x + a_n)' = na_0x^{n-1} + (n-1)a_1x^{n-2} + \cdots + a_{n-1}.$$

3°. $y = \log x \quad (x > 0)$.

$$y' = \lim_{h\to 0}\frac{\log(x+h) - \log x}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{\log\left(1+\dfrac{h}{x}\right)}{h} = \frac{1}{x}\lim_{h\to 0}\log(1+h/x)^{x/h} = \frac{1}{x}$$

此处用了以下的結果:給了 $1 > \alpha > 0$, 必定有整数 n , 滿足 $\dfrac{1}{n+1} < \alpha \leqslant \dfrac{1}{n}$; 故

$$\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^n < (1+\alpha)^{1/\alpha} < \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}.$$

因此

$$\lim_{\alpha\to 0}\log(1+\alpha)^{1/\alpha} = \log e = 1.$$

又

$$(\log_a x)' = (\log x/\log a)' = \frac{1}{x\log a}.$$

4°. $y = \sin x$.

$$y' = \lim_{h\to 0}\frac{\sin(x+h) - \sin x}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{2\cos\left(x+\dfrac{h}{2}\right)\sin\dfrac{h}{2}}{h} = \cos x$$

$\left(\text{因为当}\dfrac{h}{2}\to 0, \text{則}\ \dfrac{2}{h}\sin\dfrac{h}{2}\to 1\right)$, 即得

$$(\sin x)' = \cos x.$$

5°. $y=\cos x$.

$$y'=\lim_{h\to 0}\frac{\cos(x+h)-\cos x}{h}=\lim_{h\to 0}-\frac{2\sin\left(x+\frac{h}{2}\right)\sin\frac{h}{2}}{h}=-\sin x,$$

即

$$(\cos x)'=-\sin x.$$

6°. $y=\operatorname{tg} x$.

$$y'=\left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)'=\frac{(\sin x)'\cos x-(\cos x)'\sin x}{\cos^2 x}=\frac{\sin^2 x+\cos^2 x}{\cos^2 x}=\frac{1}{\cos^2 x}=\sec^2 x.$$

7°. $y=\operatorname{ctg} x$.

$$(\operatorname{ctg} x)'=-\csc^2 x.$$

8°. $y=\sec x$.

$$y'=\left(\frac{1}{\cos x}\right)'=\frac{\sin x}{\cos^2 x}=\operatorname{tg} x\sec x.$$

9°. $y=\csc x$.

$$y'=\left(\frac{1}{\sin x}\right)'=-\frac{\cos x}{\sin^2 x}=-\operatorname{ctg} x\csc x.$$

§5. 复合函数的微商

假定 $y=f(x)$ 是区間 $a\leqslant x\leqslant b$ 上的連續函数，这函数的数值在区間 $c\leqslant y\leqslant d$ 之中. 再設 $z=F(y)$ 是一个在区間 $c\leqslant y\leqslant d$ 中的連續函数，則得复合函数

$$z=F(y)=F(f(x)).$$

現在有

$$z'=\lim_{h\to 0}\frac{F(f(x+h))-F(f(x))}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\left(\frac{F(f(x+h))-F(f(x))}{f(x+h)-f(x)}\cdot\frac{f(x+h)-f(x)}{h}\right).$$

命 $y=f(x)$ 及 $y+k=f(x+h)$，則得当 $h\to 0$ 有 $k\to 0$. 得出

$$z'=\lim_{k\to 0}\frac{F(y+k)-F(y)}{k}\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=F'(y)f'(x).$$

所以二复合函数的微商等于它对中間变量的微商与中間变量对于自变量的微商的乘积.

例 1. 用

$$\cos x=\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right),$$

$$\operatorname{ctg} x=\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}-x\right),$$

$$\csc x=\sec\left(\frac{\pi}{2}-x\right),$$

从 $\sin x$, $\operatorname{tg} x$, $\sec x$ 的微商公式推出 $\cos x$, $\operatorname{ctg} x$, $\csc x$ 的微商.

例 2.

$$(\log\sin x)' = \frac{1}{\sin x}(\sin x)' = \operatorname{ctg} x,$$

$$(\log\cos x)' = \frac{1}{\cos x}(\cos x)' = -\operatorname{tg} x.$$

求反函数的微商法則：假定 $y = f(x)$ 在区間 (a, b) 上連續且上升(当 x 增加 y 也增加)，而 $A = f(a)$，$B = f(b)$，則在区間 (A, B) 有一个唯一的反函数 $x = \varphi(y)$ 存在，不难証明在 (A, B) 上这函数也是連續的．即当 $\Delta x \to 0$ 时，$\Delta y \to 0$，且反之亦然．

定理 1. 若 $f(x)$ 在 x_0 点有不等于 0 的微商，則反函数 $\varphi(y)$ 在 $y_0 = f(x_0)$ 点有微商

$$\varphi'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)}.$$

用 Δx 与 Δy 表 x, y 的对应的改变量，即

$$\Delta x = \varphi(y_0 + \Delta y) - \varphi(y_0), \qquad \Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0),$$

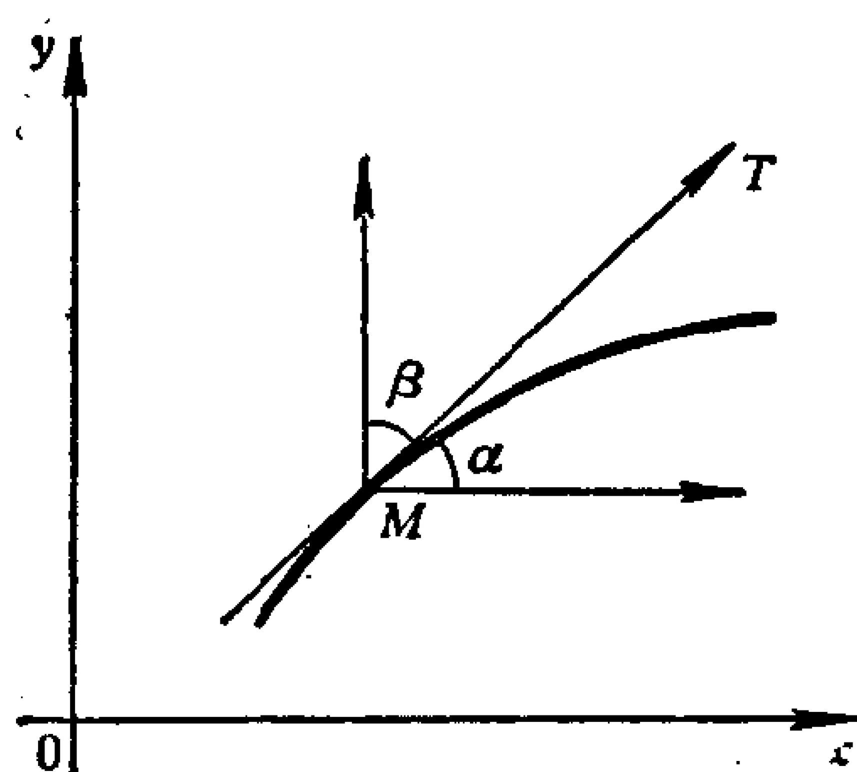


图 110

我們可以写成为

$$\frac{\Delta x}{\Delta y} = \frac{1}{\dfrac{\Delta y}{\Delta x}}.$$

趋于极限便得所証．

这定理的几何意义十分明显．函数

$$x = \varphi(y) \text{ 与 } y = f(x)$$

在平面上的图形是一样的，所不同的仅是考虑函数 $x = \varphi(y)$ 时，把 y 軸当作自变量．而考虑 $y = f(x)$ 时，把 x 当作自变量．

作切綫 MT (如图 110 所示)

$$f'(x) = \operatorname{tg}\alpha, \ \alpha \text{ 是从 } x \text{ 軸轉往 } MT \text{ 的夹角},$$

$$\varphi'(y) = \operatorname{tg}\beta, \ \beta \text{ 是从 } y \text{ 軸轉往 } MT \text{ 的夹角}.$$

显然有

$$\beta + \alpha = \frac{\pi}{2}.$$

所以

$$\operatorname{tg}\beta = \frac{1}{\operatorname{tg}\alpha}, \qquad \text{即 } \varphi'(y) = \frac{1}{f'(x)}.$$

1°. $y = x^{\frac{1}{n}}$ ($x \geqslant 0$, n 自然数)是 $x = y^n$ 的反函数，所以

$$y' = \frac{1}{ny^{n-1}} = \frac{1}{n}x^{\frac{1}{n}-1}.$$

又 $y = x^{\frac{p}{q}} = z^p$，$z = x^{\frac{1}{q}}$，即 y 是函数 z 的函数，所以

$$y' = (y(z))'z' = pz^{p-1}\cdot\frac{1}{q}x^{\frac{1}{q}-1} = \frac{p}{q}\cdot x^{\frac{p-1}{q}+\frac{1}{q}-1} = \frac{p}{q}x^{\frac{p}{q}-1}.$$

2°. $y = a^x$ ($a > 0$) 的反函数是

$$x = \varphi(y) = \log_a y.$$

前已証明

$$\varphi'(y) = \frac{1}{y} \frac{1}{\log a},$$

所以

$$(a^x)' = y \log a = a^x \log a.$$

特别当 $a = e$ 时，

$$(e^x)' = e^x.$$

3°. 对任一实数 α，考虑函数

$$y = x^\alpha \qquad (x > 0).$$

这函数可以写作

$$y = e^{\alpha \log x}.$$

用复合函数的微商法则有

$$y' = e^{\alpha \log x} \cdot \frac{\alpha}{x} = \alpha x^{\alpha-1}.$$

現在研究反三角函数.

4°. $y = \arcsin x$.

这函数是多値函数. 我們仅考虑 $-\frac{\pi}{2} \leqslant y \leqslant \frac{\pi}{2}$ 中的一段. 这一函数看为 $x = \sin y$ 的反函数，所以

$$y'_x = \frac{1}{x'_y} = \frac{1}{\cos y} = \frac{1}{\sqrt{1 - \sin^2 y}} = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}.$$

这个根应取正号，因为 $\cos y$ 在区間 $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ 上是正的. 同法可得

$$(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}.$$

这里所考虑的是 $(0, \pi)$ 之間的一段.

另一方面，由 $x = \sin y = \cos\left(\frac{\pi}{2} - y\right)$，所以知道

$$\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2}.$$

微分此式的两边也可以得到以上的公式.

5°. $y = \operatorname{arc\,tg} x$.

現在取 $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ 間的一段，它是 $x = \operatorname{tg} y$ 的反函数，所以

$$y'_x = \frac{1}{x'_y} = \frac{1}{\frac{1}{\cos^2 y}} = \frac{1}{1 + \operatorname{tg}^2 y} = \frac{1}{1 + x^2}.$$

同法

$$(\operatorname{arc\,ctg} x)' = -\frac{1}{1 + x^2}.$$

6°. 讀者自証

$$(\operatorname{arc}\sec x)' = \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}$$

及

$$(\operatorname{arc}\csc x)' = -\frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}.$$

7°. 考虑函数

$$y = u^v,$$

其中 u, v 都是 x 的函数。

将此函数写为

$$y = e^{v\log u}.$$

由复合函数的微商法則得到

$$y' = e^{v\log u}(v\log u)'.$$

再用乘积微商法則，得

$$y' = e^{v\log u}\left(v'\log u + \frac{v}{u}u'\right) = u^v\left(v'\log u + \frac{v}{u}u'\right),$$

$$= u^v v'\log u + vu^{v-1}u'.$$

§6. 双 曲 函 数

双曲函数是

$$\operatorname{sh} x = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x}) \qquad (\text{双曲正弦}),$$

$$\operatorname{ch} x = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x}) \qquad (\text{双曲余弦}),$$

$$\operatorname{th} x = \frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x} \qquad (\text{双曲正切}),$$

$$\operatorname{cth} x = \frac{1}{\operatorname{th} x},\ x \neq 0 \qquad (\text{双曲余切}).$$

易知

$$\frac{e^{x+y} + e^{-x-y}}{2} = \frac{e^x + e^{-x}}{2}\cdot\frac{e^y + e^{-y}}{2} + \frac{e^x - e^{-x}}{2}\cdot\frac{e^y - e^{-y}}{2},$$

即

$$\operatorname{ch}(x \pm y) = \operatorname{ch} x\cdot\operatorname{ch} y \pm \operatorname{sh} x\cdot\operatorname{sh} y.$$

同样有下面的恆等式

$$\operatorname{sh}(x \pm y) = \operatorname{sh} x\cdot\operatorname{ch} y \pm \operatorname{ch} x\cdot\operatorname{sh} y.$$

将 $y = x$ 代入，得

$$\operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x = 1,$$

$$\operatorname{ch} 2x = \operatorname{ch}^2 x + \operatorname{sh}^2 x,$$

$$\operatorname{sh} 2x = 2\operatorname{sh} x\operatorname{ch} x.$$

因此这些函数显得与三角函数非常相似，它們的图形如下：

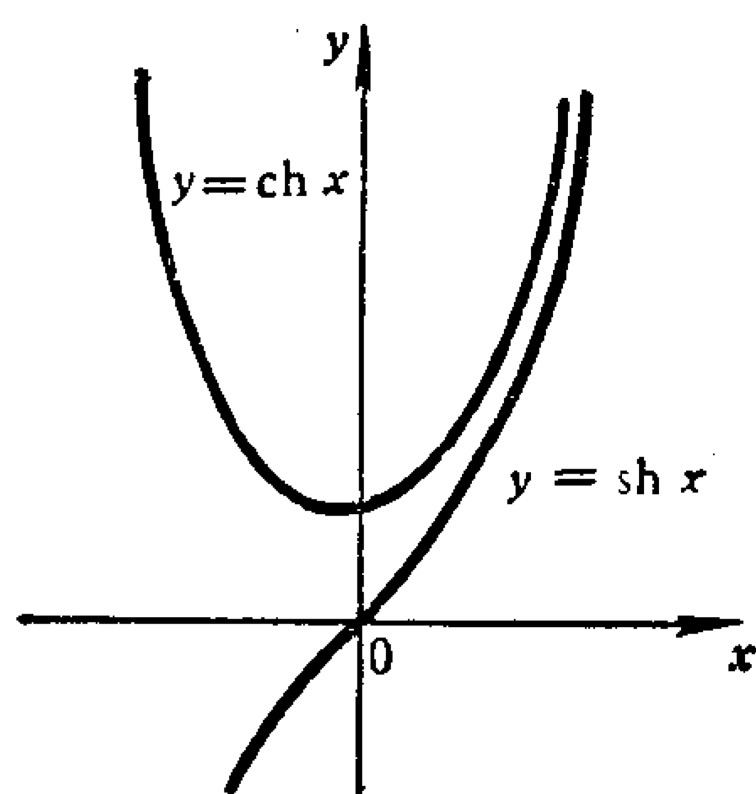


图 111

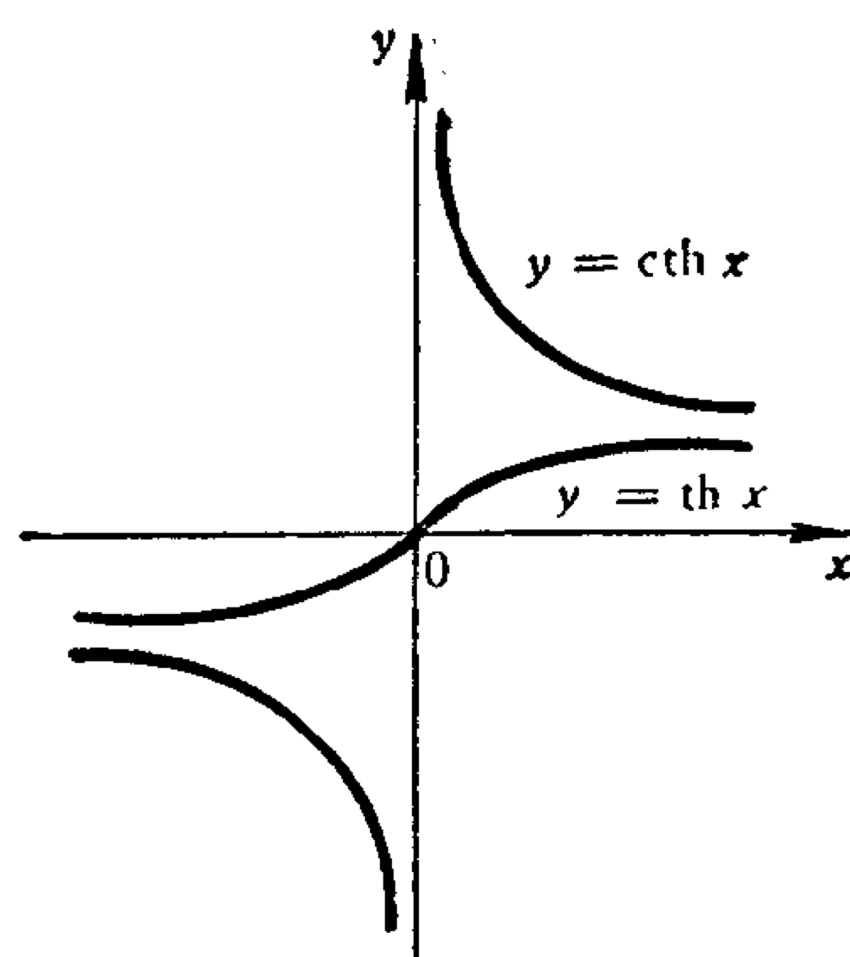


图 112

双曲函数的微商是

$$(\operatorname{sh} x)' = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x})' = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x}) = \operatorname{ch} x,$$

$$(\operatorname{ch} x)' = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x})' = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x}) = \operatorname{sh} x,$$

$$(\operatorname{th} x)' = \frac{\operatorname{ch} x \cdot (\operatorname{sh} x)' - \operatorname{sh} x \cdot (\operatorname{ch} x)'}{\operatorname{ch}^2 x} = \frac{\operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x}{\operatorname{ch}^2 x} = \frac{1}{\operatorname{ch}^2 x},$$

$$(\operatorname{cth} x)' = \frac{\operatorname{sh} x \cdot (\operatorname{ch} x)' - \operatorname{ch} x \cdot (\operatorname{sh} x)'}{\operatorname{sh}^2 x} = \frac{\operatorname{sh}^2 x - \operatorname{ch}^2 x}{\operatorname{sh}^2 x} = \frac{-1}{\operatorname{sh}^2 x}.$$

现在我們来求双曲函数的反函数.

命 $y = \operatorname{ch} x (-\infty < x < \infty)$, 則

$$e^{2x} - 2y \cdot e^x + 1 = 0.$$

故得

$$e^x = y \pm \sqrt{y^2 - 1} \qquad (y \geqslant 1),$$

$$x = \operatorname{arc\,ch} y = \log(y \pm \sqrt{y^2 - 1}).$$

因此反双曲余弦函数是一个双值函数，它对应于两个单值的支，各对应于 x 从 0 变至 $+\infty$ 以及从 $-\infty$ 变至 0。

同样求出

$$\operatorname{arc\,sh} y = \log(y + \sqrt{y^2 + 1}),$$

$$\operatorname{arc\,th} y = \frac{1}{2}\log\frac{1+y}{1-y} \qquad (|y| < 1),$$

$$\operatorname{arc\,cth} y = \frac{1}{2}\log\frac{y+1}{y-1} \qquad (|y| > 1).$$

它們的微商是

$$(\operatorname{arc\,ch} y)' = \frac{(y \pm \sqrt{y^2 - 1})'}{y \pm \sqrt{y^2 - 1}} = \pm\frac{1}{\sqrt{y^2 - 1}},$$

$$(\text{arc sh } y)' = \frac{1}{\sqrt{y^2+1}},$$

$$(\text{arc th } y)' = \frac{1}{1-y^2}, \qquad (|y|<1)$$

$$(\text{arc cth} y)' = \frac{1}{1-y^2}. \qquad (|y|>1)$$

§7. 微商的公式表

1. $(c)' = 0,$
2. $(cu)' = cu',$
3. $(u_1 + \cdots + u_n)' = u_1' + \cdots + u_n',$
4. $(u_1 \cdot \cdots \cdot u_n)' = u_1'u_2\cdots u_n + u_1u_2'u_3\cdots u_n + \cdots + u_1u_2\cdots u_n',$
5. $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - v'u}{v^2},$
6. $(x^a)' = ax^{a-1},$
7. $(\log x)' = \frac{1}{x}, \quad (\log_a x)' = \frac{1}{x}\frac{1}{\log a},$
8. $(e^x)' = e^x, \qquad (a^x)' = a^x \log a,$
9. $(\sin x)' = \cos x,$
10. $(\cos x)' = -\sin x,$
11. $(\text{tg } x)' = \sec^2 x,$
12. $(\text{ctg } x)' = -\csc^2 x,$
13. $(\sec x)' = \text{tg } x \sec x,$
14. $(\csc x)' = -\text{ctg } x \csc x,$
15. $(\text{arc} \sin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}},$
16. $(\text{arc} \cos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}},$
17. $(\text{arc tg } x)' = \frac{1}{1+x^2},$
18. $(\text{arc ctg } x)' = -\frac{1}{1+x^2},$
19. $(\text{arc sec } x)' = \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}},$
20. $(\text{arc csc } x)' = -\frac{1}{x\sqrt{x^2-1}},$
21. $(\text{sh } x)' = \text{ch } x,$

22. $(\operatorname{ch} x)' = \operatorname{sh} x$,

23. $(\operatorname{th} x)' = \dfrac{1}{\operatorname{ch}^2 x}$,

24. $(\operatorname{cth} x)' = \dfrac{-1}{\operatorname{sh}^2 x}$,

25. $(\operatorname{sh}^{-1} x)' = \dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}}$,

26. $(\operatorname{ch}^{-1} x)' = \dfrac{\pm 1}{\sqrt{x^2-1}}$,

27. $(\operatorname{th}^{-1} x)' = \dfrac{1}{1-x^2}$, $\quad (|x| < 1)$

28. $(\operatorname{cth}^{-1} x)' = \dfrac{1}{1-x^2}$, $\quad (|x| > 1)$

29. $y'_x = y'_u u'_x$（y 通过 u 依赖于 x），

30. $x'_y = \dfrac{1}{y'_x}$.

§8. 例　题

例 1.

$$y = f(x)e^x.$$

$$y' = f'(x)e^x + f(x)e^x = (f(x) + f'(x))e^x.$$

特别如

$$((x^2 - 2x + 2)e^x)' = (x^2 - 2x + 2 + 2x - 2)e^x = x^2 e^x,$$

$$((x^3 - 3x^2 + 6x - 6)e^x)' = x^3 e^x.$$

一般可証

$$((x^n - nx^{n-1} + n(n-1)x^{n-2} - n(n-1)(n-2)x^{n-3} + \cdots)e^x)' = x^n e^x.$$

例 2.

$$y = \frac{ax+b}{x^2+1}.$$

$$y' = \frac{(ax+b)'(x^2+1) - (ax+b)(x^2+1)'}{(x^2+1)^2}$$

$$= \frac{a(x^2+1) - 2(ax+b)x}{(x^2+1)^2} = \frac{-ax^2 - 2bx + a}{(x^2+1)^2}.$$

例 3.

$$y = \frac{x\sin x + \cos x}{x\cos x - \sin x}.$$

$$y' = \frac{(x\sin x + \cos x)'(x\cos x - \sin x) - (x\sin x + \cos x)(x\cos x - \sin x)'}{(x\cos x - \sin x)^2}$$

$$= \frac{(\sin x + x\cos x - \sin x)(x\cos x - \sin x) - (x\sin x + \cos x)(\cos x - x\sin x - \cos x)}{(x\cos x - \sin x)^2}$$

$$= \frac{x^2}{(x\cos x - \sin x)^2}.$$

例 4.

$$y = e^{-x^2}.$$

$$y' = e^{-x^2}(-x^2)' = -2xe^{-x^2}.$$

例 5.

$$y = (x^2 + x + 1)^n.$$

$$y' = n(x^2 + x + 1)^{n-1}(2x + 1).$$

例 6.

$$y = 2^{\sin x}.$$

$$y' = 2^{\sin x} \cdot \log 2 \cdot (\sin x)' = \log 2 \cdot \cos x \cdot 2^{\sin x}.$$

例 7.

$$y = \operatorname{arctg} \frac{1}{x}.$$

$$y' = \frac{1}{1 + \frac{1}{x^2}} \left(\frac{1}{x}\right)' = \frac{x^2}{1 + x^2}\left(-\frac{1}{x^2}\right) = -\frac{1}{1 + x^2}.$$

例 8.

$$y = \sqrt{\operatorname{tg} \frac{1}{2} x}.$$

$$y' = \frac{1}{2}\left(\operatorname{tg}\frac{1}{2}x\right)^{-\frac{1}{2}}\left(\operatorname{tg}\frac{1}{2}x\right)' = \frac{1}{4}\sec^{\frac{3}{2}}\frac{x}{2}\csc^{\frac{1}{2}}\frac{x}{2}.$$

例 9.

$$y = e^{\sin^2 \frac{1}{x}}.$$

$$y' = e^{\sin^2 \frac{1}{x}} \cdot \left(\sin^2 \frac{1}{x}\right)' = 2e^{\sin^2 \frac{1}{x}} \sin\frac{1}{x} \cos\frac{1}{x} \cdot \left(\frac{1}{x}\right)'$$

$$= -2\frac{1}{x^2} e^{\sin^2 \frac{1}{x}} \sin\frac{1}{x}\cos\frac{1}{x}.$$

例 10.

$$y = \log(x + \sqrt{x^2 + 1})$$

$$y' = \frac{1}{x + \sqrt{x^2 + 1}}(x + \sqrt{x^2 + 1})'$$

$$= \frac{1}{x + \sqrt{x^2 + 1}}\left(1 + \frac{1}{2}(x^2 + 1)^{-\frac{1}{2}} \cdot (2x)\right)$$

$$= \frac{1}{x + \sqrt{x^2 + 1}}\left(\frac{x + \sqrt{x^2 + 1}}{\sqrt{x^2 + 1}}\right) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}}.$$

例 11. 假定 $b-ac>0$,

$$y=\frac{1}{\sqrt{b-ac}}\log\frac{\sqrt{ax+b}-\sqrt{b-ac}}{\sqrt{ax+b}+\sqrt{b-ac}},$$

$$y'=\frac{1}{\sqrt{b-ac}}\cdot\frac{1}{\dfrac{\sqrt{ax+b}-\sqrt{b-ac}}{\sqrt{ax+b}+\sqrt{b-ac}}}\cdot\frac{2\sqrt{b-ac}}{(\sqrt{ax+b}+\sqrt{b-ac})^2}\cdot\frac{1}{2}\frac{a}{\sqrt{ax+b}}$$

$$=\frac{1}{(x+c)\sqrt{ax+b}}.$$

例 12.

$$y=\frac{2}{\sqrt{ac-b}}\operatorname{arc\,tg}\sqrt{\frac{ax+b}{ac-b}},$$

$$y'=\frac{2}{\sqrt{ac-b}}\cdot\frac{1}{1+\dfrac{ax+b}{ac-b}}\left(\sqrt{\frac{ax+b}{ac-b}}\right)'=\frac{1}{(x+c)\sqrt{ax+b}}.$$

例 13. 假定 $|b|<a$, $|x|<\frac{\pi}{2}$, 求

$$y=\frac{1}{\sqrt{a^2-b^2}}\arcsin\frac{a\sin x+b}{a+b\sin x}$$

的微商。

$$y'=\frac{1}{\sqrt{a^2-b^2}}\cdot\frac{1}{\sqrt{1-\left(\dfrac{a\sin x+b}{a+b\sin x}\right)^2}}\cdot\left(\frac{a\sin x+b}{a+b\sin x}\right)'=\frac{1}{a+b\sin x}.$$

例 14. 假定 $|a|<|b|$, 設

$$y=\frac{1}{\sqrt{b^2-a^2}}\log\frac{b+a\sin x-\sqrt{b^2-a^2}\cos x}{a+b\sin x},$$

則

$$y'=\frac{1}{\sqrt{b^2-a^2}}\cdot\frac{a+b\sin x}{b+a\sin x-\sqrt{b^2-a^2}\cos x}\cdot\left(\frac{b+a\sin x-\sqrt{b^2-a^2}\cos x}{a+b\sin x}\right)'$$

$$=\frac{1}{a+b\sin x}.$$

例 15.

$$y=x^{\sin x}.$$

$$y'=(e^{\log x\sin x})'=e^{\log x\sin x}(\log x\sin x)'=x^{\sin x}\left(\frac{\sin x}{x}+\log x\cos x\right).$$

例 16. 証明偶函数的微商是奇函数,奇函数的微商是偶函数。

由于 $(f(-x))'=-f'(-x)$, 明所欲証。

例 17. 求 $y=\log(|x|)$ 的微商。

当 $x>0$ 时，$y'=\frac{1}{x}$; 当 $x<0$ 时，

$$y'=(\log(-x))'=\frac{-1}{-x}=\frac{1}{x},$$

前式仍能适用.

例 18. 曲綫

$$y=ax^m \qquad (m>0)$$

在某点 (x, y) 的切綫的斜率是

$$\operatorname{tg}\alpha=y'=max^{m-1}.$$

切綫在 x 軸上的投影

$$TP=\frac{y}{\operatorname{tg}\alpha}=\frac{ax^m}{max^{m-1}}=\frac{x}{m}.$$

如此得一个在 M 点作切綫的簡易方法如下：M 点在 x 軸上的投影点命之为 P，作 OP 的 $\frac{1}{m}$ 长 TP，联上 TM 即为原曲綫的切綫(見图 113).

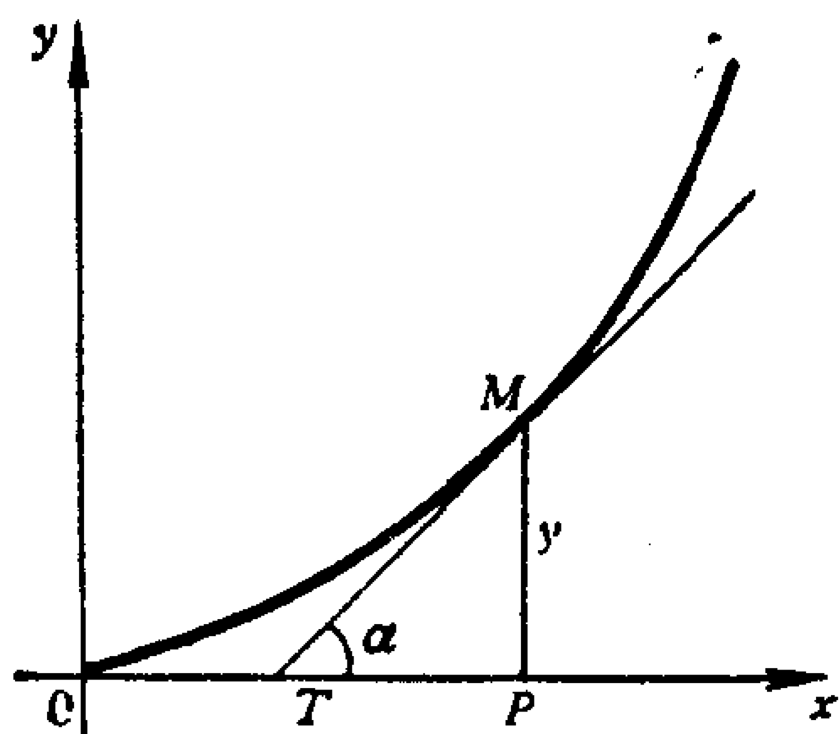


图 113

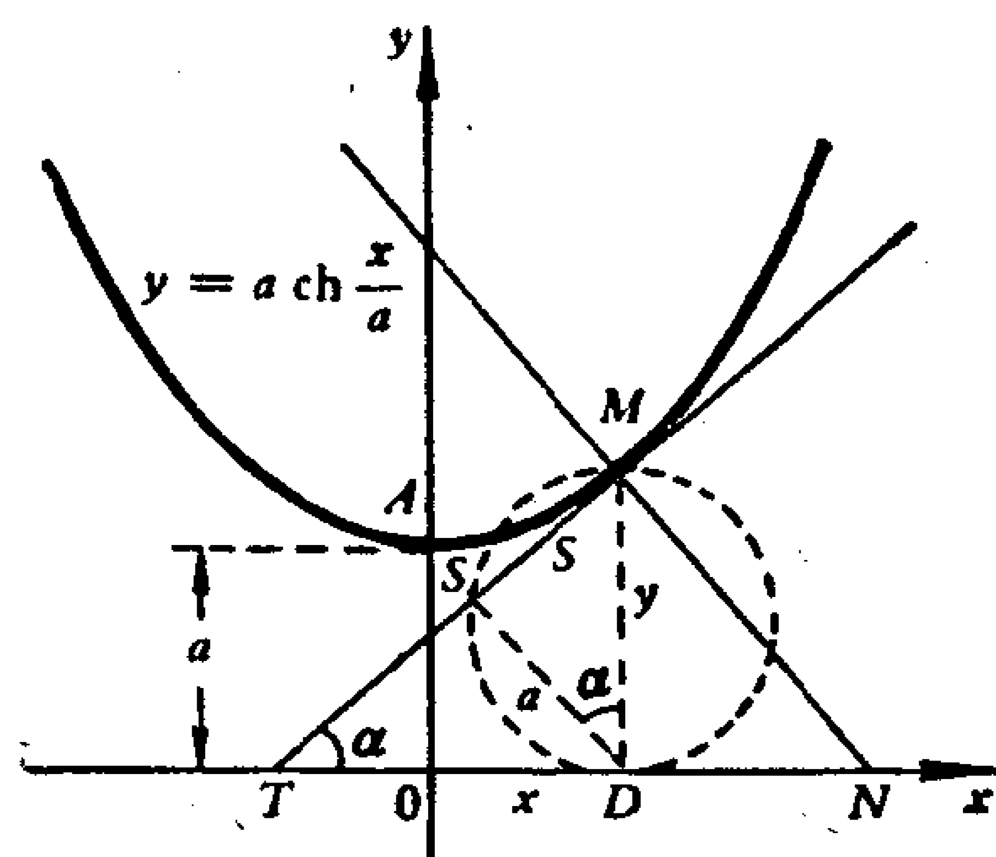


图 114

例 19. 悬鏈綫的方程是

$$y=a\cdot\operatorname{ch}\frac{x}{a} \qquad (a>0).$$

我們知道

$$\operatorname{tg}\alpha=y'=\operatorname{sh}\frac{x}{a},$$

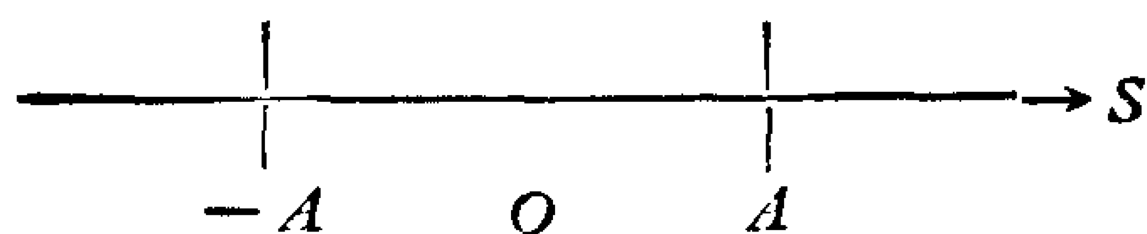
所以

$$\cos\alpha=\frac{1}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\alpha}}=\frac{1}{\sqrt{1+\operatorname{sh}^2\frac{x}{a}}}=\frac{1}{\operatorname{ch}\frac{x}{a}}=\frac{a}{y}.$$

于是 $y\cdot\cos\alpha=a$. 若从縱标 $y=DM$ 的 D 作切綫 MT 的垂綫 DS，則綫段 DS 就等于 a. 由此再推得在所討論的曲綫上作切綫的簡易方法：把縱标 DM 当作直径作一半圓，以 D 为中心，a 为半径截取交点 S. 直綫 MS 就是切綫(图 114).

例 20. 簡諧振动. 一質点沿一軸在某一中心附近依下列規律的运动:

$$s = A \cdot \sin(\omega t + \alpha)$$



称为簡諧振动.

由于 $|\sin x| \leqslant 1$, 所以这一质点在 $-A$ 与 A 之間摆动. A 称为振幅,起始点是

$$A \sin \alpha.$$

而 α 称为**初相**,这一运动經过时間 $\frac{2\pi}{\omega}$ 后回到原处, ω 称为**頻率**.

求路程 s 对时間的微商,則得运动速度

$$v = A\omega \cdot \cos(\omega t + \alpha).$$

当 $s = 0$ 时,即經过中心, $v = \pm A\omega$ 速度达到最高点. 又当质点在最远处时 ($s = \pm A$), 速度为 0.

求 v 对 t 的微商:

$$a = -A\omega^2 \sin(\omega t + \alpha),$$

这就是这一质点的运动的加速度. 显然有

$$a = -\omega^2 \cdot s.$$

引进动点的质量 m, 依 Newton 定律,若簡諧振动由力 F 的作用而产生, 則这个力 F 可以表示为

$$F = ma = -m\omega^2 s.$$

由此可以看出,它是永远指向中心的(因为有与 s 相反的符号),并且与点离中心的距离成比例.

例 21. 阻尼运动.

阻尼运动的規律是

$$s = Ae^{-kt} \sin \omega t \qquad (A, k, \omega > 0).$$

这一运动也是一个在中心附近所作的振动. 但是有因子 e^{-kt}. 当 $t \to \infty$, $e^{-kt} \to 0$, 所以这一振动的振幅愈变愈小,逐漸地和中心点相重合,也就是

$$\lim_{t \to \infty} s = 0.$$

这一运动的速度和加速度各为

$$v = s'_t = Ae^{-kt}(\omega \cos \omega t - k \sin \omega t)$$

$$\begin{aligned} a = v'_t &= -Ae^{-kt}(\omega^2 \sin \omega t + 2\omega k \cdot \cos \omega t - k^2 \cdot \sin \omega t) \\ &= -Ae^{-kt}[(\omega^2 + k^2) \sin \omega t + 2k(\omega \cos \omega t - k \sin \omega t)] \\ &= -(\omega^2 + k^2)s - 2kv. \end{aligned}$$

假如这振动是由于力 F 的作用所发生的,則

$$F = -(\omega^2 + k^2)ms - 2kmv.$$

我們可以看出,它是由两种力合成的: (i) 与质点离中心的距离成正比的且指向中心的力(与簡諧振动同样的力)及 (ii) 与速度成正比且与速度方向相反的阻力.

§9. 微　分

在以上几节中，我們已知 Δx 本身是一个自变量，与 x 无关．我們把它叫做自变量的微分，用 Δx 或者 dx 表它．注意，这个記号并不是 d 与 x 的乘积，dx 作为一个符号采用，这表示自变量的改变量，它与 x 无关．

一个函数的微商与自变量的微分的乘积，称为这个函数的微分．用 dy 或 $df(x)$ 来記它，也就是

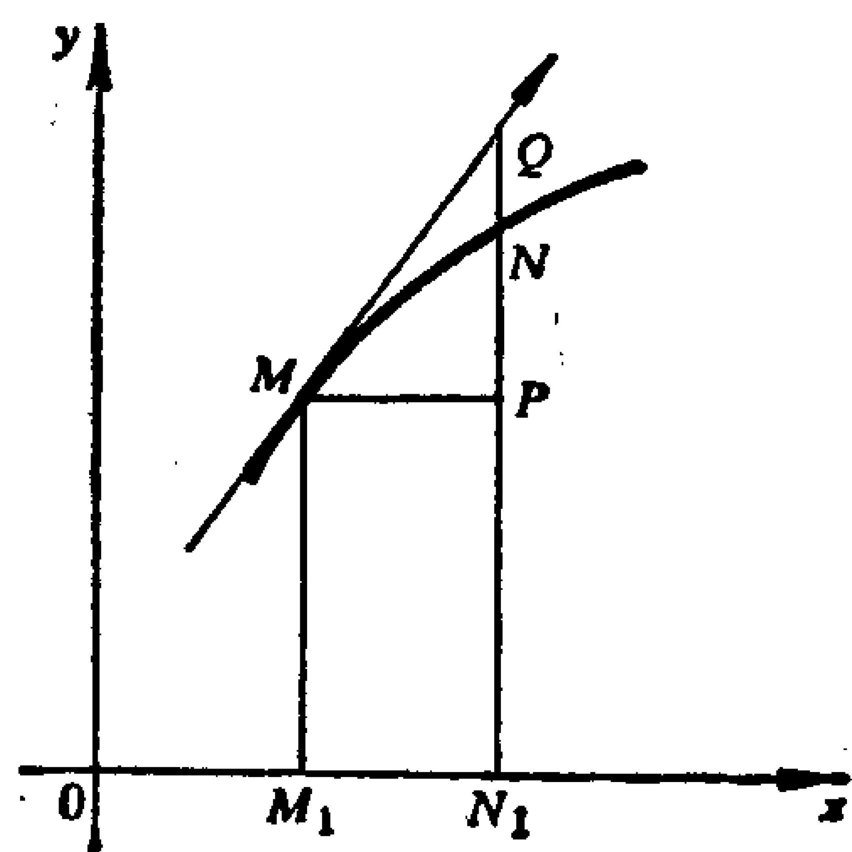


图 115

$$dy = df(x) = f'(x)dx.$$

所以微商就是微分的商：

$$\frac{dy}{dx} = f'(x).$$

函数的微分是和它的改变量不一样的．在曲綫上取一点 $M(x, y)$ 与另一点 N．做切綫 MQ，作出 M 与 N 点的纵坐标及平行于 x 軸的直綫 MP．現在

$$\overline{MP} = \overline{M_1N_1} = \Delta x \ (\text{或}\ dx),$$

$$\overline{PN} = \Delta y \quad (y\ \text{的改变量}).$$

但是

$$dy = f'(x)dx = \overline{MP}\ \text{tg}\,(\angle PMQ) = \overline{PQ}.$$

显然 $\overline{PQ}$ 并不是 $\overline{PN}$，也就是 dy 并不是 Δy．

虽然如此，但是

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x) + \varepsilon, \qquad (\Delta x \to 0)$$

此处的 ε 是一个无穷小．这一点不难証明，因为由定义就知道

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x).$$

所以

$$\Delta y = f'(x)\Delta x + o(\Delta x),$$

或者

$$\Delta y - dy = o(\Delta x).$$

这一公式說明了微分的一个重要特性：函数的微分和函数的改变量之差是自变量改变量 Δx 的高級无穷小．微分的另一重要特性是：dy 是 dx 的綫性函数．这两个特性完全决定了微分本身，換句話說，如果有一个量，同时具备上述两性质，那末这个量就是函数的微分．

根据这两个性质，很容易想到，用微分代替函数改变量来进行近似計算是很方便的．

我們可以立刻推出微分的一些基本性质：

1°. 常量的微分等于 0，即 $dc = (c)'dx = 0 \cdot dx = 0$．

2°. $d(u(x) + v(x)) = du(x) + dv(x)$．

3°. $d(u(x)v(x)) = u(x)dv(x) + v(x)du(x)$，特别有 $d(cu(x)) = cdu(x)$.

4°. $d\left(\frac{u(x)}{v(x)}\right) = \frac{1}{v(x)^2}[v(x)du(x) - u(x)dv(x)]$.

5°. 复合函数 $y = f(u)$，$u = \varphi(x)$，则

$$dy = y'_x dx = f'(u)u'_x dx = f'(u)du.$$

这个式子告訴我們，不論 u 是中間变量或是自变量，函数 $y = f(u)$ 的微分永远可以写为 $dy = f'(u)du$，这就是所謂一阶微分形式的不变性. 以后我們将看到，对高阶微分就不复有此性质了.

不难推得常用的公式

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\frac{du}{dx}.$$

例.

$$y = f(x) = x^3 + 2x^2 + 4x + 10.$$

在 $x = 2$ 与 $\Delta x = 0.01$ 时

$$\Delta y = f(2.01) - f(2) = 0.240801.$$

另一方面，

$$dy = f'(x)dx = (3 \times 2^2 + 4 \times 2 + 4)0.01 = 0.2400.$$

dy 与 Δy 相同到三位小数.

§10. 誤差的估計

当实际測量或不精确地計算时(如四舍五入法)，任何一个量 x 可能有誤差 Δx. Δx 称为絕对誤差，而

$$\frac{\Delta x}{x}$$

称为相对誤差. 設 $y = f(x)$，由确定 x 时的誤差 Δx，y 所产生的誤差为 Δy. 当 Δx 的值很小时，我們可以取微分 dy 作 Δy 的近似值. 因而要測的量 y 的相对誤差就差不多是

$$\left|\frac{dy}{y}\right|.$$

例 1.

$$\left|\frac{d(uv)}{uv}\right| \leqslant \left|\frac{du}{u}\right| + \left|\frac{dv}{v}\right|,$$

$$\left|\frac{d\left(\frac{v}{u}\right)}{\frac{v}{u}}\right| \leqslant \left|\frac{du}{u}\right| + \left|\frac{dv}{v}\right|.$$

这就是第一章所涉及的积、商的誤差估計公式.

例 2. 求半径发生誤差时，圓面积的誤差.

$$Q = \pi r^2 \qquad dQ = 2\pi r dr$$

$$\frac{dQ}{Q} = \frac{2\pi r dr}{\pi r^2} = 2\frac{dr}{r}.$$

面积的相对誤差大約等于半径的相对誤差的两倍.

例 3. 求对数的誤差. 当 x 有一誤差时,求 x 的常用对数 $y = \log_{10} x$ 的誤差,此处

$$y' = \frac{M}{x} \qquad (M \doteq 0.4343).$$

所以

$$dy = 0.4343\frac{dx}{x},$$

卽 x 的对数 y 的絕对誤差,单純地依賴于 x 本身的相对誤差而确定.

用这公式可以估計我們常用的 25 厘米 (= 250 毫米)的对数尺的准确度. 在放置瞄准器或計数时可能发生誤差,例如可能誤差在左右各十分之一毫米之間,則对数上对应的誤差:

$$dy = \frac{0.1}{250} = 0.0004.$$

依我們的公式

$$\frac{dx}{x} = \frac{0.0004}{0.4343} = 0.00092\cdots \doteq 0.001.$$

計数的相对准确度在算尺的任何部分是相同的.

例 4. 在依三角函数的对数表而求角 φ 时,我們发生了这样的一个問題,用正弦表或正切表那一种更为有利.

$$y_1 = \log_{10}\sin\varphi \text{ 及 } y_2 = \log_{10}\operatorname{tg}\varphi,$$

假定 y_1, y_2 的絕对誤差 dy_1, dy_2 是相等的, 如果用 $d_1\varphi$ 与 $d_2\varphi$ 表示角 φ 的对应的誤差, 則

$$dy_1 = \frac{M}{\sin\varphi}\cdot\cos\varphi\cdot d_1\varphi = \frac{M}{\operatorname{tg}\varphi}d_1\varphi,$$

$$dy_2 = \frac{M}{\operatorname{tg}\varphi}\cdot\sec^2\varphi d_2\varphi,$$

卽得

$$d_2\varphi \doteq d_1\varphi\cdot\cos^2\varphi < d_1\varphi.$$

由此可見,对数值有同等的誤差时,正切对数表所給的角比正弦对数表所給出的角有較小的誤差,也就是說用前者更为有利.

例 5. 利用正切电流計确定电流強度时,用公式

$$i = k\operatorname{tg}\varphi.$$

假定讀角度的誤差是 $d\varphi$, 則

$$di = \frac{kd\varphi}{\cos^2\varphi},$$

$$\frac{di}{i} = \frac{kd\varphi}{k\cos^2\varphi\,\mathrm{tg}\,\varphi} = \frac{2}{\sin 2\varphi}\,d\varphi.$$

由此看出，当 φ 接近 45° 时，确定 i 时的相对誤差較小。

漸近式． 命 $\Delta x = x - x_0$，則由

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = f'(x_0)$$

可知

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \to f'(x_0).$$

所以我們不妨把 $(x - x_0)f'(x_0)$ 看做为 $f(x) - f(x_0)$ 的漸近式．我們用

$$f(x) - f(x_0) \doteq (x - x_0)f'(x_0)$$

表它，也就是

$$f(x) \doteq f(x_0) + (x - x_0)f'(x_0).$$

特別，如 $x_0 = 0$，則

$$f(x) \doteq f(0) + xf'(0).$$

例如，

$$(1+x)^\lambda \doteq 1 + \lambda x,$$

特別，

$$(1+x)^{\frac{1}{2}} \doteq 1 + \frac{1}{2}x.$$

$$e^x \doteq 1 + x,\qquad \log(1+x) \doteq x,\qquad \sin x \doteq x,\qquad \mathrm{tg}x \doteq x.$$

例 6． 悬鏈綫．

設有两端悬挂着的有重量的鏈条（图 116），鏈长为 s，跨度为 l，垂度为 f，則經常用近似公式

$$s \doteq l + \frac{8}{3}\frac{f^2}{l}$$

（实質上应当是 $s = 2k\,\mathrm{sh}\,\frac{l}{2k}$ 而 k 由 $f = 2k\,\mathrm{sh}\,\frac{l}{4k}$ 确定）。

把 f 当做自变数，

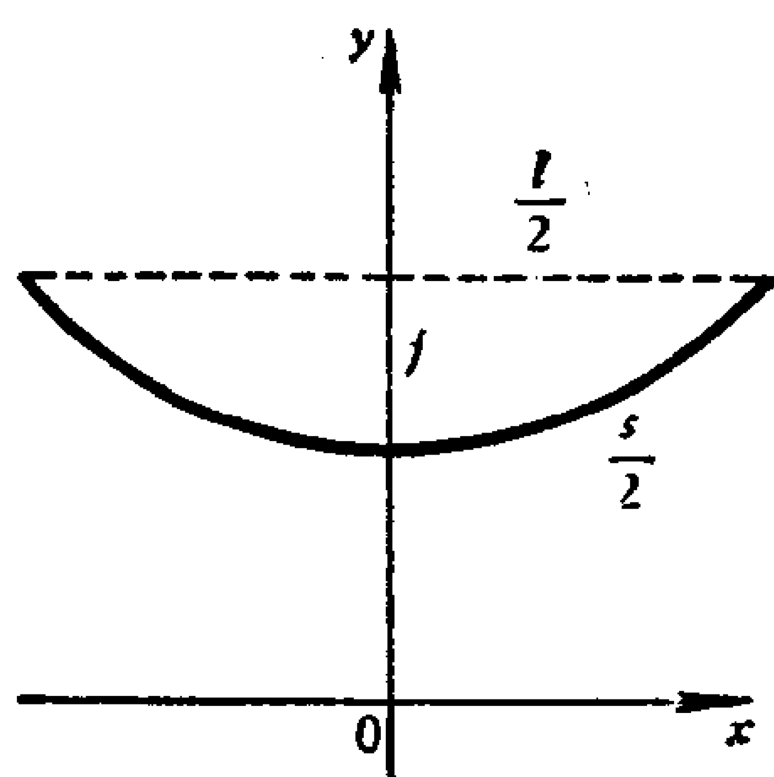


图 116

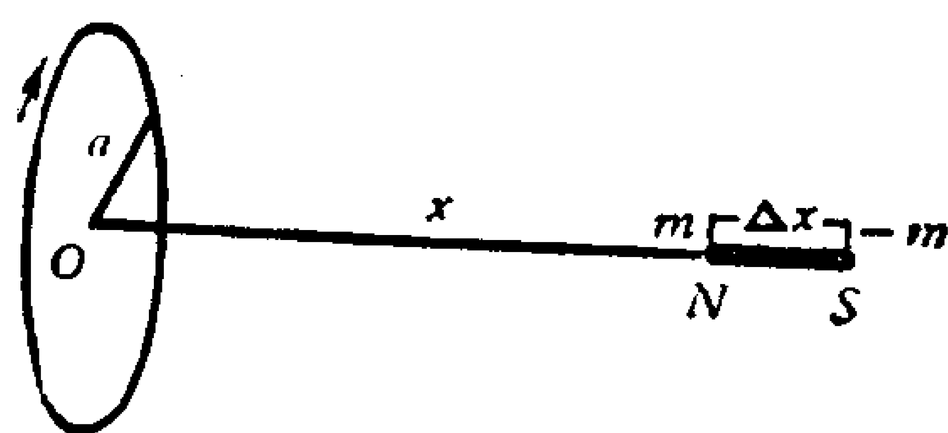


图 117

$$ds \doteq \frac{16}{3}\frac{f}{l}df, \qquad df \doteq \frac{3l}{16f}ds.$$

例如、我們估計到由于溫度所引起的长度的变动，便可以預見垂度 f 所产生的变动.

例 7. 已知圓形电流作用于位在其軸上且与圓中心 O 距离为 x 的单位磁极的力是

$$\frac{k}{(a^2+x^2)^{3/2}},$$

此处 k 是常数，a 为半径. 求沿軸，在 x 处放置一块长度为 Δx 的磁铁 NS 所受圓形电流作用的力(图 117). 算作在 N 极集中着正磁量 m，而在 S 极集中着与它相等的負磁量 $-m$

电流作用于磁铁的力 F 可以表示为

$$F \doteq \frac{km}{(a^2+x^2)^{3/2}} - \frac{km}{(a^2+(x+\Delta x)^2)^{3/2}} = -km\cdot\Delta\left[\frac{1}{(a^2+x^2)^{3/2}}\right]$$

$$\doteq -km\frac{d}{dx}\left[\frac{1}{(a^2+x^2)^{3/2}}\right]\Delta x = \frac{3kmx\Delta x}{(a^2+x^2)^{5/2}}.$$

§11. 高 阶 微 商

在开始的时候，我們就已經說明过速度是距离对时間的微商，而加速度又是速度对时間的微商. 所以加速度是由距离对时間連續求二次微商而得来的，这称为二阶微商，即

$$v = \frac{ds}{dt}, \qquad a = \frac{dv}{dt}.$$

我們写成为 $a = \frac{d^2s}{dt^2} = s''$.

一般講来，我們用归納法来定义高阶微商. $y=f(x)$ 的 $n-1$ 阶微商 $y^{(n-1)}=f^{(n-1)}(x)$ 的微商(如果存在)称为 n 阶微商，以 $y^{(n)}=f^{(n)}(x)$ 来表它. 在 $x=x_0$ 这一点的微商值以

$$f^{(n)}(x)\,|_{x=x_0}$$

表示.

例如，

$$y = ax^4+bx^3+cx^2+dx+e,$$

則

$$y' = 4ax^3+3bx^2+2cx+d,$$
$$y'' = 12ax^2+6bx+2c,$$
$$y''' = 24ax+6b,$$
$$y^{\mathrm{IV}} = 24a.$$

以后的各級微商都等于 0.

又如

$$y = \log(x+\sqrt{x^2+1}),$$

則

$$y' = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}, \quad y'' = -\frac{x}{(x^2+1)^{3/2}}, \quad y''' = \frac{2x^2-1}{(x^2+1)^{5/2}}, \text{等等}.$$

高阶微商当然也都有一阶微商所出现的各式各样的现象，如左微商，右微商等．

显然有

$$(cu)^{(n)} = c \cdot u^{(n)},\ (u \pm v)^{(n)} = u^{(n)} \pm v^{(n)}.$$

再举一例子．

1）命 u 为任何实数，$y = x^u$，我們依次有

$$y' = ux^{u-1},\ y'' = u(u-1)x^{u-2},\ \cdots,$$

一般有

$$y^{(n)} = u(u-1)\cdots(u-n+1)x^{u-n}.$$

我們用归納法証此公式．

$$\begin{aligned}(y^{(n)})' &= u(u-1)\cdots(u-n+1)(x^{u-n})' \\ &= u(u-1)\cdots(u-n+1)(u-n)x^{u-n-1} = y^{(n+1)},\end{aligned}$$

特例．$u = -1$，則

$$\left(\frac{1}{x}\right)^{(n)} = \frac{(-1)^n \cdot n!}{x^{n+1}};$$

$u = -\frac{1}{2}$，則

$$\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^{(n)} = \left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{3}{2}\right)\cdots\left(-\frac{2n-1}{2}\right)x^{-\frac{1}{2}-n} = (-1)^n\frac{(2n)!}{2^{2n}\cdot n!\,x^{n+\frac{1}{2}}}.$$

2）命 $y = \log x$，由

$$y' = (\log x)' = \frac{1}{x}$$

可知，

$$y^{(n)} = (y')^{(n-1)} = \left(\frac{1}{x}\right)^{(n-1)} = \frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{x^n}.$$

3）命 $y = a^x$，則

$$y^{(n)} = a^x \cdot (\log a)^n,$$

特別有

$$(e^x)^{(n)} = e^x.$$

4）命 $y = \sin x$，則

$$y' = \cos x = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right),$$

$$y'' = \cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = \sin(x + \pi),$$

一般有

$$y^{(n)} = \sin\left(x + \frac{n\pi}{2}\right).$$

我們用归納法証明此式．

$$(y^{(n)})' = \cos\left(x + \frac{n\pi}{2}\right) = \sin\left(x + \frac{(n+1)\pi}{2}\right).$$

同法可得

$$(\cos x)^{(n)} = \cos\left(x + \frac{n\pi}{2}\right).$$

5) 命 $y = \dfrac{1}{x^2 - a^2}$, 由于

$$y = \frac{1}{2a}\left(\frac{1}{x-a} - \frac{1}{x+a}\right),$$

立即得到

$$\left(\frac{1}{x^2 - a^2}\right)^{(n)} = \frac{(-1)^n n!}{2a}\left\{\frac{1}{(x-a)^{n+1}} - \frac{1}{(x+a)^{n+1}}\right\}.$$

6) 命 $y = e^{ax}\sin bx$, 则

$$y' = ae^{ax}\sin bx + be^{ax}\cos bx.$$

引入輔助角 φ,

$$\sin\varphi = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}, \qquad \cos\varphi = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}},$$

则

$$\begin{aligned} y' &= \sqrt{a^2 + b^2}\cdot e^{ax}\{\sin bx\cos\varphi + \cos bx\sin\varphi\} \\ &= \sqrt{a^2 + b^2}\cdot e^{ax}\cdot\sin(bx + \varphi), \end{aligned}$$

一般地,由归納法可以建立

$$y^{(n)} = (a^2 + b^2)^{\frac{n}{2}}\cdot e^{ax}\cdot\sin(bx + n\varphi).$$

7) 命 $y = \operatorname{arc\,tg} x$, 则 $x = \operatorname{tg} y$,

$$\begin{aligned} y' &= \frac{1}{1 + x^2} = \cos^2 y = \cos y\sin\left(y + \frac{\pi}{2}\right) \\ y'' &= \left[-\sin y\cdot\sin\left(y + \frac{\pi}{2}\right) + \cos y\cdot\cos\left(y + \frac{\pi}{2}\right)\right]y' = \\ &= \cos^2 y\cos\left(2y + \frac{\pi}{2}\right) = \cos^2 y\sin 2\left(y + \frac{\pi}{2}\right). \\ y''' &= \left[-2\sin y\cdot\cos y\cdot\sin 2\left(y + \frac{\pi}{2}\right) + 2\cos^2 y\cos 2\left(y + \frac{\pi}{2}\right)\right]\cdot y' \\ &= 2\cos^3 y\cdot\cos\left(3y + 2\cdot\frac{\pi}{2}\right) = 2\cos^3 y\cdot\sin 3\left(y + \frac{\pi}{2}\right). \end{aligned}$$

一般地,由归納法可以建立

$$y^{(n)} = (n-1)!\cos^n y\cdot\sin n\left(y + \frac{\pi}{2}\right).$$

当 $x > 0$ 时,引入角 z:

$$z = \operatorname{arc\,tg}\frac{1}{x} = \frac{\pi}{2} - y,$$

则上式成为

$$\begin{aligned} y^{(n)} &= (n-1)!\frac{1}{(1+\operatorname{tg}^2 y)^{n/2}}\sin n(\pi - z) = (-1)^{n-1}(n-1)!\frac{1}{(1+x^2)^{n/2}}\sin nz \\ &= (-1)^{n-1}(n-1)!\frac{1}{(1+x^2)^{n/2}}\sin\left(n\operatorname{arc\,tg}\frac{1}{x}\right). \end{aligned}$$

8）命 $y_n = x^{n-1}e^{\frac{1}{x}}$，則

$$y_1' = (e^{\frac{1}{x}})' = -\frac{1}{x^2}e^{\frac{1}{x}},$$

$$y_2'' = (xe^{\frac{1}{x}})'' = \left(e^{\frac{1}{x}} - \frac{1}{x}e^{\frac{1}{x}}\right)' = \frac{1}{x^3}e^{\frac{1}{x}}.$$

一般地

$$y_n^{(n)} = (-1)^n \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^{n+1}} \quad (n = 1, 2, \cdots).$$

我們用归納法来証明此式：

$$y_{n+1}^{(n+1)} = \left[\frac{d}{dx}(x^n e^{\frac{1}{x}})\right]^{(n)} = \left[nx^{n-1}e^{\frac{1}{x}} - x^{n-2}e^{\frac{1}{x}}\right]^{(n)}$$

$$= n(x^{n-1}e^{\frac{1}{x}})^{(n)} - (x^{n-2}e^{\frac{1}{x}})^{(n)}$$

$$= n\cdot(-1)^n \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^{n+1}} - \left[(-1)^{(n-1)}\frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^n}\right]' = (-1)^{n+1}\frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^{n+2}}.$$

9）微商还有下面的应用．一个多項式 $f(x)$ 如果可以被 $(g(x))^l$ 所除尽，則 $f'(x)$ 一定能为 $(g(x))^{l-1}$ 所除尽．特别有，如果 $f(x) = 0$ 有 $x = \alpha$ 为其 l 重根，則 $f'(x) = 0$ 有 $x = \alpha$ 为其 $l-1$ 重根．

証．由假定显然可見

$$f(x) = (g(x))^l k(x).$$

求微分可知

$$f'(x) = l(g(x))^{l-1}g'(x)k(x) + (g(x))^l k'(x) = (g(x))^{l-1}(lg'(x)k(x) + g(x)k'(x)).$$

另一方面，如果 $f'(x) = 0$ 有一个 $l-1$ 重根 $x = \alpha$，这并不能說明 $f(x)$ 有 $x = \alpha$ 做根．但是能够說 $f(x) - f(\alpha)$ 以 $x = \alpha$ 为其 l 重根．这一証明是不难的，从略。

§12. Leibnitz 公式

定理． 如果 u, v 都是 x 的函数，各自有 n 級为止的各級导数，則

$$(uv)^{(n)} = \sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}u^{(n-i)}v^{(i)} = u^{(n)}v + nu^{(n-1)}v' +$$

$$+ \frac{n(n-1)}{1\cdot 2}u^{(n-2)}v'' + \cdots + \frac{n(n-1)\cdots(n-i+1)}{1\cdot 2\cdots i}u^{(n-i)}v^{(i)} + \cdots + uv^{(n)}.$$

我們用了如下的符号：

$$\binom{n}{i} = \frac{n!}{i!(n-i)!} \quad \left(\text{有时也記为} \binom{n}{i} = C_n^i\right).$$

証．我們已經知道这一公式当 $n = 1$ 时是正确的，現在行归納法．

$$(uv)^{(n+1)}=((uv)^{(n)})'=\left(\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}u^{(n-i)}v^{(i)}\right)'=\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}(u^{(n-i)}v^{(i)})'$$

$$=\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}(u^{(n-i+1)}v^{(i)}+u^{(n-i)}v^{(i+1)})=\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}u^{(n-i+1)}v^{(i)}+$$

$$+\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}u^{(n-i)}v^{(i+1)}=u^{(n+1)}v+\sum_{i=1}^{n}\left[\binom{n}{i}+\binom{n}{i-1}\right]u^{(n-i+1)}v^{(i)}+uv^{(n+1)},$$

因为

$$\binom{n}{i}+\binom{n}{i-1}=\binom{n+1}{i}.$$

即得所求.

Leibnitz 公式与二项式定理 $(u+v)^n$ 有相同的結构. 实質上，多个因子的連乘积 $y=uv\cdots t$ 的 n 級微商也有一个与 $(u+v+\cdots+t)^n$ 的展式相类似的公式.

現在举一些例子.

1) 命 $v=x^2$, $u=\cos ax$, 則

$$v'=2x,\ v''=2,\ v^{(3)}=v^{(4)}=\cdots=0,\ u^{(k)}=a^k\cos\left(ax+\frac{k\pi}{2}\right).$$

故

$$(x^2\cos ax)^{(50)}=x^2\cdot a^{50}\cdot\cos\left(ax+50\frac{\pi}{2}\right)+50\cdot 2x\cdot a^{49}\cdot\cos\left(ax+49\cdot\frac{\pi}{2}\right)+$$

$$+\frac{50\cdot 49}{1\cdot 2}\cdot 2\cdot a^{48}\cdot\cos\left(ax+48\cdot\frac{\pi}{2}\right)=a^{48}\{(2450-a^2x^2)\cos ax-100ax\cdot\sin ax\}.$$

2) 命 $u=e^{ax}$, $v=\sin bx$, 則

$$(uv)^{(n)}=e^{ax}\left\{\sin bx\cdot\left(a^n-\frac{n(n-1)}{2}a^{n-2}b^2+\cdots\right)+\right.$$

$$\left.+\cos bx\left(na^{n-1}b-\frac{n(n-1)(n-2)}{3!}a^{n-3}b^3+\cdots\right)\right\}.$$

3) 命 $y=\arcsin x$, 求 $y^{(n+1)}$.

$$y'=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}=\frac{1}{\sqrt{1+x}}\cdot\frac{1}{\sqrt{1-x}}.$$

命 $u=\dfrac{1}{\sqrt{1+x}}$, $v=\dfrac{1}{\sqrt{1-x}}$, 由(11.1)得出

$$y^{(n+1)}=(uv)^{(n)}=\left(\frac{1}{\sqrt{1+x}}\right)^{(n)}\frac{1}{\sqrt{1-x}}+n\left(\frac{1}{\sqrt{1+x}}\right)^{(n-1)}\left(\frac{1}{\sqrt{1-x}}\right)'+$$

$$+\frac{n(n-1)}{2!}\left(\frac{1}{\sqrt{1+x}}\right)^{(n-2)}\left(\frac{1}{\sqrt{1-x}}\right)^{(2)}+\cdots$$

$$=\frac{(-1)^n}{2^{2n}\sqrt{1-x^2}}\left\{\frac{(2n)!}{n!(1+x)^n}-n\frac{(2n-2)!\,2!}{(n-1)!1!(1+x)^{n-1}(1-x)}+\right.$$

$$\left.+\frac{n(n-1)}{2}\cdot\frac{(2n-4)!\,4!}{(n-2)!2!(1+x)^{n-2}(1-x)^2}-\cdots\right\}.$$

4) 命 $y_a^{(n)}$ 表示当 $x=a$ 时 $y^{(n)}$ 的数值，求 $y=\operatorname{arc\,tg} x$ 的各级微商在 $x=0$ 时的数值.

由于 $y'=\dfrac{1}{1+x^2}$, 所以

$$(1+x^2)y'=1.$$

等式两端取 n 級微商，得

$$(1+x^2)y^{(n+1)}+2nxy^{(n)}+n(n-1)y^{(n-1)}=0.$$

因此

$$y_0^{(n+1)}=-n(n-1)y_0^{(n-1)}.$$

由于

$$y_0'=1,\ y''=\frac{-2x}{(1+x^2)^2},\ y_0''=0,$$

得

$$y_0^{(2m)}=0 \qquad (m=1,2,\cdots),$$
$$y_0^{(2m+1)}=(-1)^m(2m)! \quad (m=0,1,2,\cdots).$$

5) 命 $X_n(x)=\dfrac{1}{2^n\cdot n!}[(x^2-1)^n]^{(n)}$. 这多項式称为 n 次 Legendre 多項式. 現在来求 $X_n(1)$ 与 $X_n(-1)$.

命 $u=(x+1)^n$, $v=(x-1)^n$, 則

$$X_n(x)=\frac{1}{2^n\cdot n!}\{(x+1)^n[(x-1)^n]^{(n)}+C_n^1[(x+1)^n]'[(x-1)^n]^{(n-1)}+\cdots$$
$$+[(x+1)^n]^{(n)}(x-1)^n\}.$$

因此立即得到

$$X_n(1)=1,\ X_n(-1)=(-1)^n.$$

还可以証明 $X_n(x)$ 满足关系式

$$(x^2-1)X_n''+2x\cdot X_n'-n(n+1)X_n=0.$$

命 $y=\dfrac{1}{2^n\cdot n!}(x^2-1)^n$, 則

$$y'=\frac{1}{2^n\cdot n!}\cdot 2nx(x^2-1)^{n-1},$$

$$(x^2-1)\cdot y'=2nx\cdot y.$$

两边取 $(n+1)$ 阶微商，即明所欲証.

§13. 高阶微分

高阶微分也是用归納法来定义的. 一阶微分的微分謂之二阶微分

$$d^2y=d(dy).$$

而

$$d^ny=d(d^{n-1}y).$$

命 $y=f(x)$, 則

$$dy=f'(x)dx.$$

而

$$d^2y = d(dy) = d(f'(x)dx) = d(f'(x))dx = f''(x)dx^2$$

及

$$d^3y = d(f''(x)dx^2) = f'''(x)dx^3.$$

易見一般有

$$d^ny = y^{(n)} \cdot dx^n,$$

或可以写成为

$$y^{(n)} = \frac{d^ny}{dx^n}.$$

而 Leibnitz 的公式就变为

$$d^n(uv) = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} d^{n-i}ud^iv$$

(此处 $d^0u = u$, $d^0v = v$).

但需注意,对于复合函数

$$y = f(x), \qquad x = \varphi(t).$$

有与一阶微商不同的情况,現在有

$$dy = y'_x \cdot dx,$$

其中 dx 并不是一个自变量, $dx = x'_t dt$ 是一个与 t 有关的函数. 所以

$$\begin{aligned} d^2y &= d(dy) = d(y'_x)dx + y'_x d(dx) \\ &= (y'_x)'_x dx^2 + y'_x d^2x = y''_{x^2}dx^2 + y'_x d^2x. \end{aligned}$$

当 x 是自变量时, $d^2x = 0$, 所以得出 $d^2y = y''_{x^2}dx^2$. 在这一情况时,第二項不見了.

例如, $y = x^2$. 把 x 当作自变数时

$$dy = 2xdx, \qquad d^2y = 2dx^2.$$

但是如果命 $x = t^2$, 即 $y = t^4$, 則

$$dy = 4t^3dt, \qquad d^2y = 12t^2dt^2.$$

如果把 $x = t^2$, $dx = 2tdt$ 代入,且把 x 当作自变量所得出的式子为

$$d^2y = 2(2tdt)^2 = 8t^2dt^2,$$

而不是 $12t^2dt^2$. 算錯了的原因是,我們沒有注意到 x 并非自变数, 而是自变数 t 的函数. 应当代入的公式是

$$d^2y = y''_{x^2}dx^2 + y'_x d^2x = 2dx^2 + 2xd^2x = 2(2tdt)^2 + 2 \cdot t^2 2dt^2 = 12t^2dt^2.$$

参变数表示法的高阶微商. 命

$$x = \varphi(t), \qquad y = \psi(t).$$

我們可以把所有的微分都看成为对 t 的微分,如此則

$$y'_x = \frac{dy}{dx},$$

$$y''_{x^2} = \left(\frac{dy}{dx}\right)'_x = \frac{d\left(\dfrac{dy}{dx}\right)}{dx} = \frac{\dfrac{dxd^2y - d^2xdy}{dx^2}}{dx},$$

即

$$y''_{x^2}=\frac{dxd^2y-d^2xdy}{dx^3}.$$

又

$$y'''_{x^3}=\left(\frac{dx\cdot d^2y-d^2x\cdot dy}{dx^3}\right)'_x=\frac{d\left(\dfrac{dx\cdot d^2y-d^2x\cdot dy}{dx^3}\right)}{dx}$$

$$=\frac{\dfrac{dx^3(dxd^3y-d^3xdy)-3dx^2d^2x(dxd^2y-d^2xdy)}{dx^6}}{dx},$$

即

$$y'''_{x^3}=\frac{dx(dxd^3y-d^3xdy)-3d^2x(dxd^2y-d^2xdy)}{dx^5}$$

等等.

由于

$$dy=y'_tdt,\qquad dx=x'_tdt,$$

可知

$$y'_x=\frac{\dfrac{dy}{dt}}{\dfrac{dx}{dt}}=\frac{y'_t}{x'_t},$$

$$y''_{x^2}=\frac{x'_ty''_{t^2}-x''_{t^2}y'_t}{(x'_t)^3},$$

$$y'''_{x^3}=\frac{x'_t(x'_ty'''_{t^3}-x'''_{t^3}y'_t)-3x''_{t^2}(x'_ty''_{t^2}-x''_{t^2}y'_t)}{(x'_t)^5}.$$

等等.

例 1. 椭圓

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

有参变数表示法

$$x=a\cos\theta,\quad y=b\sin\theta,\quad 0\leqslant\theta<2\pi.$$

我們有

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{b\cos\theta}{a\sin\theta}=-\frac{b}{a}\operatorname{ctg}\theta,$$

而

$$\frac{d^2y}{dx^2}=-\frac{b}{a}\frac{d}{d\theta}\operatorname{ctg}\theta\frac{d\theta}{dx}=-\frac{b}{a^2}\frac{1}{\sin^3\theta}.$$

例 2. 曲綫

$$x^3+y^3-3axy=0$$

有参变数表示法

$$x=\frac{3at}{1+t^3},\quad y=\frac{3at^2}{1+t^3},\qquad -\infty<t<\infty$$

因而

$$\frac{dy}{dx}=\left(\frac{3at^2}{1+t^3}\right)'\Big/\left(\frac{3at}{1+t^3}\right)'=t(2-t^3)/(1-2t^3).$$

在 $t=t_0$ 的切綫方程是

$$y-\frac{3at_0^2}{1+t_0^3}=\frac{t_0(2-t_0^3)}{1-2t_0^3}\left(x-\frac{3at_0}{1+t_0^3}\right),$$

$$y=\frac{t_0(2-t_0^3)}{1-2t_0^3}x-\frac{3at_0^2}{1-2t_0^3}.$$

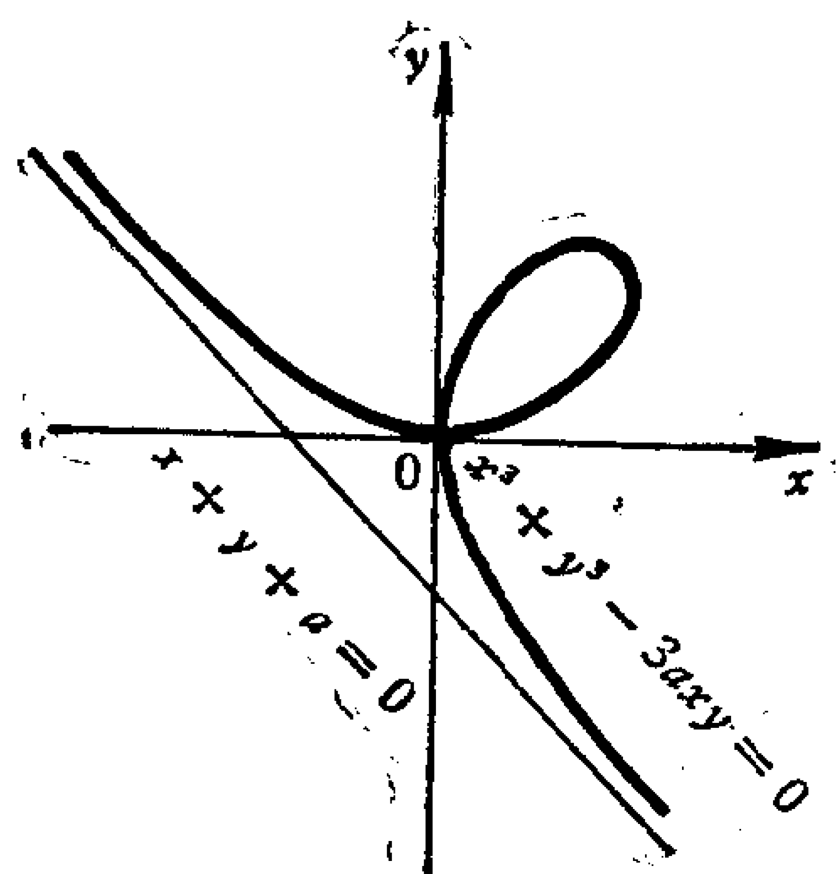


图 118

当 $t_0=1$ 时，卽在 $\left(\frac{3}{2}a,\frac{3}{2}a\right)$，切綫的方程是

$$x+y=3a.$$

最有趣的是在 $t_0=0$ 时（卽在(0,0)），切綫的方程是

$$y=0.$$

又改一下写法，

$$\frac{1-2t_0^3}{t_0(2-t_0^3)}y=x-\frac{3at_0}{2-t_0^3}.$$

当 $t_0\to\infty$ 时，則得另一在原点的切綫方程

$$x=0.$$

这一現象，在图形上看得很清楚(图 118)。

§14. 函数的差分

用 h 表自变量的改变量，所对应的函数的改变量是

$$\Delta y=f(x+h)-f(x).$$

它叫做函数 $f(x)$ 的一阶差分. 差分也是 x 的函数. 还可以再求差分. 我們用 $\Delta^2 y$ 表示 Δy 的差分，也就是

$$\Delta^2 y=\Delta(\Delta y)=(f(x+2h)-f(x+h))-(f(x+h)-f(x))$$
$$=f(x+2h)-2f(x+h)+f(x).$$

同法定义三阶差分

$$\Delta^3 y=\Delta(\Delta^2 y)=f(x+3h)-3f(x+2h)+3f(x+h)-f(x).$$

可用归納法定义任何阶差分，并可証明

$$\Delta^n y=\Delta(\Delta^{n-1}y)=f(x+nh)-nf(x+\overline{n-1}h)+\frac{n(n-1)}{2}f(x+\overline{n-2}h)-$$

$$-\cdots+(-1)^k\frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!}f(x+\overline{n-k}h)+\cdots+(-1)^n f(x)$$

$$=\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}f(x+\overline{n-k}h).$$

当 h 很小时，Δy 与 dy 也相差很小. 高阶差分也可以用来作为同阶微分的近似值；反

之亦然．例如，如果我們知道了一函数在等距离之点所取的数值的表格后，由于沒有函数表达式，我們并不能求出各阶微商．但是我們可以計算 $\frac{\Delta^n y}{\Delta x^n}$ 作为微商的近似值，用以代替 $\frac{d^n y}{dx^n}$．

例如以在 (2, 3) 上 $y = x^3$ 的 $\Delta x = h = 0.1$ 的差分表为例．

x	y	Δy	$\Delta^2 y$	$\Delta^3 y$	$\Delta^4 y$	$dy = 3x^2 dx$	$d^2 y = 6x dx^2$	$d^3 y = 6dx^3$	$d^4 y = 0$
2	8.000	1.261	0.126	0.006	0	1.200	0.120	0.006	0
2.1	9.261	1.387	0.132	0.006	0	1.323	0.126	0.006	0
2.2	10.648	1.519	0.138	0.006	0	1.452	0.132	0.006	0
2.3	12.167	1.657	0.144	0.006	0	1.587	0.138	0.006	0
2.4	13.824	1.801	0.150	0.006	0	1.728	0.144	0.006	0
2.5	15.625	1.951	0.156	0.006	0	1.875	0.150	0.006	0
2.6	17.576	2.107	0.162	0.006	0	2.028	0.156	0.006	0
2.7	19.683	2.269	0.168	0.006	—	2.187	0.162	0.006	—
2.8	21.952	2.437	0.174	—	—	2.352	0.168	—	—
2.9	24.389	2.611	—	—	—	2.523	—	—	—
3	27.000	—	—	—	—	—	—	—	—

現在来比較二級微商 y'' 当 $x = 2$ 时的近似值与正确值．

$$y_2'' = 12,$$

$$\frac{\Delta^2 y}{h^2} = \frac{0.126}{0.01} = 12.6.$$

附記． 我們也可以用 $x - h, x - 2h, \cdots, x - nh$ 等点的函数值的高阶差分来代替高阶微分，也可以用"对称"的函数值(比較第三章插入法的 Newton, Bessel, Stirling 公式)，特别常用的是

$$\frac{d^2 y}{dx^2} \doteq \frac{f(x + h) - 2f(x) + f(x - h)}{h^2}.$$

第六章　微商的应用

§1. 曲綫的上升与下降

假定 $f(x)$ 是在一区間 (a, b) 上定义了的函数，在其中的一点 $x = x_0$ 附近 $[x_0 - \delta, x_0 + \delta]$，如果当 x 增大时，$f(x)$ 也增大，这函数 $f(x)$ 称为增函数，所表示的曲綫称为在 $x = x_0$ 附近上升．显然，当 $h > 0$ 时

$$f(x_0 - h) \leqslant f(x_0) \leqslant f(x_0 + h),$$

卽得

$$\frac{f(x_0) - f(x_0 - h)}{-h} \leqslant 0 \leqslant \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}.$$

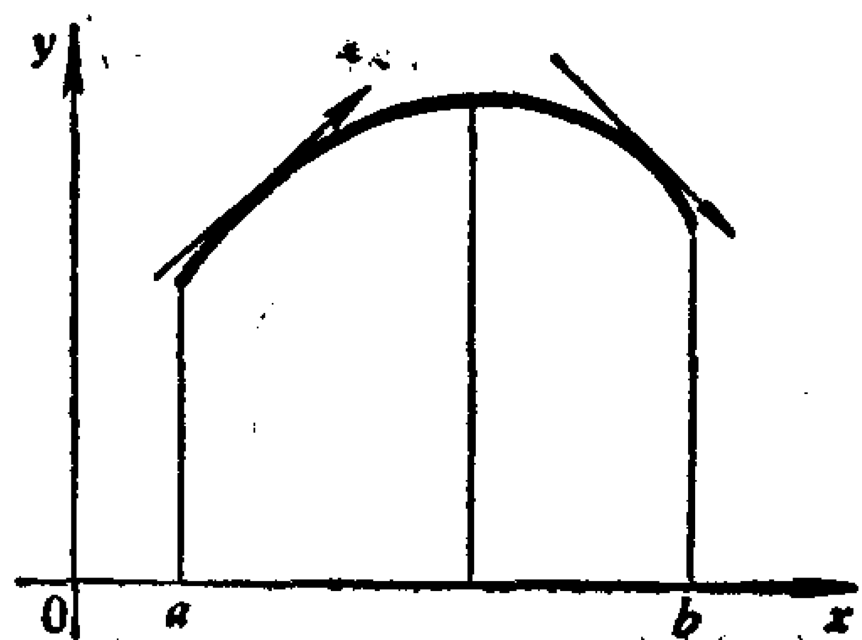


图　119

命 $h \to 0$，如果微商存在，則得

$$f'(x_0) \geqslant 0.$$

反之，如果

$$f'(x_0) \geqslant 0,$$

則当 h 充分小时，有

$$\frac{f(x_0) - f(x_0 - h)}{-h} \leqslant 0 \leqslant \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h},$$

也就是說，$f(x)$ 在 $x = x_0$ 附近上升．

同法，我們定义降函数，就是当 x 增加时 $f(x)$ 减小的函数．在 $x = x_0$ 附近下降的条件是 $f'(x_0) \leqslant 0$．

还可以更确切些，如果 $f'(x_0) > 0$，則由定义可知当 h 充分小时

$$\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} > 0,$$

卽得 $f(x_0 + h) > f(x_0)$．換言之，这是一个严格上升的函数．我們立刻可以推得

定理 1.　使 $f'(x) > 0$ 的区間是 $f(x)$ 上升的区間，而使 $f'(x) < 0$ 的区間是 $f(x)$ 下降的区間．

例 1.　当 $x > 0$ 时，我們考虑函数

$$f(x) = x - \sin x.$$

它的微商是

$$f'(x) = 1 - \cos x > 0,$$

所以 $f(x)$ 是一增函数．而 $f(0) = 0$，所以

$$f(x) > 0, \qquad 卽 \qquad x > \sin x.$$

例 2. 当 $x>0$ 时，

$$\sin x > x - \frac{x^3}{6}.$$

命

$$f(x) = \sin x - x + \frac{x^3}{6}.$$

它的微商

$$f'(x) = \cos x - 1 + \frac{x^2}{2} =$$

$$= \frac{x^2}{2} - 2\sin^2\frac{x}{2} = 2\left(\left(\frac{x}{2}\right)^2 - \left(\sin\frac{x}{2}\right)^2\right).$$

由例 1 可知 $f'(x)>0$，又 $f(0)=0$，所以得到所求証的不等式。

習題. 証明：当 $x>0$ 时，

$$\sin x < x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!}.$$

例 3. 当 $x>0$ 时，

$$x > \log(1+x) \qquad \text{或} \qquad e^x > 1 + x.$$

命

$$f(x) = x - \log(1+x).$$

求微商

$$f'(x) = 1 - \frac{1}{1+x} = \frac{x}{1+x} > 0.$$

在 $(0,\infty)$ 中，$f(x)$ 是上升的且 $f(0)=0$，因得所欲証。

例 4. Kepler 方程是用来确定行星在它的軌道上的位置，这方程是

$$x = q\sin x + \alpha, \qquad 0 < q < 1$$

此处 α 与 q 是已知数，x 是未知数。

命 k 是一这样的一个整数，使

$$k\pi \leqslant \alpha < (k+1)\pi.$$

命 $f(x) = x - q\sin x - \alpha$，显然

$$f(k\pi) = k\pi - \alpha \leqslant 0,$$

而

$$f((k+1)\pi) = (k+1)\pi - \alpha > 0.$$

又已知 $f'(x) = 1 - q\cos x > 0$，換言之，$f(x)$ 是一增函数。故仅有一根在 $k\pi$ 与 $(k+1)\pi$ 之間。

要解 Kapler 方程可用下法。先取任一 x_0（例如就是 $k\pi$），我們作

$$x_1 = q\sin x_0 + \alpha, \qquad x_2 = q\sin x_1 + \alpha, \cdots$$

$$x_n = q\sin x_{n-1} + \alpha.$$

如是則

$$|x_2 - x_1| = q|\sin x_1 - \sin x_0| = 2q\left|\sin\frac{x_1 - x_0}{2}\cos\frac{x_1 + x_0}{2}\right| \leqslant$$

$$\leqslant 2q\frac{|x_1 - x_0|}{2} = q|x_1 - x_0|$$

(此处用了 $|\sin x| \leqslant |x|$，$|\cos x| \leqslant 1$)．同法得

$$|x_3 - x_2| \leqslant q|x_2 - x_1| \leqslant q^2|x_1 - x_0|.$$

續行可得

$$|x_{n+1} - x_n| \leqslant q^n|x_1 - x_0|.$$

如果 $m > n$,

$$|x_m - x_n| \leqslant |x_m - x_{m-1}| + \cdots + |x_{n+1} - x_n| \leqslant$$
$$\leqslant (q^{m-1} + q^{m-2} + \cdots + q^n)|x_1 - x_0| \leqslant$$
$$\leqslant q^n\frac{1}{1-q}|x_1 - x_0| \to 0$$

当 $n \to \infty$．所以满足 Cauchy 判别条件，因而

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \xi$$

是存在的．命 $n \to \infty$，則由

$$x_{n+1} = q\sin x_n + \alpha$$

可知

$$\xi = q\sin\xi + \alpha.$$

即得出 Kapler 方程的唯一解．

例 5． 在 $[a, b]$ 中，如果 $f(x)$ 的微商是連續的且 > 0（或 < 0），則 $f(x)$ 的反函数一定存在，而且它的微商也是 > 0（或 < 0）．

換言之，单調上升的函数的反函数也是单調上升的．

§2. 极大与极小

一个函数 $f(x)$，如果在 $x = x_0$ 以前是上升的，而在 $x = x_0$ 以后是下降的，則在 $x = x_0$ 这一点一定有一个极大值．所謂极大值乃指这点的附近的值都不大于这一值．用微商来表达这一性質：如果 $f'(x)$（假定它是連續的）通过 $x = x_0$ 由正变負，則 $f(x)$ 在 $x = x_0$ 有一极大值． 所以在取极大值处有 $f'(x_0) = 0$．

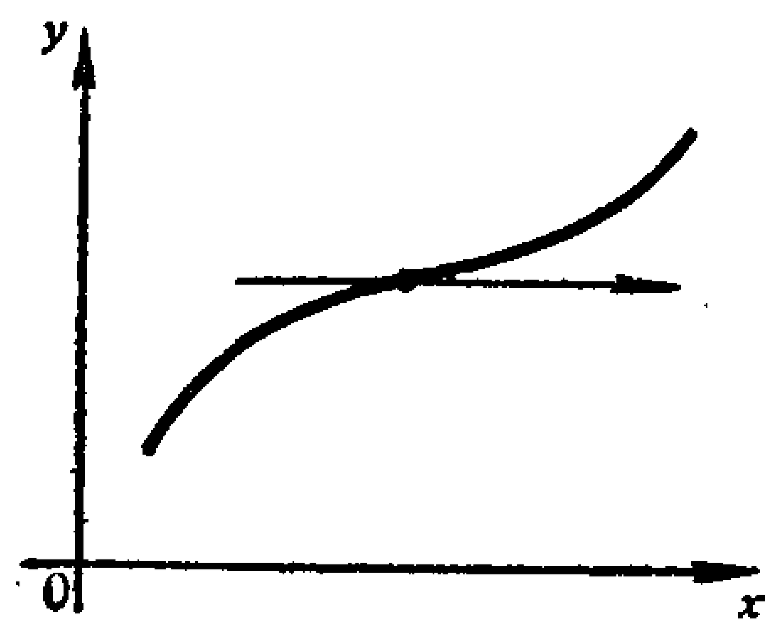


图 120

同法，$f(x)$ 由降而升必取一极小值，也就是 $f'(x)$ 由負而正，必取一零．在 $f(x)$ 取极小值的一点 x_0，我們有 $f'(x_0) = 0$．

所以我們得出了一个求 $f(x)$ 的极大极小的方法：

1) 求 $f(x)$ 的微商 $f'(x)$，

2) 求 $f'(x) = 0$ 的解，

3）在上式的解 $x=x_0$ 的附近看 $f'(x)$ 的变化. 由正到負得极大值，由負到正得极小值.

虽然 $f'(x_0)=0$，但 $f'(x)$ 在 $x=x_0$ 附近并不变号，则既非极大也非极小. 这种点是可能存在的，如图 120.

例 1. 求函数

$$f(x)=(x-1)^2(x-2)^3$$

的极大与极小.

$f'(x)=2(x-1)(x-2)^3+3(x-1)^2(x-2)^2=(x-1)(x-2)^2(5x-7)$
使 $f'(x)=0$ 的点有三个：

$$x_1=1,\qquad x_2=\frac{7}{5},\qquad x_3=2.$$

当 $x<1$，则 $f'(x)>0$；而当 $1<x<\frac{7}{5}$，则 $f'(x)<0$；又在 $\frac{7}{5}<x<2$ 中，则 $f'(x)>0$；当 $x>2$，仍然是 $f'(x)>0$. 所以 $f(x)$ 在 $x=1$ 时，由上升到下降而有一极大值 $f(1)=0$，在 $x=\frac{7}{5}$ 附近由下降而上升，所以有一极小值 $f\left(\frac{7}{5}\right)=-\frac{108}{3125}$. 而比 $\frac{7}{5}$ 大时，$f(x)$ 不断上升，$f(2)=0$ 并非极值.

值得注意的是，极大值并不一定是函数的最大值. 求最大值的办法如次：在閉区間 $[a, b]$ 中連續的函数 $f(x)$ 一定在其中取最大值. 我們寻找最大值的办法是求出 $f(x)$ 的諸极大值，并且算出 $f(a)$ 与 $f(b)$. 在这些值中最大的一个便是最大值. 同法来考虑最小值.

例 2. 求上例中的函数在 $[0, 3]$ 中的最大值与最小值.

$$f(0)=-8,\qquad f(3)=4.$$

$f(x)$ 的最大值是 4，最小值是 -8. 但在 $[1,2]$ 之間的最大值是 0，最小值是 $-\frac{108}{3125}$.

例 3. 求証周长为 $2l$ 的矩形中以正方形的面积最大.

命一边的长为 x，另一边长为 $l-x$. 则面积为

$$f(x)=x(l-x).$$

由 $f'(x)=l-x-x=l-2x=0$，即 $x=\frac{l}{2}$. 这时候 $f'(x)$ 由正变負. 在 $x=\frac{l}{2}$ 之左，$f(x)$ 是一个增函数，而在 $x=\frac{l}{2}$ 之右是一个降函数. 所以在 $x=\frac{l}{2}$ 时取极大值，也就是最大值：

$$f(x)=\frac{l^2}{4}.$$

另一种不用微积分的証法如下：凑方得

$$x(l-x)=\frac{l^2}{4}-\left(x-\frac{l}{2}\right)^2\leqslant\frac{l^2}{4}.$$

当 $x=\frac{l}{2}$ 时，此式之值最大。

例 4. 从半径为 R 的圓上割去一个扇形，把剩下的部分围成一个圓錐. 試求割去扇形的角度多么大时，所作的圓錐的体积最大.

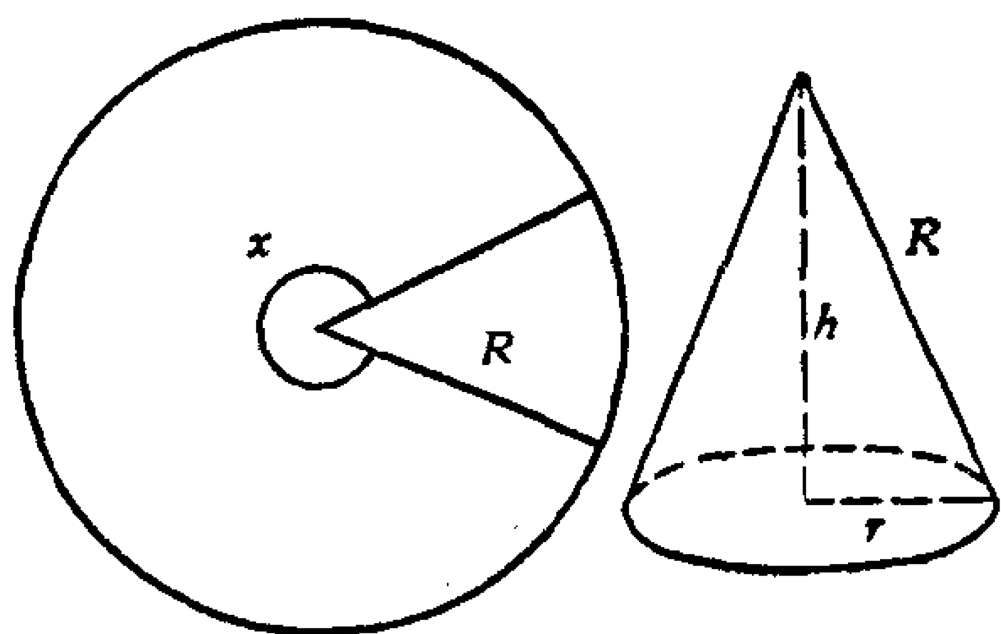


图 121

命 x 表示剪剩下来的角度 $(0\leqslant x\leqslant 2\pi)$，当 $x=0$ 或 $x=2\pi$ 时，这錐体的体积都等于 0，所以最大值是存在的，且在 $(0,2\pi)$ 的內点取到极大值. 所做成的圓錐的斜高是 R，而底周的长是 Rx，所以半径是 $r=\frac{Rx}{2\pi}$. 圓錐的高是

$$\sqrt{R^2-r^2}=\frac{R}{2\pi}\sqrt{4\pi^2-x^2},$$

圓錐的底面积

$$\pi r^2=\pi\left(\frac{Rx}{2\pi}\right)^2=\frac{R^2x^2}{4\pi},$$

所以圓錐的体积等于

$$\frac{1}{3}\cdot\frac{R^2x^2}{4\pi}\frac{R}{2\pi}\sqrt{4\pi^2-x^2}=\frac{R^3}{24\pi^2}x^2\sqrt{4\pi^2-x^2}.$$

現在要求 $x^2\sqrt{4\pi^2-x^2}$ 的最大值，也就是要求

$$f(x)=x^4(4\pi^2-x^2)$$

的极大值.

$$f'(x)=16\pi^2x^3-6x^5,$$

$f'(x)=0$ 有三根：

$$x_1=0,\qquad x_2=-2\pi\sqrt{\frac{2}{3}},\qquad x_3=2\pi\sqrt{\frac{2}{3}}.$$

$x_1=0$ 是极小值，$x_2=-2\pi\sqrt{\frac{2}{3}}$ 是不能容許的值，所以 $x_3=2\pi\sqrt{\frac{2}{3}}$ 給出极大值：

$$f\left(2\pi\sqrt{\frac{2}{3}}\right)=\frac{2^6}{3^2}\pi^4\left(4\pi^2-\frac{8}{3}\pi^2\right)=\frac{2^8}{3^3}\pi^6.$$

因此圓錐的最大体积是

$$\frac{R^3}{24\pi^2}\left(\frac{2^4\pi^3}{3^{3/2}}\right)=\frac{2\pi R^3}{3^{5/2}}.$$

上节中所講的求 $f(x)$ 的极大极小值的法則，有时候会发生这样的困难，难于判断 $f'(x)$ 在 $x=x_0$ 是由正变負还是由負变正. 如果我們进一步考慮 $f''(x)$ 的性质，有时可以帮助我們作出較为簡易的判断. 例如，如果 $f''(x_0)>0$，則 $f'(x)$ 在 $x=x_0$ 附近是增函数，所以只可能由負变正，也就是 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 取极小值. 又如果 $f''(x_0)<0$，則 $f(x)$ 取极大值. 当然要假定 $f''(x)$ 是存在的.

例 5. 以 1 为直径作圆. 求从圆上一点到直径的两端距离之和的最大、最小值.

命 θ 表該点与直径的一端的联綫与直径所成的角,二距离之和为

$$f(\theta)=\sin\theta+\cos\theta.\qquad 0\leqslant\theta\leqslant\frac{\pi}{2}.$$

由于两点之間直綫为最短,所以最小值不必証明就知道是当 $\theta=0$ 或 $\frac{\pi}{2}$ 时取得,其值是 1.

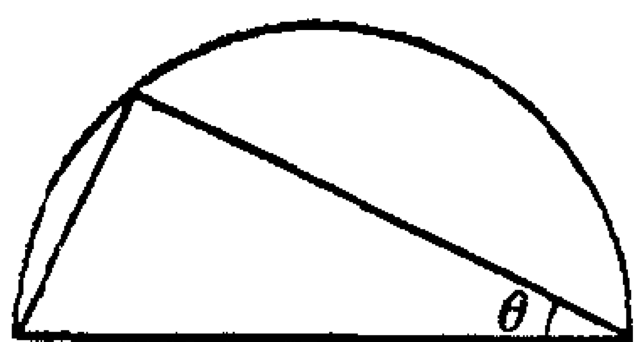


图 122

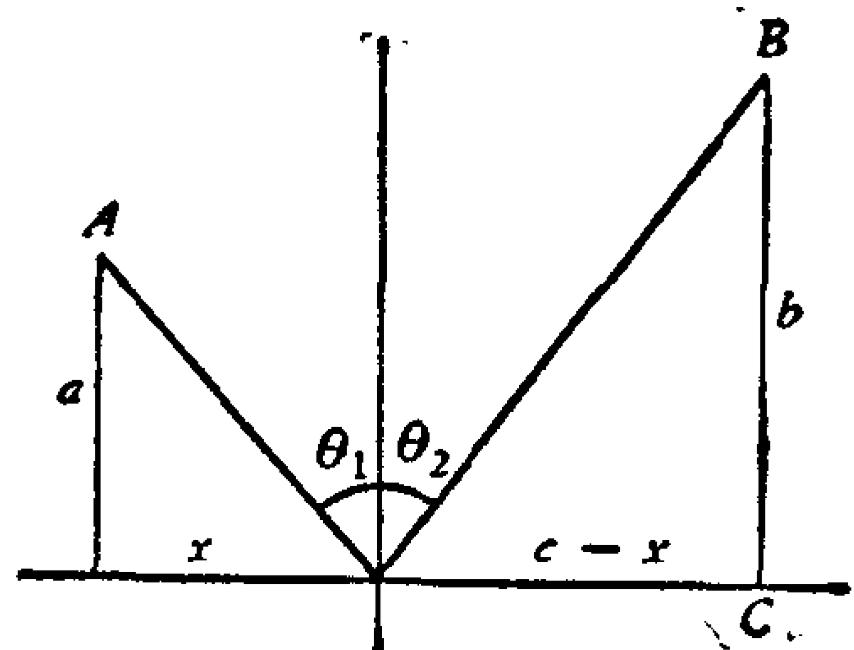


图 123

而

$$f'(\theta)=\cos\theta-\sin\theta,\ f''(\theta)=-\sin\theta-\cos\theta.$$

由 $f'(\theta)=0$ 可知 $\operatorname{tg}\theta=1$, 即 $\theta=\frac{\pi}{4}$. 又由

$$f''\left(\frac{\pi}{4}\right)=-\sqrt{2}<0,$$

所以 $f\left(\frac{\pi}{4}\right)=\sqrt{2}$ 是极大值,也是最大值.

例 6. (光学上的射入角等于射出角). A 点发光射到鏡面 C 上再到 B 点,求什么路程所取的时間最短.

所求的距离是

$$f(x)=\sqrt{a^2+x^2}+\sqrt{b^2+(c-x)^2},\qquad 0\leqslant x\leqslant c.$$

求微分

$$f'(x)=\frac{x}{\sqrt{a^2+x^2}}-\frac{c-x}{\sqrt{b^2+(c-x)^2}},$$

$$f''(x)=\frac{a^2}{(a^2+x^2)^{3/2}}+\frac{b^2}{(b^2+(c-x)^2)^{3/2}}>0,$$

所以 $f'(x)=0$ 的值是极小值. 由

$$\frac{x}{\sqrt{a^2+x^2}}=\frac{c-x}{\sqrt{b^2+(c-x)^2}},$$

命 θ_1 是射入角, θ_2 是射出角,则得 $\sin\theta_1=\sin\theta_2$, 即得 $\theta_1=\theta_2$.

同样方法可以解释光綫的屈折率. 光綫在第一种介質中的速率是 v_1, 在第二种介質中的速率是 v_2(图 124),求証从 A 到 B 的最快途径适合于

$$\frac{\sin\theta_1}{v_1}=\frac{\sin\theta_2}{v_2}.$$

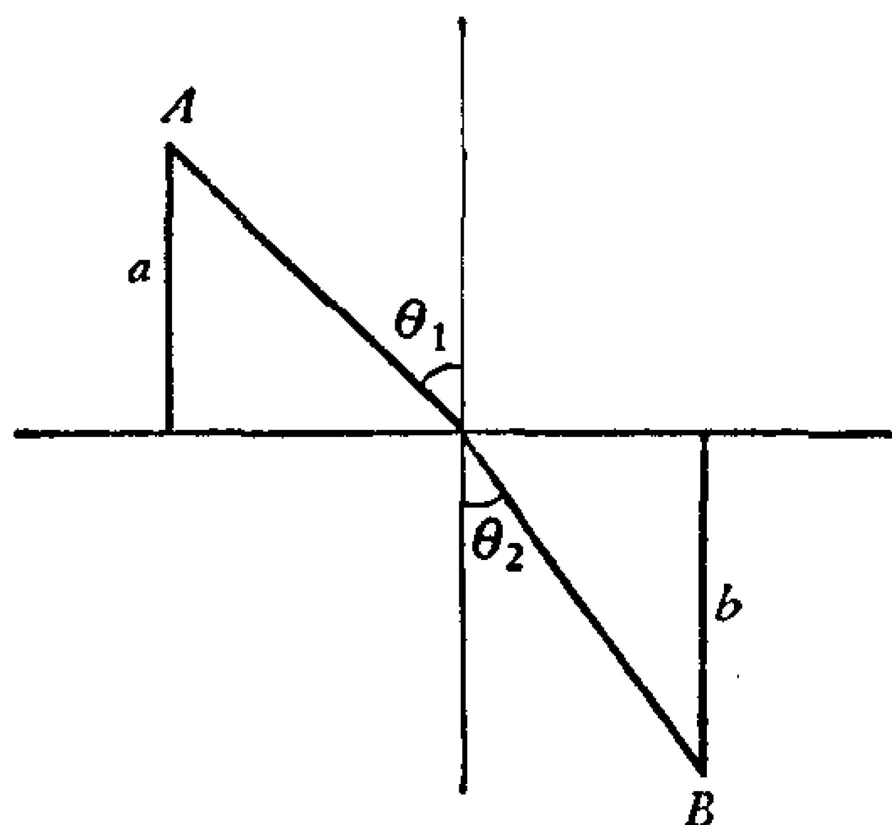


图 124

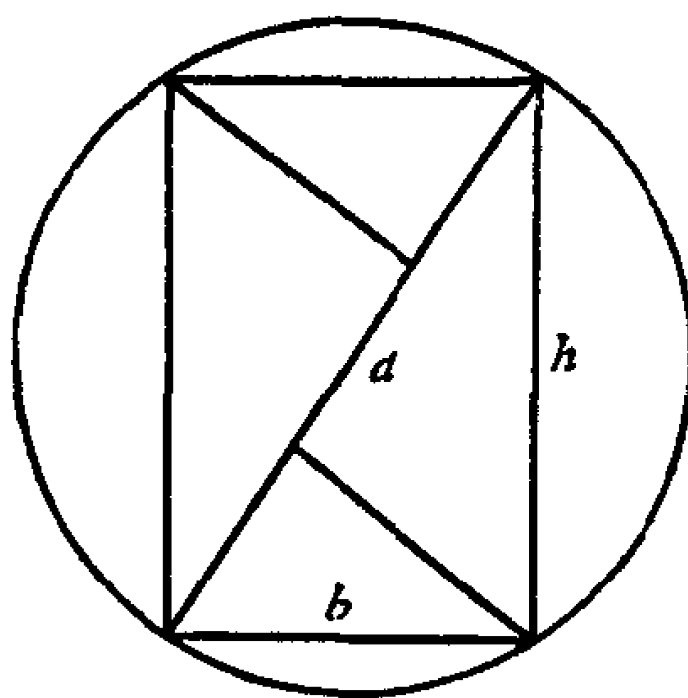


图 125

例 7. 已知一木料有直径 d 的圆截面，如何把它砍成为最坚固的矩形截面的横樑．由材料力学証明，有矩形截面的横樑的強度与乘积 bh^2 成比例，此处 b 是矩形截面的底长，h 是它的高(图 125)．

因为 $h^2+b^2=d^2$，所以我們要求的是

$$f(b)=b(d^2-b^2),\qquad 0\leqslant b\leqslant d$$

的最大值．由

$$f'(b)=d^2-3b^2,\qquad f''(b)=-6b,$$

可知，在 $b=\dfrac{d}{\sqrt{3}}$ 处是极大值，也就是最大值．

在 $b=\dfrac{d}{\sqrt{3}}$ 时，$h=d\sqrt{\dfrac{2}{3}}$，所以 $d:h:b=\sqrt{3}:\sqrt{2}:1$．具体做法是把直径三等分，在各点立垂綫卽得(有时用 $h:b=7:5$ 来表 $\sqrt{2}\doteq 1.4\cdots$)．

例 8. 一电灯可以沿垂綫 OB 而上下，求它对水平面 OA 必須有怎样的距离，才使水平面上的一点 A 有最大的照度．

照度与 $\sin\varphi$ 成正比，与距离 $r=AB$ 的平方成反比，卽

$$J=c\,\frac{\sin\varphi}{r^2},$$

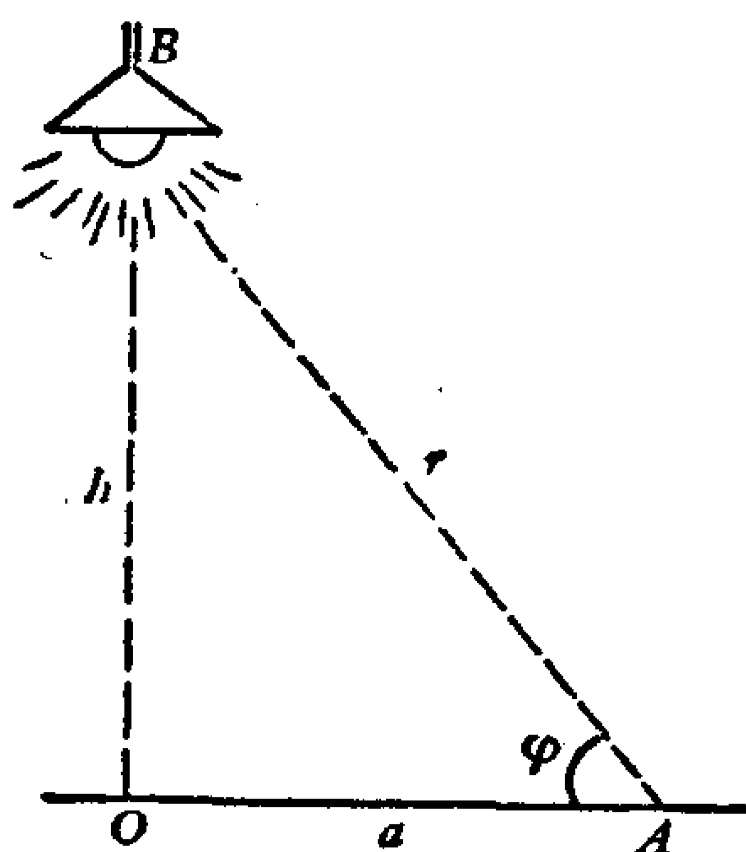


图 126

此处 c 是一常数，依賴于灯光的強度．

取 $h=OB$ 作为自变量，命 $OA=a$ 則

$$\sin\varphi=\frac{h}{r},\qquad r=\sqrt{h^2+a^2},$$

而

$$J=c\,\frac{h}{(h^2+a^2)^{3/2}},\qquad \frac{dJ}{dh}=c\,\frac{a^2-2h^2}{(h^2+a^2)^{5/2}}.$$

在 $h=\dfrac{a}{\sqrt{2}}$ 时，J 由正变負，所以 $h=\dfrac{a}{\sqrt{2}}$ 就是适当的距离．

例 9. 在鉄路干綫 AB 上的一点 A 处要把貨物运往与鉄路綫相距为 $CB=l$ 的一点 C，鉄路运費的单位价格是 α(吨，公里)，馬車运費是 β，間在鉄路上怎样的一点 M 作公路

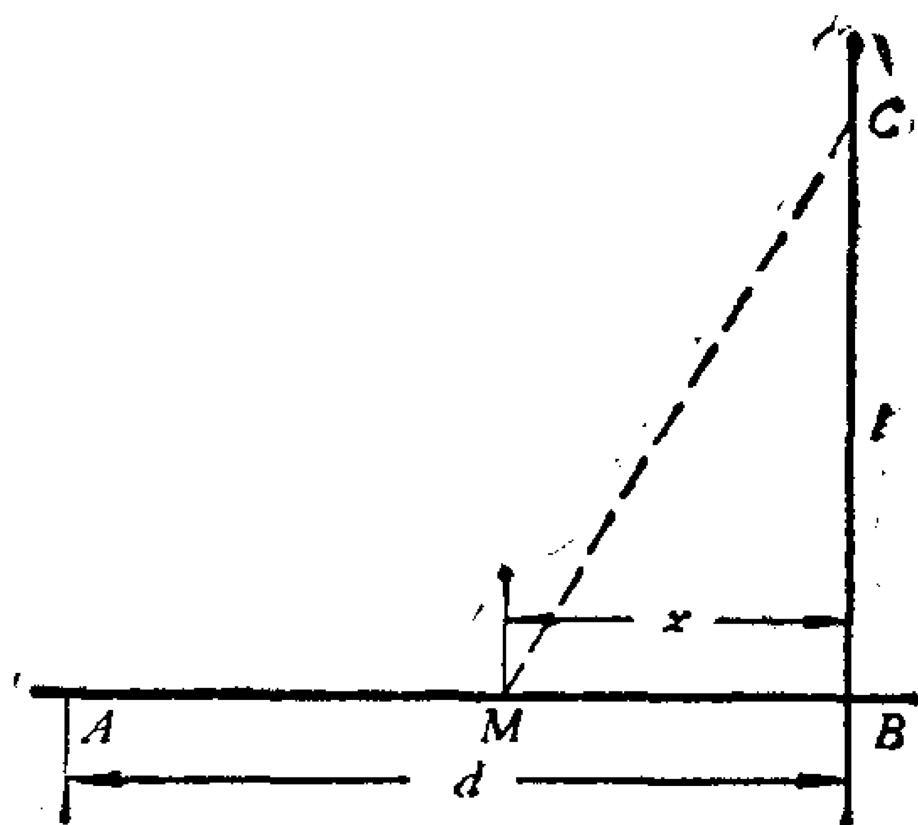


图 127

MC 使由 A 到 C 的貨运价格最廉。

依图 127 每吨貨的运費是

$$y=\alpha(d-x)+\beta\sqrt{x^2+l^2}, \qquad (0\leqslant x<d).$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\beta x}{\sqrt{x^2+l^2}}-\alpha=\beta\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+l^2}}-k\right), \qquad k=\frac{\alpha}{\beta}.$$

若 $k\geqslant 1(\alpha\geqslant\beta)$，这式子永远为負，即 y 为降函数，也就是从 A 点作公路，不用鉄路运輸最便宜.

当 $k<1$ 时，解

$$\frac{x}{\sqrt{x^2+l^2}}=k$$

得出

$$x=\frac{kl}{\sqrt{1-k^2}}.$$

当 $\frac{kl}{\sqrt{1-k^2}}\geqslant d$，則 $y'=0$ 的解在变动区間之外了，所以仍然不用鉄路，而直接由 A 修公路.

当 $\frac{kl}{\sqrt{1-k^2}}<d$ 时，有一点 $x=\frac{kl}{\sqrt{1-k^2}}$ 使运費最小.

例 10. 由于仪器不精确，在实驗中对同一量做了 n 次观测各得数据

$$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n.$$

量 x 与这 n 个值的差的平方和最小，叫做"最可能的"值. 求 x.

换言之，求使

$$f(x)=(x-\alpha_1)^2+(x-\alpha_2)^2+\cdots+(x-\alpha_n)^2$$

最小的 x. 求微商

$$f'(x)=2(x-\alpha_1)+2(x-\alpha_2)+\cdots+2(x-\alpha_n)$$

$$f''(x)=2n>0.$$

所以由 $f'(x)=0$ 可知

$$x=\frac{\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_n}{n}.$$

这就是算术平均值.

習題. 思索一些不用微积分的方法来处理这些例題.

总結一下,我們已有三个方法:

1) $f(x)$ 在 $x=x_0$ 这一点由增而降,則得一极大值;由降而增,則得一极小值.

2) 如果 $f(x)$ 的微商存在,且在 $x=x_0$ 这一点 $f'(x)$ 由正变負,則 $f(x_0)$ 为极大值;由負变正,則 $f(x_0)$ 为极小值.

3) 如果有二阶微商存在,且 $f'(x_0)=0$. 若 $f''(x_0)<0$, 則 $f(x_0)$ 是极大值;若 $f''(x_0)>0$, 則 $f(x_0)$ 是极小值.

这三个方法一个比一个方便,但一个比一个加強了局限性.

例如, $f''(x_0)=0$, 則 3) 法不能用,但我們仍能用前法. 如果 $f''(x)$ 不存在,那就更不必說了.

又如 $f'(x)$ 不存在,我們不能用 2) 法,但 1) 法仍然可用. 例如, $y=f(x)=|x|$, 微商在 $x=0$ 时不存在,但是由 1) 可知 $x=0$ 时 y 有一极小值.

§ 3. Fermat 定理

在 § 2 研究 $f(x)$ 的极大极小值时,我們假定了 $f'(x)$ 在它的零点附近是連續的. 如果 $f'(x)$ 并不連續,我們还是有

定理 1 (Fermat). 若 $f(x)$ 在 (a,b) 內定义且在这区間內有一內点 c 使 $f(x)$ 取极大(或极小)值. 如果在这一点存在着有限微商 $f'(c)$, 則一定有 $f'(c)=0$.

証. 假定 $f(c)$ 是极大值并且 $f'(c)>0$, 則当 $h>0$ 且充分小时

$$\frac{f(c+h)-f(c)}{h}>0,$$

也就是 $f(c+h)$ 比 $f(c)$ 更大. 这和极大的假定相违背. 如果 $f'(c)<0$, 我們得到当 h 是充分小的正数时

$$\frac{f(c)-f(c-h)}{-h}>0,$$

也就是 $f(c-h)$ 比 $f(c)$ 大. 所以不能在 c 点取极大值. 同法証明极小值的情况.

附記. 1. 如果在端点取极大值,我們并不能得出同样的結果.

2. 若 c 是內点,而 $f'(c)$ 是无穷. 讀者自証:如果 $f(c)$ 是极大值,則 $f'(c-0)=+\infty$ 而 $f'(c+0)=-\infty$.

3. 定理 1 的几何意义是,在 $x=c$ 作一切綫与 x 軸平行.

在 Fermat 时代还未发明微积分,但是在处理极大与极小的方法中却包含了这一主要原則.

作为定理 1 的应用，我們有

定理 2 (Darboux). 如果 $f(x)$ 在閉区間 $[a, b]$ 上有有限微商，則 $f'(x)$ 至少有一次取介于 $f'(a)$ 与 $f'(b)$ 之間的每一个值.

如果 $f'(x)$ 是連續的，这个定理可由函数的連續性立刻推出.

証. 我們不妨假定 $f'(a) > f'(b)$. 命 C 为 $f'(a)$, $f'(b)$ 之間的数, $f'(a)>C>f'(b)$。作函数

$$F(x) = f(x) - Cx,$$

这函数有 $F'(a) > 0 > F'(b)$.



图 128

$F(x)$ 是閉区間 $[a, b]$ 上的連續函数，所以 $F(x)$ 一定在 $[a, b]$ 上一点 c 取最大值. 这点既不能是 a, 也不能是 b, 因为由 $F'(a) > 0$ 及 $F'(b) < 0$, 知 $F(x)$ 在 a 的右边是上升的，而在 b 的左边是下降的. 所以 c 点一定是內点. 由 Fermat 定理可知

$$F'(c) = 0, \quad 即 f'(c) = C.$$

附記. 在定理 1 中假定了在 $x = c$ 有有限微商 $f'(c)$. 如果微商不存在或变为无穷，在 c 点也可能取极值. 見图 128.

如果 $f'(c-0) > 0$, $f'(c+0) < 0$, 則 $f(x)$ 在 $x = c$ 点取极大值.

§4. 中 值 公 式

定理 1 (Lagrange). 假定 1) $f(x)$ 在閉区間 $[a, b]$ 內定义而且是連續的，2) 在开区間 (a, b) 上有有限微商 $f'(x)$ 存在. 則在 a, b 之間必能求得一点 $c (a < c < b)$, 使

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c).$$

这公式称为中值公式，定理称为中值定理. 这一定理很重要.

命

$$F(x) = f(x) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a),$$

則本定理与下面的定理等价.

定理 2 (Rolle). 假定 1) $F(x)$ 在閉区間 $[a, b]$ 上定义而且是連續的，2) 在开区間 (a, b) 上有有限微商 $F'(x)$ 存在，3) $F(a) = F(b)$, 則一定有一点 $c (a < c < b)$ 使

$$F'(c) = 0.$$

証. $F(x)$ 在閉区間 $[a, b]$ 中是連續的，所以在这区間上一定能达到最大值 M 与最小值 m.

1) $M = m$, 則 $F(x) = M$ 是常数，因得 $F'(x) = 0$. 不必証明.

2) $M > m$. 由于 $F(a) = F(b)$, 所以数值 M, m 中一定有一个在內点 c 处为 $F(x)$ 所取. 在这点 $F'(c) = 0$.

我們証明了定理 2，因而也証明了定理 1.

中值公式也可以改写为：取 $a=x, b=x+h$，則

$$f(x+h)-f(x)=hf'(x+\theta h), \quad 0<\theta<1.$$

也就是

$$f(x+h)=f(x)+hf'(x+\theta h). \tag{A}$$

Lagrange 公式的缺点在于我們并不确知数值 θ，但是这并不限制这公式在分析学中的广泛应用. 定理 2 的推广是:

定理 3 (Cauchy). 假定 1) $f(x)$ 与 $g(x)$ 在閉区間 $[a, b]$ 內連續，2) 在开区間 (a, b) 內有有限微商 $f'(x)$ 与 $g'(x)$ 存在，3) 在 (a, b) 內 $g'(x)\neq 0$. 則在 a, b 之間必有一点 $c(a<c<b)$ 使

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}=\frac{f'(c)}{g'(c)}.$$

証. 首先我們証明 $g(a)\neq g(b)$. 如果 $g(a)=g(b)$，則由 Rolle 定理，有一点使 $g'(x)=0$. 此与 3) 相违背.

作函数

$$F(x)=f(x)-f(a)-\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}[g(x)-g(a)],$$

它滿足 Rolle 定理的一切条件. 因此有一 c 使

$$0=F'(c)=f'(c)-\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}g'(c).$$

即得定理.

命 $g(x)=x$，即得 Lagrange 定理. 事实上，我們亦不难由 Lagrange 定理直接推出 Cauchy 定理.

例 1. 当 $x>0$ 时，$\left(1+\frac{1}{x}\right)^x$ 是增函数，

当 $x>1$ 时，$\left(1-\frac{1}{x}\right)^{-x}$ 是減函数.

証. 由 Lagrange 公式可知

$$\log(x+1)-\log x=\frac{1}{\xi}, \qquad x<\xi<x+1,$$

也就得

$$\frac{1}{x+1}<\log(x+1)-\log x<\frac{1}{x}.$$

由

$$\frac{d}{dx}(x\{\log(x+1)-\log x\})=\log(x+1)-\log x-\frac{1}{x+1}>0$$

及

$$\frac{d}{dx}((x+1)\{\log(x+1)-\log x\})=\log(x+1)-\log x-\frac{1}{x}<0,$$

可得出所要証明的結果.

Lagrange 公式可以用来更有把握地估計誤差(指比用微分估計誤差法更有把握).

例 2. 命

$$f(x)=\log_{10}x.$$

它的微商是

$$f'(x)=\frac{1}{x}\frac{1}{\log 10}=\frac{M}{x}\qquad (M=0.43429\cdots).$$

由 Lagrange 公式得

$$\log_{10}(a+h)-\log_{10}a=h\frac{M}{a+\theta h},\qquad 0<\theta<1.$$

已經用微分代替的近似公式是

$$\log_{10}(a+h)-\log_{10}a\doteq h\frac{M}{a}.$$

这一近似公式的誤差是

$$h\frac{M}{a}-h\frac{M}{a+\theta h}=\frac{\theta h^2M}{a(a+\theta h)}.$$

例如取 $a=100$, $h=1$, 則由近似公式所得的結果是

$$\log_{10}101=\log_{10}100+\frac{M}{100}=2.00434\cdots.$$

这数值的誤差

$$\frac{\theta M}{100(100+\theta)}\leqslant\frac{M}{100(100+\theta)}<\frac{M}{100\times 100},\quad (0<\theta<1).$$

故誤差 $<0.00004\cdots$.

Rolle 定理也是一条用处很多的定理,我們举几个例子如下:

定理 4. 假定 $F(x)$ 在閉区間 $[a,b]$ 上連續,且在开区間 (a,b) 上有有限微商 $F'(x)$ 存在. 如果 $F(x)$ 在 $[a,b]$ 上有 r 个不同的根,則 $F'(x)$ 至少有 $r-1$ 个不同的根.

証. 命 $F(x)$ 的根依次地排列成为

$$x_1<x_2<\cdots<x_r.$$

由 $F(x_1)=0$, $F(x_2)=0$, 可知在 x_1 与 x_2 之間 $F'(x)$ 有一根. 因而得出 $F'(x)$ 至少有 $r-1$ 个不同根.

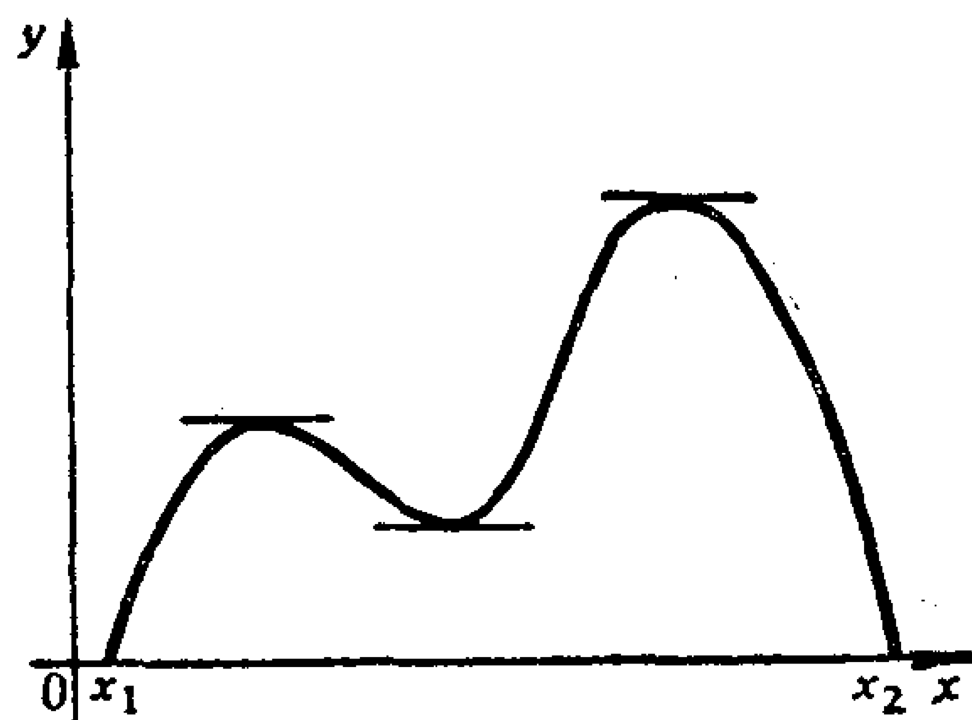


图 129

附记. 有时可能多过 $r-1$ 个, 如图 129 在 x_1, x_2 間 $F'(x)$ 就有 3 个根.

特别 $F(x)$ 是多項式,我們有

定理 5. 一个有 n 个实根的 n 次多項式 $P(x)$ 的微商 $P'(x)$ 有 $n-1$ 个实根, 重根我們照重数計算.

証. 把 $P(x)$ 的不同的根写成为

$$x_1 < x_2 < \cdots < x_r.$$

x_v 的重数是 n_v，則 $n_1 + \cdots + n_r = n$. $P'(x)$ 在 $(x_1, x_2), (x_2, x_3), \cdots, (x_{r-1}, x_r)$ 中各有一根，共 $r-1$ 个根，又 $P'(x)$ 以 x_v 为其 $n_v - 1$ 重根，因此 $P'(x)$ 共有

$$r - 1 + \sum_{v=1}^{r}(n_v - 1) = \sum_{v=1}^{r} n_v - 1 = n - 1$$

个根.

最后，我們还可用 Rolle 定理来求出 Lagrange 插入公式的誤差.

我們曾經講过 Lagrange 插入公式，即我們可以做一个 $(n-1)$ 次多項式 $P(x)$ 在区間 $[a, b]$ 中的 n 个給定点 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 取 n 个給定值 $y_1, y_2, \cdots, y_n$；即可以做出多項式 $P(x)$ 使

$$P(x_k) = y_k, \qquad k = 1, 2, \cdots, n.$$

做的方法是先做多項式

$$l_k(x) = \frac{(x - x_1)\cdots(x - x_{k-1})(x - x_{k+1})\cdots(x - x_n)}{(x_k - x_1)\cdots(x_k - x_{k-1})(x_k - x_{k+1})\cdots(x_k - x_n)},$$

它是 $l_k(x_1) = \cdots = l_k(x_{k-1}) = l_k(x_{k+1}) = \cdots = l_k(x_n) = 0$ 而 $l_k(x_k) = 1$，一般的 Lagrange 插入公式就是

$$P(x) = \sum_{k=1}^{n} l_k(x) y_k.$$

引进

$$\omega(x) = (x - x_1)(x - x_2)\cdots(x - x_n),$$

則得 $\omega'(x_k) = (x_k - x_1)\cdots(x_k - x_{k-1})(x_k - x_{k+1})\cdots(x_k - x_n)$. 所以

$$l_k(x) = \frac{\omega(x)/(x - x_k)}{\omega'(x_k)}.$$

如果 $f(x)$ 是閉区間 $[a, b]$ 上的有 n 阶有限微商的函数，則

$$P(x) = \sum_{k=1}^{n} l_k(x) f(x_k).$$

与 $f(x)$ 的誤差如何？即在一个异于 $x_1, \cdots, x_n$ 的点 x，求 $f(x) - P(x)$ 的估值. 命

$$K = \frac{f(x) - P(x)}{\omega(x)}.$$

考慮函数

$$\varphi(z) = f(z) - P(z) - K\omega(z).$$

由于 $P(z)$ 是低于 n 次的多項式，所以 $P^{(n)}(z) = 0$. 因此这函数的 n 阶微商等于

$$\varphi^{(n)}(z) = f^{(n)}(z) - Kn!.$$

显然有

$$\varphi(x) = \varphi(x_1) = \varphi(x_2) = \cdots = \varphi(x_n) = 0,$$

也就是 $\varphi(z)$ 在 $[a, b]$ 中有 $(n+1)$ 个根 $x, x_1, x_2, \cdots, x_n$，而且是互异的. 由 Rolle 定理知道，$\varphi'(z)$ 在这 $n+1$ 点所分的 n 个区間内各有一根，即有 n 个互异的根. $\varphi''(z)$

有 $(n-1)$ 个根,等等. 于是 $\varphi^{(n)}(z)$ 必有一根在 $x, x_1, x_2, \cdots, x_n$ 諸数的最大者与最小者之間,命 ξ 为此根,则

$$f^{(n)}(\xi) = Kn!.$$

因而得出带余項的 Lagrange 插入公式

$$f(x) = P(x) + \frac{f^{(n)}(\xi)}{n!}\omega(x), \qquad a < \xi < b.$$

§5. 凸性、凹性与扭轉点

我們还是研究曲綫 $y = f(x)$. 以往已經說过 $f'(x)$ 的几何性質, 现在我們来說明 $f''(x)$ 的几何性質.

当 x 增加时,切綫和 x 軸所成的角度 α 也在变. 如果角度随 x 增加而減少,則曲綫向上凸. 也就是 $f'(x) = \operatorname{tg}\alpha$ 是一減函数时, 曲綫向上凸. 如果 $f''(x)$ 存在而且 < 0, 則 $f'(x)$ 是減函数, 曲綫向上凸. 当 $f''(x)$ 存在而且 > 0, 則曲綫向下凸. 如果 $f''(x_0) = 0$ 并在 $x = x_0$ 附近变号, 則这一点称为**扭轉点**.

极大出現在向上凸的点,极小出現向下凸的点.

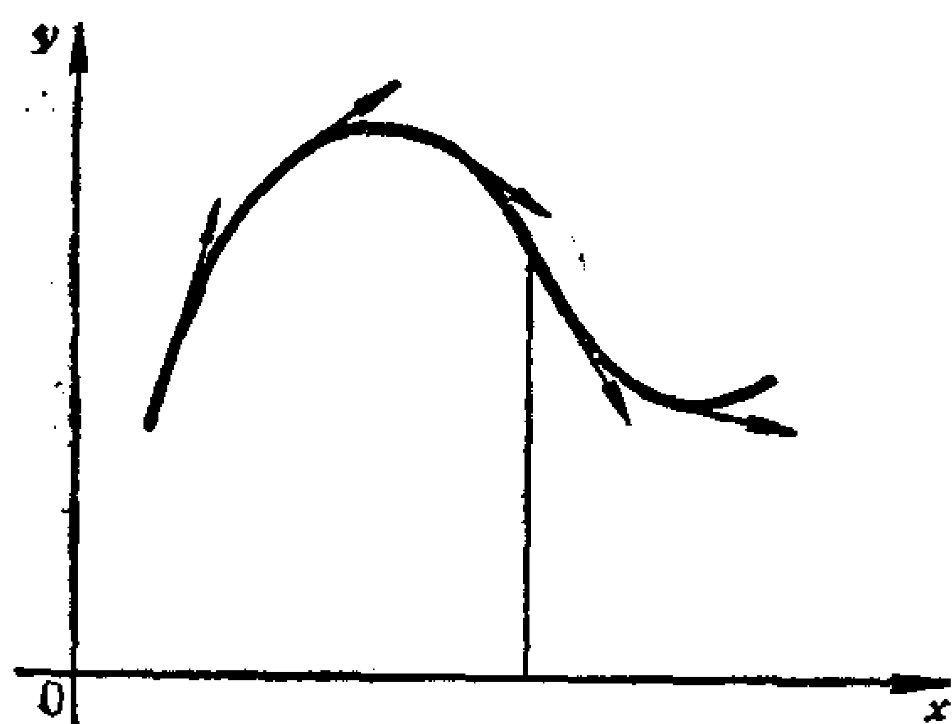


图 130

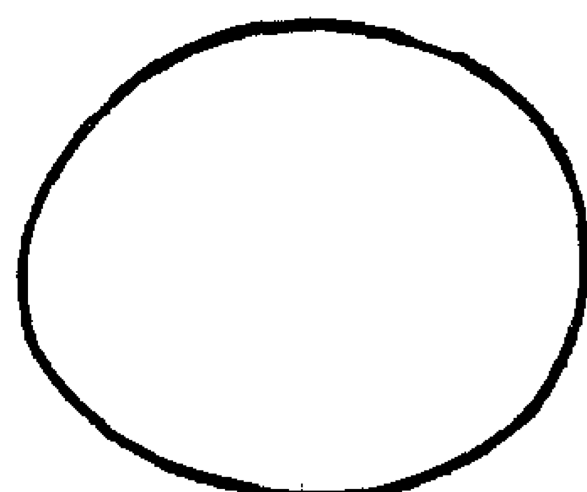


图 131

有些书上把向上凸称为凸,向下凸称为凹. 实質上,凸与凹是随我們的立足点而变化的,卵形一般称为凸形,其中有些部分向上凸,而有些部分向下凸.

凸的概念在高等数学中常出現,基础在于凸函数.

定义. 在区間 (a, b) 上定义一个函数 $\varphi(x)$. 如果对 (a, b) 中的任意二点 x_1, x_2 常有

$$\varphi\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) \leqslant \frac{1}{2}(\varphi(x_1) + \varphi(x_2)), \tag{1}$$

則 $\varphi(x)$ 称为**凸函数**.

它的几何意义是: 在这曲綫上任取两点作一联綫,則这联綫的中点,一定不比曲綫上的对应点低.

关于凸函数还有另一定义. 这联綫上的所有点都不低于曲綫上的对应点, 解析的說法是: 对 $0 \leqslant \alpha \leqslant 1$ 有

$$\varphi(\alpha x_1 + (1-\alpha)x_2) \leqslant \alpha\varphi(x_1) + (1-\alpha)\varphi(x_2).$$

因为过$(x_1, \varphi(x_1))$，$(x_2, \varphi(x_2))$二点的联綫上的点是

$$(\alpha x_1 + (1-\alpha)x_2, \alpha\varphi(x_1) + (1-\alpha)\varphi(x_2)),$$

所对应的曲綫上的点是

$$(\alpha x_1 + (1-\alpha)x_2, \varphi(\alpha x_1 + (1-\alpha)x_2)).$$

图 132

定理 1. 如果$\varphi(x)$是連續函数，則两个定义是等价的。

証. 在后面的定义中取$\alpha = \frac{1}{2}$，卽得前者。所以我們現在主要是从前者来推后者。把(1)用两次可知

$$4\varphi\left(\frac{x_1+x_2+x_3+x_4}{4}\right) \leqslant 2\varphi\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right) + 2\varphi\left(\frac{x_3+x_4}{2}\right) \leqslant$$
$$\leqslant \varphi(x_1) + \varphi(x_2) + \varphi(x_3) + \varphi(x_4).$$

由归納法，我們不难証明

$$2^l\varphi\left(\frac{x_1+\cdots+x_{2^l}}{2^l}\right) \leqslant \varphi(x_1) + \cdots + \varphi(x_{2^l}).$$

我們現在来証明，对任一自然数n，

$$n\varphi\left(\frac{x_1+\cdots+x_n}{n}\right) \leqslant \varphi(x_1) + \cdots + \varphi(x_n). \tag{2}$$

我們用反向归納法，就是如果n对，我們来証明$n-1$也对。因为这結果对$n=2^l$的情况都正确，因而对任一n也都正确了。我們取$x_n = \frac{x_1+\cdots+x_{n-1}}{n-1}$，則由(2)可知

$$n\varphi\left(\frac{x_1+\cdots+x_{n-1}}{n-1}\right) = n\varphi\left(\frac{x_1+\cdots+x_{n-1}+x_n}{n}\right) \leqslant \varphi(x_1) + \cdots + \varphi(x_n) =$$
$$= \varphi(x_1) + \cdots + \varphi(x_{n-1}) + \varphi\left(\frac{x_1+\cdots+x_{n-1}}{n-1}\right).$$

移項卽得(2)对$n-1$也是对的。

在(2)式中取

$$x_1 = \cdots = x_p = x, \qquad x_{p+1} = \cdots = x_n = y,$$

則得

$$\varphi(\alpha x + (1-\alpha)y) \leqslant \alpha\varphi(x) + (1-\alpha)\varphi(y),$$

此处$\alpha = \frac{p}{n}$。也就是对任一有理数α这式子是对的，用趋极限法，可知对任一实数$\alpha(0 \leqslant \alpha \leqslant 1)$，这也是对的。

定理 2. 如果$\varphi''(x)$在(a, b)中存在，則$\varphi(x)$是凸函数的必要且充分条件是$\varphi''(x) \geqslant 0$。

証. 1)必要性. 在(1)中取$\frac{1}{2}(x_1+x_2) = t$，$\frac{1}{2}(x_1-x_2) = h$，并設$x_1 > x_2$，因得$h > 0$，且

$$2\varphi(t) \leqslant \varphi(t+h) + \varphi(t-h),$$

也就是

$$\varphi(t+h)+\varphi(t-h)-2\varphi(t)\geqslant 0. \tag{3}$$

我們現在假定 $\varphi''(t)<0$. 由

$$\varphi''(t)=\lim_{u\to 0}\frac{\varphi'(t+u)-\varphi'(t-u)}{2u}$$

可知,有 $\delta>0$, $h>0$ 使

$$\varphi'(t+u)-\varphi'(t-u)<-\delta u,\quad 0<u\leqslant h.$$

从

$$\frac{d}{du}(\varphi(t+u)+\varphi(t-u)-2\varphi(t))=\varphi'(t+u)-\varphi'(t-u)$$

可知, $\varphi(t+u)+\varphi(t-u)-2\varphi(t)$ 是一个 u 的减函数, 但当 $u=0$ 时这函数等于 0, 因此

$$\varphi(t+u)+\varphi(t-u)-2\varphi(t)<0.$$

这和(3)式矛盾.

2) 充分性. 把中值公式連用两次,

$$\varphi(x+h)=\varphi(x)+h\varphi'(x+\theta h),\quad 0<\theta<1$$

及

$$\varphi'(x+\theta h)=\varphi'(x)+\theta h\varphi''(x+\theta'\theta h),\quad 0<\theta'<1.$$

因而得出

$$\varphi(x+h)=\varphi(x)+h\varphi'(x)+\theta h^2\varphi''(x+\theta'\theta h).$$

如果 $\varphi''\geqslant 0$, 則得

$$\varphi(x+h)\geqslant\varphi(x)+h\varphi'(x).$$

取 $x+h=x_1$, $x=X$ 及 $x+h=x_2$, $x=X(X=\alpha x_1+(1-\alpha)x_2)$, 各得

$$\varphi(x_1)-\varphi(X)\geqslant(x_1-X)\varphi'(X),$$
$$\varphi(x_2)-\varphi(X)\geqslant(x_2-X)\varphi'(X).$$

各乘以 α 与 $(1-\alpha)$ 相加得出

$$\alpha\varphi(x_1)+(1-\alpha)\varphi(x_2)-\varphi(X)\geqslant(\alpha x_1+(1-\alpha)x_2-X)\varphi'(X)=0.$$

在定理 1 証明的过程中我們也获得了一个重要不等式:

定理 3. 对任一連續凸函数 $\varphi(x)$ 常有

$$\varphi\left(\frac{x_1+\cdots+x_n}{n}\right)\leqslant\frac{\varphi(x_1)+\cdots+\varphi(x_n)}{n}.$$

特别是当 $\sigma\geqslant 1$, $x>0$, x^σ 是凸函数(由 $(x^\sigma)''=\sigma(\sigma-1)x^{\sigma-2}\geqslant 0$ 可知),所以有

$$\left(\frac{x_1+\cdots+x_n}{n}\right)^\sigma\leqslant\frac{1}{n}(x_1^\sigma+\cdots+x_n^\sigma).$$

命 $\sigma=\alpha/\beta(\alpha\geqslant\beta)$ 并取 $x_1=|y_1|^\beta,\cdots,x_n=|y_n|^\beta$, 則得

$$\left(\frac{|y_1|^\beta+\cdots+|y_n|^\beta}{n}\right)^{\frac{1}{\beta}}\leqslant\left(\frac{|y_1|^\alpha+\cdots+|y_n|^\alpha}{n}\right)^{\frac{1}{\alpha}}.$$

由此立刻得到

定理 4. 命

$$M_\gamma(y)=\left(\frac{|y_1|^\gamma+\cdots+|y_n|^\gamma}{n}\right)^{\frac{1}{\gamma}}$$

代表 n 个数 $y_1, \cdots, y_n$的 γ 方次平均值,則 $M_\gamma(y)$ 是 γ 的增函数 $(\gamma\geqslant 0)$.

其中特别是 $M_1(y)\leqslant M_2(y)$

$$\frac{|y_1|+\cdots+|y_n|}{n}\leqslant\left(\frac{|y_1|^2+\cdots+|y_n|^2}{n}\right)^{\frac{1}{2}}.$$

这是算术平均不大于平方平均.

現在我們来考慮两个情况.

定理 5.

$$\lim_{\gamma\to\infty}M_\gamma(y)=\max(|y_1|,\cdots,|y_n|)\qquad(\text{定义为 } M_\infty(y));$$

$$\lim_{\gamma\to 0}M_\gamma(y)=(|y_1\cdots y_n|)^{\frac{1}{n}}\qquad(\text{定义为 } M_0(y)),$$

这称为几何平均.

証. 1) 当 $\gamma>0$ 时,有

$$\left\{\frac{[\max(|y_1|,\cdots,|y_n|)]^\gamma}{n}\right\}^{\frac{1}{\gamma}}\leqslant M_\gamma(y)\leqslant\{[\max(|y_1|,\cdots,|y_n|)]^\gamma\}^{\frac{1}{\gamma}},$$

即

$$\left(\frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{\gamma}}\max(|y_1|,\cdots,|y_n|)\leqslant M_\gamma(y)\leqslant\max(|y_1|,\cdots,|y_n|).$$

由

$$\lim_{\gamma\to\infty}\left(\frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{\gamma}}=1$$

可知

$$\lim_{\gamma\to\infty}M_\gamma(y)=\max(|y_1|,\cdots,|y_n|).$$

2) 当 $|y_i|>0(i=1,2,\cdots,n)$时,由 Lagrauge 中值定理(定理4.1)可知

$$\frac{\log\left(\frac{1}{n}(|y_1|^\gamma+\cdots+|y_n|^\gamma)\right)-0}{\gamma-0}=\frac{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}|y_i|^{\gamma'}\log|y_i|}{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}|y_i|^{\gamma'}},$$

此处 $0<\gamma'<\gamma$. 因此

$$\lim_{\gamma\to 0}M_\gamma(y)=\lim_{\gamma\to 0}\left\{\frac{1}{n}(|y_1|^\gamma+\cdots+|y_n|^\gamma)\right\}^{\frac{1}{\gamma}}=$$

$$=\lim_{\gamma\to 0}e^{\frac{1}{\gamma}\log\left\{\frac{1}{n}(|y_1|^\gamma+\cdots+|y_n|^\gamma)\right\}}=\lim_{\gamma'\to 0}e^{\frac{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}|y_i|^{\gamma'}\log|y_i|}{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}|y_i|^{\gamma'}}}=$$

$$=e^{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\log|y_i|}=|y_1\cdots y_n|^{\frac{1}{n}}.$$

若有某些 $y_i=0$, 不妨假定 $|y_i|>0(i=1,2\cdots,s)$, $y_i=0(i=s+1,\cdots,n)$, 則

$$M_\gamma(y)=\left[\frac{1}{n}(|y_1|^\gamma+\cdots+|y_n|^\gamma)\right]^{\frac{1}{\gamma}}=\left[\frac{s}{n}\cdot\frac{1}{s}(|y_1|^\gamma+\cdots+|y_s|^\gamma)\right]^{\frac{1}{\gamma}}=$$

$$=\left(\frac{s}{n}\right)^{\frac{1}{\gamma}}\left[\frac{1}{s}(|y_1|^\gamma+\cdots+|y_s|^\gamma)\right]^{\frac{1}{\gamma}}.$$

由

$$\lim_{\gamma\to 0}\left(\frac{s}{n}\right)^{\frac{1}{\gamma}}=0$$

可知

$$\lim_{\gamma\to 0}M_\gamma(y)=0\cdot|y_1\cdots y_s|^{\frac{1}{s}}=0=|y_1\cdots y_n|^{\frac{1}{n}}.$$

故得定理.

定理 6. 当 $\gamma>0$ 时我們有

$$M_0(y)\leqslant M_\gamma(y)\leqslant M_\infty(y).$$

其中特別有

$$|y_1\cdots y_n|^{\frac{1}{n}}\leqslant\frac{|y_1|+\cdots+|y_n|}{n},$$

就是几何平均不大于算术平均.

§6. 漸 近 綫

在掌握了微分学之后,我們就更有把握来說明图形的增減变化的情况、使我們更能抓住要点来刻画图形.

通常所使用的"按点描图"的方法,所取的点疏密多少都是有"偶然性"的,与图形的特性无关. 两点之間的联綫方法,可以任意或平或曲,或向上凸或向下凸并无定则,因此并不能很好地达到我們的希望.

我們現在的主要目的在于尽可能准确地表达出函数的特点,至于个別的点的准确位置仅居次要地位.

在考慮一个函数所表示的曲綫

$$y=f(x)$$

时,首先要知道的是这函数所存在的区域,例如

$$y=\sin^{-1}x,\qquad y=\sqrt{1-x^2}$$

的存在区域一定在 $-1\leqslant x\leqslant 1$ 之中,因此所画的图形不会超出这个区域.

在可能存在的区域內,我們要考慮間断点,就是失去連續性的点. 例如,$x=x_0$ 是这样的一点,我們要考慮它的左右极限.

其次考慮 $y=f(x)$ 的微商 $y'=f'(x)$ 的情况, 微商无穷的情况必須特別考慮, 我們仅处理微商无穷仅在个別点出現的情况, 并标出 $f'(x)=0$ 的各点. 有了这些点便可以在一定程度上表示出这曲綫的一般情况,因为一有这些点就可以表出曲綫的增減情况,并且可以指出函数的变化率下降到 $0(y'=0)$ 或增大到无穷 $(y'=\infty)$ 的那些点.

更进一步的精确度由二次微商表达，曲綫是向上凸还是向下凸，可以由 $f''(x)$ 表示出来. 如果曲綫經过一点时由向上凸而变为向下凸了，这样的点称为扭轉点. 如果 $f''(x)$ 在这一点附近連續且变号，則在这一点 $f''(x)=0$. 但是有时使 $f''(x)=0$ 的点并不一定是扭轉点.

我們先来研究曲綫有无穷分支的情况，双曲綫抛物綫都是有无穷分支的曲綫.

有以下性质的一条直綫，称为对曲綫的一分支的漸近綫：当点在无穷分支上移向无穷时，这点和該直綫的距离趋向于 0.

先講曲綫平行于 y 軸的漸近綫，这样的漸近綫的形式是 $x=c$（是常数），即当沿无穷分支趋向无穷时，x 趋于 c，y 趋向无穷.

所以平行于 y 軸的漸近綫就是求这样的 c 值，使 $x\to c$ 时，$f(x)\to\infty$.

在研究曲綫对于漸近綫的相关位置时，必須注意 x 自左至右趋向 c 时的符号，例如 $y=\frac{1}{x}$ 以 $x=0$ 为漸近綫，其左趋向 $-\infty$，其右趋向 $+\infty$. 又如 $y=\frac{1}{x^2}$ 也是以 $x=0$ 为漸近綫，其左其右都趋向 $+\infty$.

图 133

再研究不平行于 y 軸的漸近綫

$$y=ax+b.$$

命 ω 表漸近綫与 x 軸所成的角度，$\overline{MK}$ 是曲綫上的点到这漸近綫的距离，$\overline{MK_1}$ 是当横坐标 x 相同时，曲綫上点的縱坐标与漸近綫上点的縱坐标之差，由直角三角形得

$$\overline{MK_1}=\frac{\overline{MK}}{|\cos\omega|},\quad\left(\omega\neq\frac{\pi}{2}\right).$$

原条件是

$$\lim_{x\to\infty}\overline{MK}=0.$$

这也相当条件

$$\lim_{x\to\infty}\overline{MK_1}=0,\tag{1}$$

也就是

$$\lim_{x\to\infty}(f(x)-ax-b)=0.\tag{2}$$

所以要求漸近綫，就是要求 a，b 使上式成立.

条件(2)也就是

$$\lim_{x\to\infty}x\left[\frac{f(x)}{x}-a-\frac{b}{x}\right]=0.$$

但是第一因子是无穷大，所以由此得出

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{f(x)}{x}-a-\frac{b}{x}\right)=0,$$

也就是

$$a=\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}.$$

求出 a 之后，

$$b=\lim_{x\to\infty}(f(x)-ax).$$

所以得

定理 1. 曲綫

$$y=f(x)$$

有一条不平行于 y 軸的漸近綫存在的必要且充分条件是：当沿一无穷分支移动时，$x\to\infty$ 而且以下两个极限存在：

$$a=\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x},\qquad b=\lim_{x\to\infty}(f(x)-ax).$$

此时漸近綫的方程就是

$$y=ax+b.$$

同法处理 $x\to-\infty$ 的情况.

特别注意，当 $x\to+\infty$ (或 $-\infty$) 时，差 $f(x)-(ax+b)$ 的符号. 如果 x 充分大时这差常正，则曲綫在漸近綫上；常負，则曲綫在漸近綫下；时負时正，则倏上倏下. 在前两种情况下，我們又可把漸近綫看作曲綫在无穷远点的切綫.

例 1.

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1,\qquad y=\pm\frac{b}{a}\sqrt{x^2-a^2}.$$

先确定分支

$$y=\frac{b}{a}\sqrt{x^2-a^2}$$

的漸近綫，我們有

$$\lim_{x\to\infty}\frac{b}{xa}\sqrt{x^2-a^2}=\frac{b}{a}.$$

又

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{b}{a}\sqrt{x^2-a^2}-\frac{b}{a}x\right)=-\frac{b}{a}\lim_{x\to\infty}\frac{a^2}{\sqrt{x^2-a^2}+x}=0,$$

所以双曲綫有漸近綫

$$y=\frac{b}{a}x,\qquad ay=bx.$$

又当 $x\to-\infty$ 时，我們有

$$y=-\frac{b}{a}x.$$

同法处置另一分支 $y=-\frac{b}{a}\sqrt{x^2-a^2}$.

例 2.

$$y=\sqrt{\frac{x^3}{x-a}} \qquad a>0.$$

由

$$\lim_{x\to\infty}\frac{y}{x}=\lim_{x\to\infty}\sqrt{\frac{1}{1-a/x}}=1$$

及

$$\lim_{x\to\infty}(y-x)=\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x-a}}\frac{a\sqrt{x}}{\sqrt{x}+\sqrt{x-a}}=\frac{a}{2},$$

所以

$$y=x+\frac{a}{2}$$

是在正的方向这曲綫的漸近綫。

由

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{y}{x}=-1, \qquad \lim_{x\to-\infty}(y+x)=-\frac{a}{2}$$

可知，$y=-x-\frac{a}{2}$ 是在負的方向这曲綫的漸近綫。

又

$$x=a$$

也是一条漸近綫。

§7. 作图要点

假如我們要画出 $y=f(x)$ 的图形，需要依以下的步驟来进行考慮。

1）确定自变数 x 的变化范围；

2）确定曲綫与坐标軸的交点；

3）确定曲綫的极大值与极小值，同时也可以看出曲綫的升降情况；

4）确定曲綫的扭轉点，同时也可以看出曲綫的上、下凸的情况；

5）确定漸近綫；

6）如果曲綫有对称性，应明确指出，借以帮助我們画图形。

例 1. 画曲綫

$$y=\frac{(x-3)^2}{4(x-1)}.$$

1）x 可以从 $-\infty$ 变到 $+\infty$，但 $x\neq 1$.

2）命 $x=0$，則得 $y=-\frac{9}{4}$，而当 $y=0$ 得 $x=3$，所以曲綫經过两点 $\left(0,-\frac{9}{4}\right)$ 与 $(3,0)$。

3）由

$$f'(x)=\frac{(x-3)(x+1)}{4(x-1)^2}$$

知极小值在 $(3,0)$、极大值在 $(-1,-2)$.

4）由二次微商

$$f''(x)=\frac{2}{(x-1)^3}$$

可以看出 $x>1$ 时，$f''(x)>0$，所以曲綫向下凸；而 $x<1$ 时曲綫向上凸；当 $x=1$ 时，得 $f(x)$ 的一間断点.

5）当 x 从右方趋于 1 时，y 趋于正无穷；当 x 从左方趋于 1 时，y 趋于負无穷，所以有 $x=1$ 为其漸近綫.

又

$$y=\frac{1}{4}x-\frac{5}{4}+\frac{1}{(x-1)},$$

所以有

$$y=\frac{1}{4}x-\frac{5}{4}$$

为其另一漸近綫.

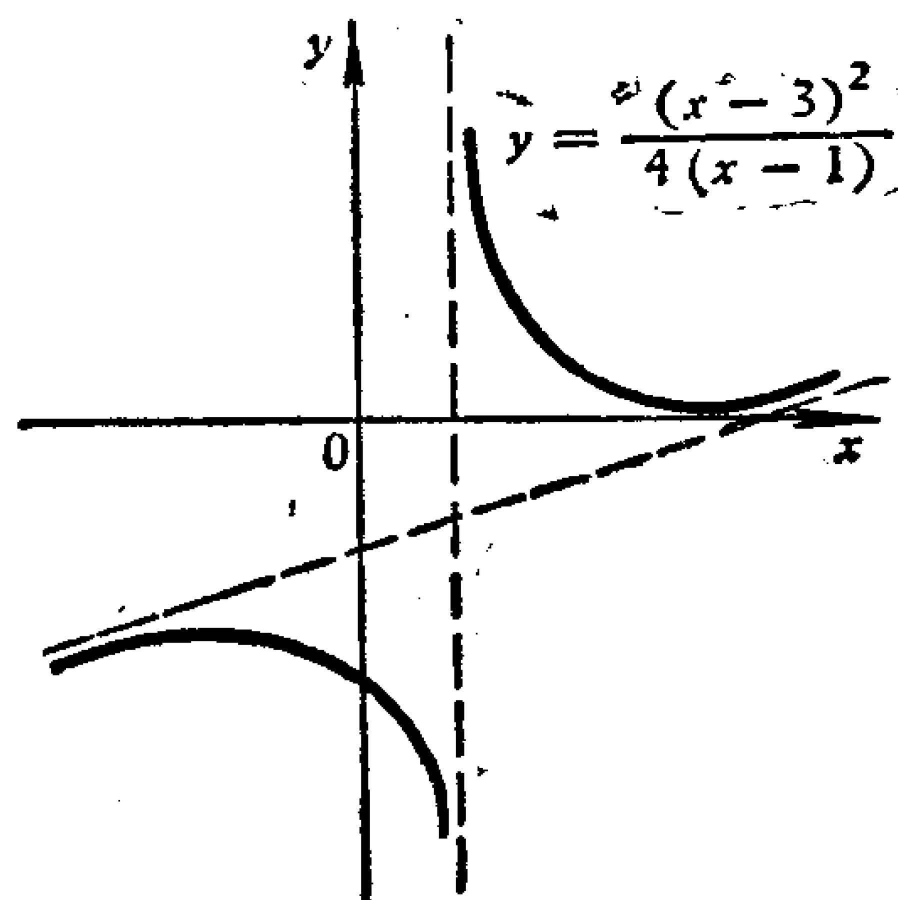


图 134

由这些性質，作出图形（見图 134）.

例 2. van der Waals 的公式是：在压力 p 温度 T 时，一克分子气体的体积 v 适合于

$$\left(p+\frac{a}{v^2}\right)(v-b)=RT,$$

这儿 a, b, R 都是正常数. 我們假定温度 T 已給定，我們来研究压力

$$p=p(v)=-\frac{a}{v^2}+\frac{RT}{v-b}$$

因体积 v 而变化的情况，特别是 $v>b$ 的情况. 函数 $p=p(v)$ 的微商是

$$p'(v)=\frac{2a}{v^3}-\frac{RT}{(v-b)^2}.$$

要研究 $p'(v)$ 的正負情况，我們研究

$$z(v)=\frac{2(v-b)^2}{v^3}-\frac{RT}{a}$$

的变化情况也就够了.

$$z'(v)=\frac{2(v-b)(3b-v)}{v^4}.$$

由此可見

v	b		$3b$		$+\infty$
$z'(v)$	0	+	0	−	0
$z(v)$	$-\frac{RT}{a}$	↗	$\frac{8}{27b}-\frac{RT}{a}$	↘	$-\frac{RT}{a}$

现在分三种情况来进行討論：

1) 若 $\frac{8a}{27b}<RT$，$z(v)$ 常負，故 $p'(v)$ 也常負，即 $p(v)$ 是減函数。當 v 接近于 b 时，p 变为无穷，图形如图 135 所示。

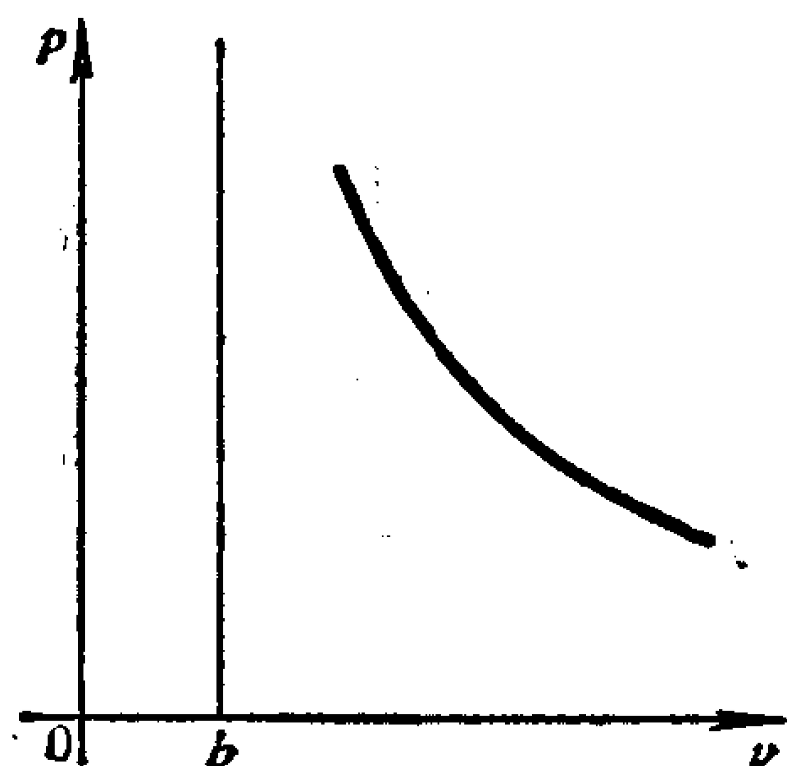


图 135

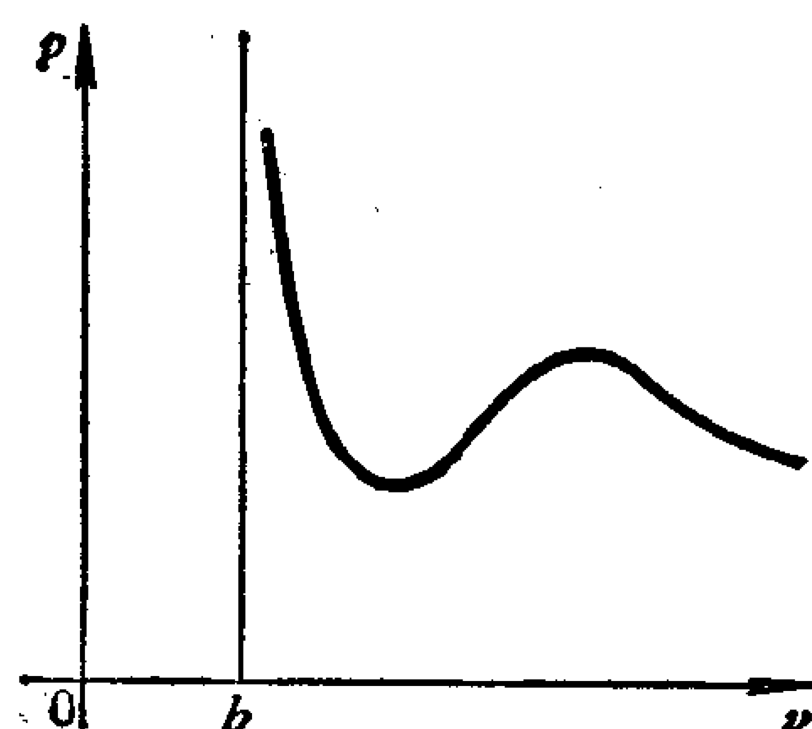


图 136

2) 如果 $\frac{8a}{27b}>RT$，$z(v)$ 有一根 v_1 在 b 与 $3b$ 之間，另一根 v_2 在 $3b$ 与 ∞ 之間，且在二根之間为正，其他的情况为負，因此得(图 136)

v	b		v_1		$3b$		v_2		$+\infty$
$p'(v)$ 及 $z(v)$		−	0		+		0	−	
$p(v)$		↘	m		↗		M	↘	

3) $\frac{8a}{27b}=RT$，則 $z(v)$ 有重根 $v=3b$。$z(v)$ 常为負，所以 $p(v)$ 是減函数，但在 $v=3b$ 有一水平切綫。

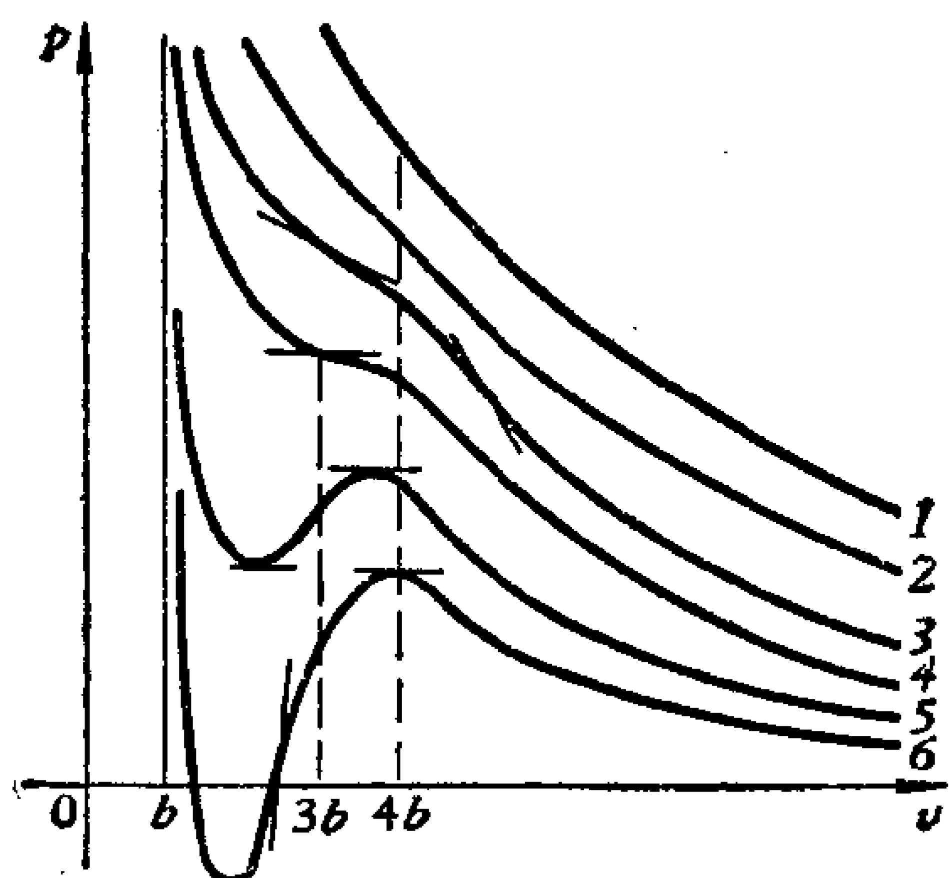


图 137

① $T>\left(\frac{3}{4}\right)^4\frac{a}{bR}$,

② $T=\left(\frac{3}{4}\right)^4\frac{a}{bR}$,

③ $\left(\frac{3}{4}\right)^4\frac{a}{bR}>T>\frac{8}{27}\frac{a}{bR}$,

④ $T=\frac{8}{27}\frac{a}{bR}$,

⑤⑥ $\Big\}\ T<\frac{8}{27}\frac{a}{bR}$.

例 3.

$$x(x^2+y^2)+a(x^2-y^2)=0,\qquad a>0$$

这条曲綫有以下几何意义：取一个定点 O 及过 O 的圆 (C) 及一直綫 (D)，一条經过 O 的直綫 Δ，交圆 (C) 于 P，交直綫 (D) 于 Q. Δ 上的点 M 由 $\overline{OM}=\overline{PQ}$ 来定义（图 138）. M 的軌迹称为圆形立方曲綫，当 (D) 就是圆直径时，就可以算出是上面的形式（图 139）. 取 O 为原点，圆 C 的中心在 $(a, 0)$，D 就是 $x=a$.

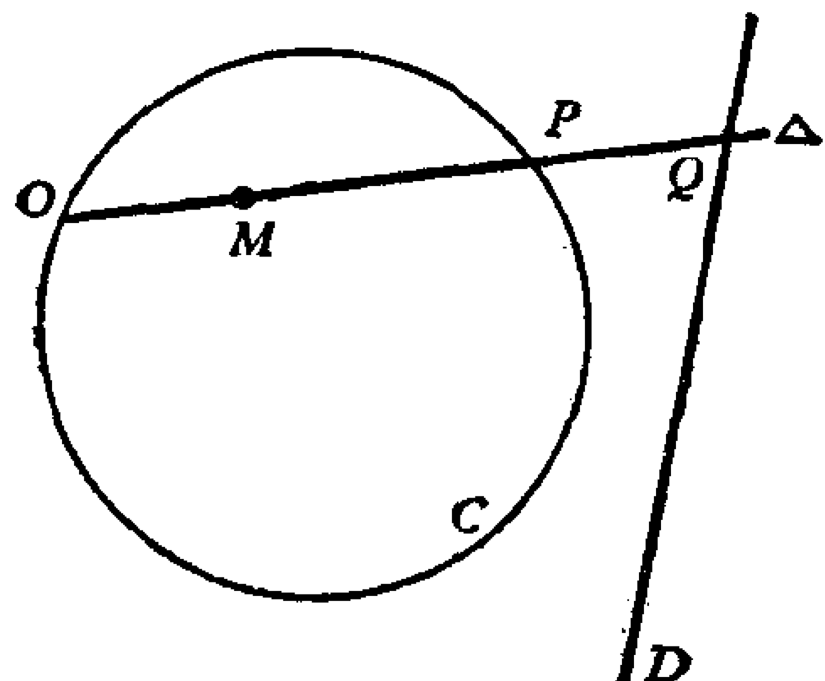


图 138

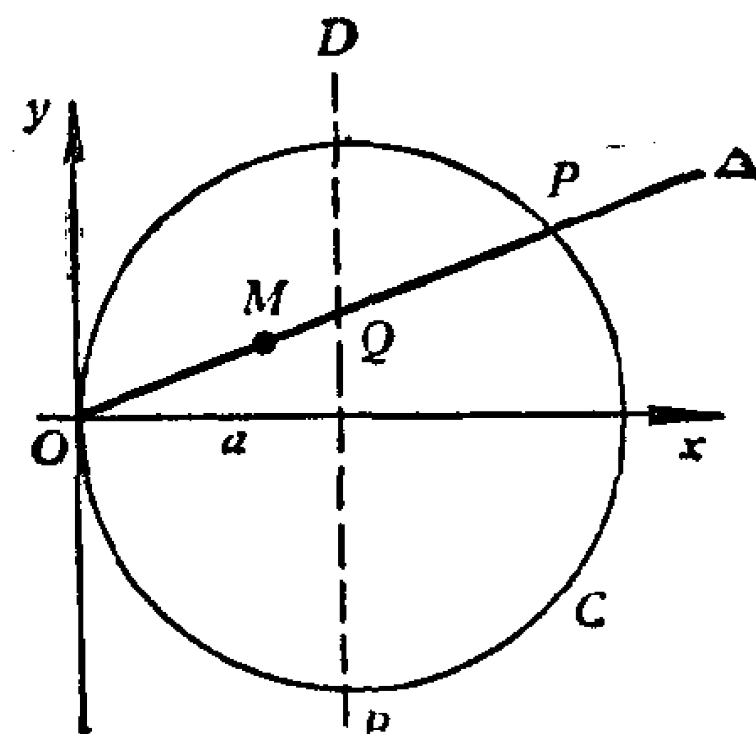


图 139

設 M 的坐标为 (x_0, y_0)，过 OM 的直綫为

$$y=\frac{y_0}{x_0}x,$$

故 Q 的坐标是 $\left(a, \frac{y_0}{x_0}a\right)$. 圆的方程是 $(x-a)^2+y^2=a^2$，交点 P 的横坐标适合于

$$(x-a)^2+\frac{y_0^2}{x_0^2}x^2-a^2=0, \qquad x=\frac{2ax_0^2}{x_0^2+y_0^2}.$$

由

$$\overline{OM}=\overline{PQ},$$

得

$$x_0^2+y_0^2=a^2\left[\left(1-\frac{2x_0^2}{x_0^2+y_0^2}\right)^2+\frac{y_0^2}{x_0^2}\left(1-\frac{2x_0^2}{x_0^2+y_0^2}\right)^2\right],$$

$$(x_0^2+y_0^2)^3=a^2\left[(y_0^2-x_0^2)^2+\frac{y_0^2}{x_0^2}(y_0^2-x_0^2)^2\right],$$

$$x_0^2(x_0^2+y_0^2)^2=a^2(y_0^2-x_0^2)^2$$

此即题設之方程.

解出得

$$y=\pm x\sqrt{\frac{a+x}{a-x}}.$$

所以仅在 $[-a, a)$ 之間有曲綫. 由于对 x 軸的对称性，我們考虑

$$y=x\sqrt{\frac{a+x}{a-x}}.$$

其微商

$$y'=\sqrt{\frac{a+x}{a-x}}\left(1+\frac{ax}{(a+x)(a-x)}\right).$$

我們考虑

$$a^2+ax-x^2=-\left(x-a\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)\left(x-a\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right),$$

因此

x	$-a$		$a\frac{1-\sqrt{5}}{2}$		0		a
y	0	↘	极小	↗	0	↗	$+\infty$

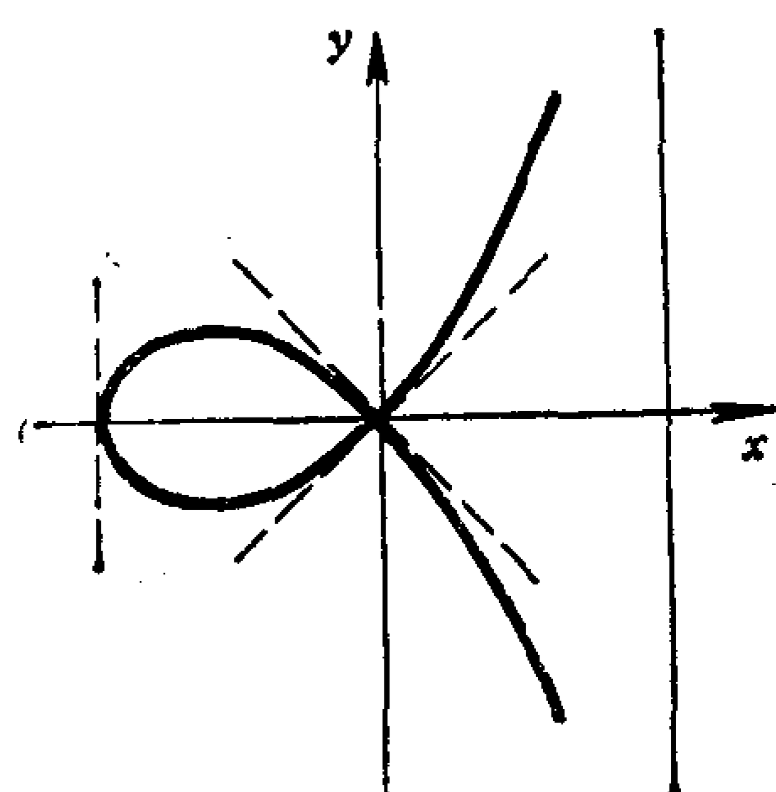


图 140

当 $x=-a$，则 $y'=-\infty$，所以在此处有一垂直切綫；当 $x=0$ 时，$y'=1$，在此处有平分象限的切綫，有渐近綫 $x=a$，这曲綫在这渐近綫之左。

求 y''，易見曲綫是向下凸的，沒有扭轉点。

例 4.

$$y=2\sin x-x\cos x.$$

1）列出 x 在 $\frac{n\pi}{2}$ $(n=1,2,\cdots)$ 时 y 的值。

x	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{2}$	$\frac{7\pi}{2}$	……	π	2π	3π	……
y	2	-2	2	-2	……	π	-2π	3π	……

2）$y'=\cos x+x\sin x$

$y''=x\cos x$

x	0		$\frac{\pi}{2}$		π		$\frac{3\pi}{2}$		2π
y''	0	$+$	0	$-$	$-\pi$	$-$	0	$+$	2π
y'	1	↗	$\frac{\pi}{2}$	↘	-1	↘	$-\frac{3\pi}{2}$	↗	1
y	0	↗		极大 ↘				极小 ↗	

3）由

$(2\sin x-x\cos x)^2=4\sin^2x-4x\cos x\sin x+$
$+x^2\cos^2x=4+x^2-(2\cos x+x\sin x)^2\leqslant 4+x^2$，
所以 $y=2\sin x-x\cos x$ 包在双曲綫 $y^2-x^2=4$ 之內（見图 141）。

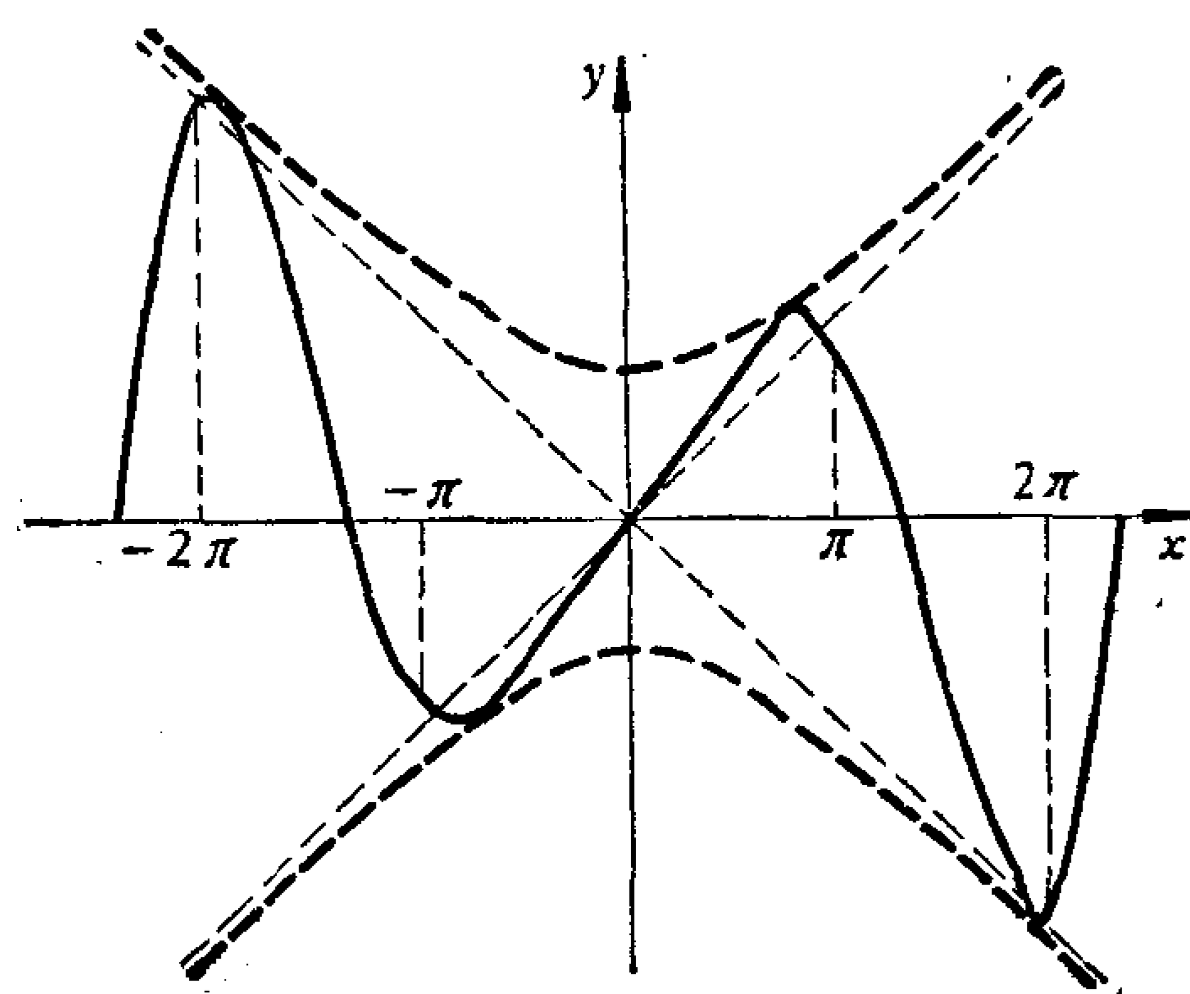


图 141

例 5.

$$y=x+\sqrt{x^2-1}.$$

1）x 所取的值的范围是 $|x|\geqslant 1$；

2）$y'=1+\frac{x}{\sqrt{x^2-1}}$

x	$-\infty$	-1		1	∞
y'	0	$-\infty$		$+\infty$	$+2$
y	↘	-1		1	↗

(黑影表示不取 $-1 < x < 1$ 这个区間的值);

3) 現在来求当 $x \to \infty$ 时的漸近綫,此时

$$y = x + x\sqrt{1 - \frac{1}{x^2}} = x + x\left[1 - \frac{1}{2x^2} + \frac{\varepsilon(x)}{x^2}\right],$$

此处

$$\lim_{x\to\infty} \varepsilon(x) = 0.$$

故得漸近綫

$$y = 2x.$$

又当 $x \to -\infty$ 时

$$y = x - x\sqrt{1 - \frac{1}{x^2}} = x - x\left[1 - \frac{1}{2x^2} + \frac{\eta(x)}{x^2}\right],$$

此处

$$\lim_{x\to-\infty} \eta(x) = 0.$$

故得漸近綫 $y = 0$ (图 142).

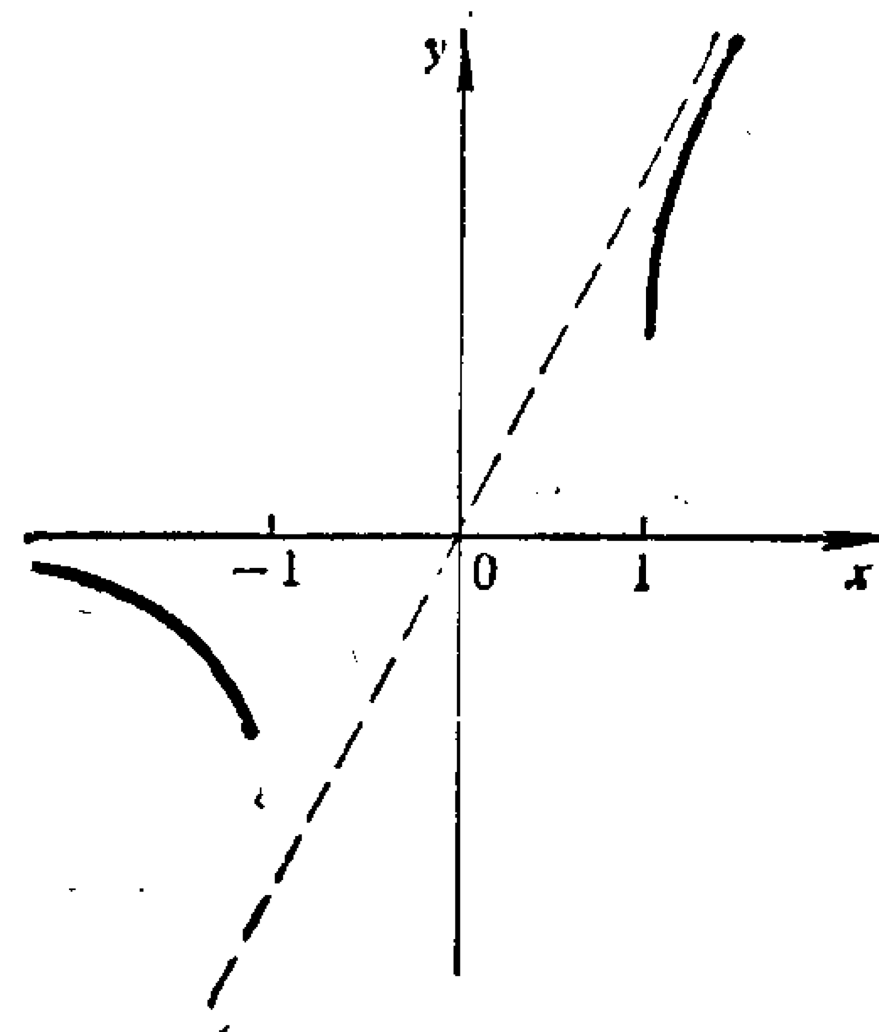


图 142

例 6.

$$x^3 + y^3 - 3xy = 0.$$

1) 将坐标軸轉 45°, 即用变换

$$x = \frac{1}{\sqrt{2}}(X - Y),$$

$$y = \frac{1}{\sqrt{2}}(X + Y).$$

故原方程变为

$$\sqrt{2}\,(X^3 + 3XY^2) - 3(X^2 - Y^2) = 0,$$

即

$$Y = \pm \frac{X}{\sqrt{3}}\sqrt{\frac{3 - X\sqrt{2}}{1 + X\sqrt{2}}}.$$

因此

$$-\frac{1}{\sqrt{2}} < X < \frac{3}{\sqrt{2}}.$$

2) 我們考慮一支

$$Y = \frac{X}{\sqrt{3}}\sqrt{\frac{3 - X\sqrt{2}}{1 + X\sqrt{2}}},$$

得

$$Y' = \frac{1}{\sqrt{3}}\sqrt{\frac{3 - X\sqrt{2}}{1 + X\sqrt{2}}}\left[1 - \frac{2X\sqrt{2}}{(3 - X\sqrt{2})(1 + X\sqrt{2})}\right].$$

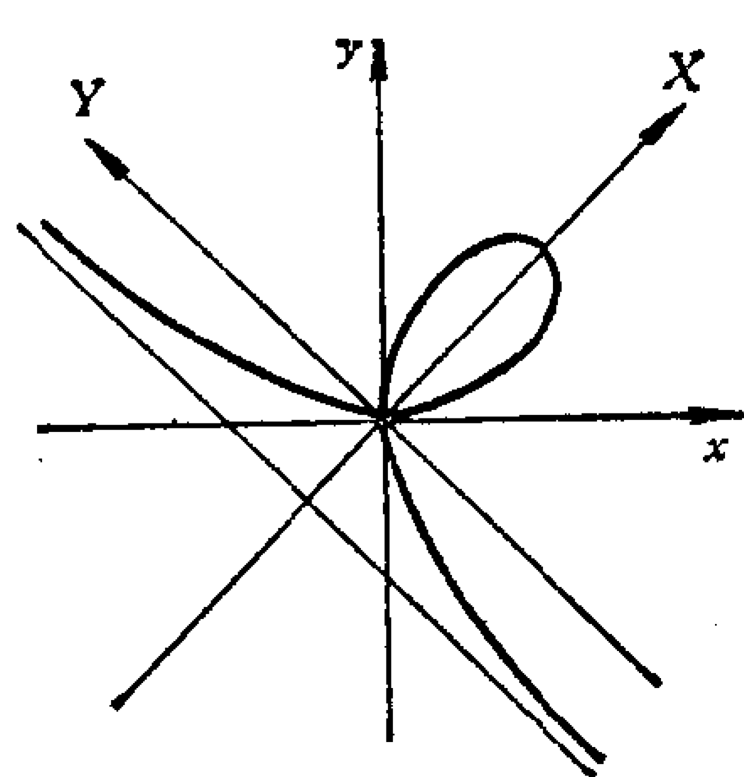


图 143

故得

X	$-\frac{1}{\sqrt{2}}$		0		$\sqrt{\frac{3}{2}}$		$\frac{3}{\sqrt{2}}$
Y'	$+\infty$	$+$	1	$+$	0	$-$	$-\infty$
Y	$-\infty$	↗	0	↗	$\sqrt{\frac{3}{2}}\sqrt{\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1}}$ 极大	↘	0

§8. 参变表示法的曲綫描图

例 1.

$$x = \sin t, \qquad y = \frac{\sin t}{2 + \cos t}.$$

这都是 t 的以 2π 为周期的函数，所以这曲綫是当 t 由 $-\pi$ 变到 π 的軌迹. 当 t 变为 $-t$ 时，x, y 变为 $-x$, $-y$，所以曲綫对 O 是对称的. 所以只要考虑 $0 \leqslant t \leqslant \pi$ 的情况.

求微商

$$\frac{dx}{dt} = \cos t, \qquad \frac{dy}{dt} = \frac{1 + 2\cos t}{(2 + \cos t)^2}.$$

所以有下表

t	0		$\frac{\pi}{2}$		$\frac{2\pi}{3}$		π
x	0	↗	1	↘	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	↘	0
y	0	↗	$\frac{1}{2}$	↗	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	↘	0

由

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1 + 2\cos t}{\cos t(2 + \cos t)^2},$$

可知，当

$$t = 0,\ \frac{\pi}{2},\ \frac{2\pi}{3}\text{ 及 }\pi\text{ 时}, \qquad \frac{dy}{dx} = \frac{1}{3},\ \infty,\ 0\text{ 及 }1.$$

因而作出图 144.

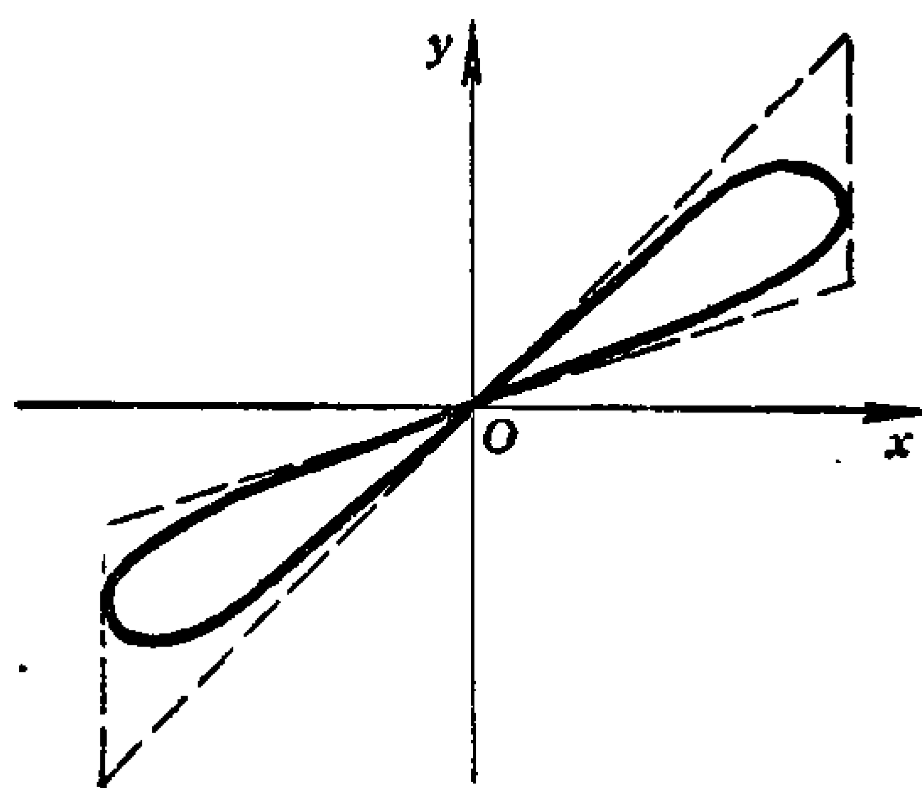


图 144

例 2. 描繪曲綫

$$x = \frac{t^3 - t^2 + 2}{t}, \qquad y = \frac{t^3 - 1}{t + 1}.$$

除 $t = 0$ 及 $t = -1$ 之外，t 可取区間 $-\infty < t < \infty$ 中的任何值. 由

$$\frac{dx}{dt} = \frac{2t^3 - t^2 - 2}{t^2}, \quad \frac{dy}{dt} = \frac{2t^3 + 3t^2 + 1}{(t + 1)^2}$$

(試自証 $x' = 0$ 有唯一实根 t_2 在 0 与 ∞ 之間，$y' = 0$ 有

唯一实根 t_1 在 $-\infty$ 与 -1 之間),故得

t	$-\infty$		t_1		-1		0		t_2		$+\infty$
x'		$-$		$-$			▓	$-$	0	$+$	
y'		$-$	0	$+$	▓			$+$		$+$	
x	$+\infty$		$\searrow$		0	$\searrow -\infty$	▓	$+\infty$ $\searrow$		$\nearrow$	$+\infty$
y	$+\infty$	$\searrow$		$\nearrow +\infty$	▓	$-\infty \nearrow$	-1		$\nearrow$		$+\infty$

(黑影处表示間断). 由此可見

$$x=0 \quad 及 \quad y=-1$$

是两条渐近綫.

又当 $t\to\infty$ 时

$$x=t^2-t+\frac{2}{t}$$

$$y=\frac{t^3-1}{t}\cdot\frac{1}{1+\frac{1}{t}}=\frac{t^3-1}{t}\left(1-\frac{1}{t}+\frac{1}{t^2}-\cdots\right)=t^2-t+1-\frac{2}{t}+\frac{\varepsilon(t)}{t},$$

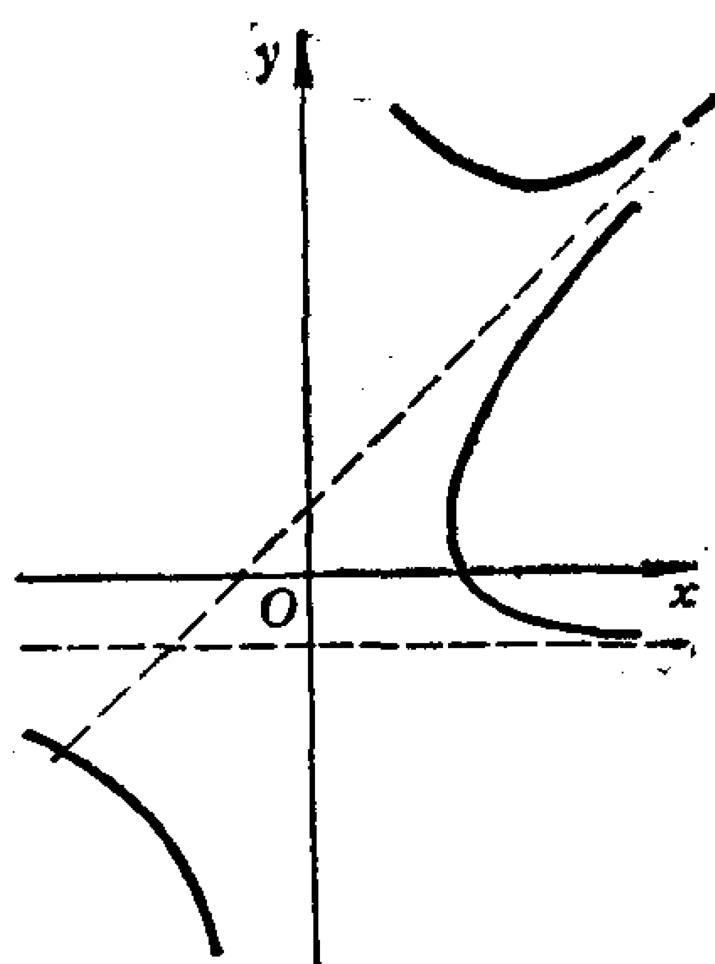


图 145

此处

$$\lim_{t\to\infty}\varepsilon(t)=0.$$

故得另一渐近綫

$$y-x-1=0.$$

因而作出图 145.

§9. 切綫,法綫,子切綫,子法綫

曲綫

$$y=f(x)$$

在点 $M(x, y)$ 的切綫是

$$Y - y = y'(X - x),$$

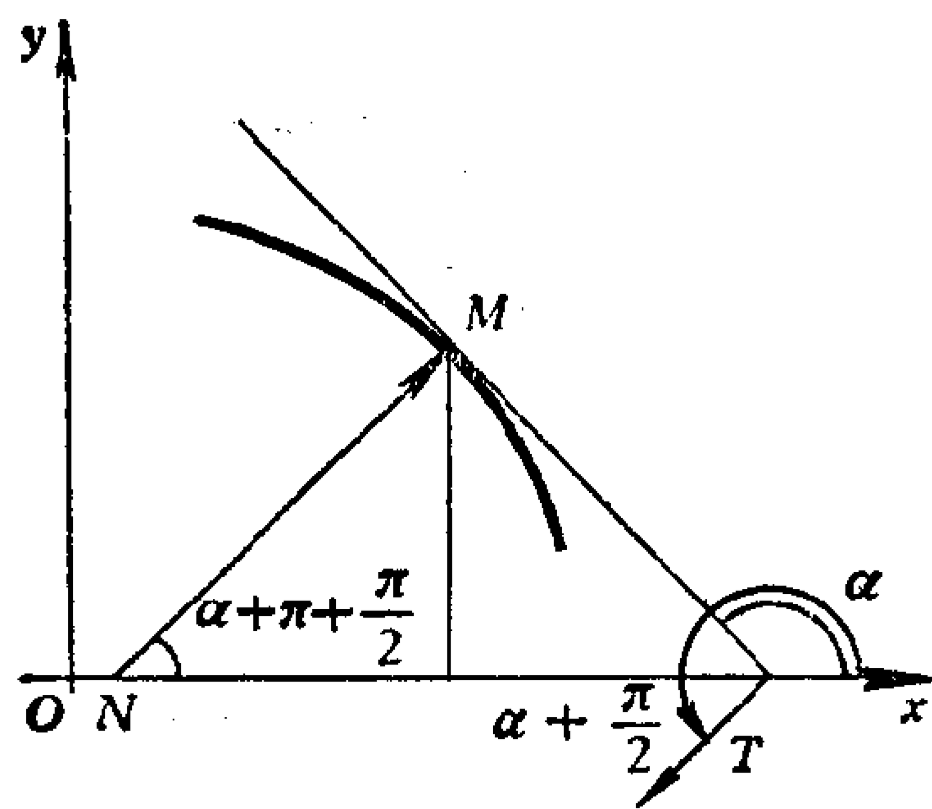


图 146

而法綫(垂直于切綫的直綫)是

$$X - x + y'(Y - y) = 0.$$

切綫与 x 軸的交点 T 的横坐标等于(命 $Y = 0$)

$$x - \frac{y}{y'}.$$

法綫与 x 軸的交点的横坐标等于 $x + y'y$.

子切綫就是 MT 在 x 軸上的射影，其长就是 $-y/y'$. 子法綫就是 NM 在 x 軸上的射影，其长就是 $y'y$.

綫段 TM 及 MN 的长度各称为切綫长及法綫长，故得

$$\overline{TM} = \left|\frac{y}{y'_x}\sqrt{1 + y'^2_x}\right|,$$

$$\overline{MN} = \left|y\sqrt{1 + y'^2_x}\right|.$$

切綫长、法綫长及子切綫、子法綫对切綫与法綫的作图有帮助.

例 1. 求作抛物綫 $y^2 = 2px$ 的切綫与法綫.

由

$$yy'_x = p,$$

故抛物綫的子法綫长为常数.

因而得抛物綫的法綫簡便作图法如下：过 M 作平行于 y 軸的直綫交 x 軸于 P. 量 $PN = p$. 联接 MN 就是法綫，随之而得切綫(图 147).

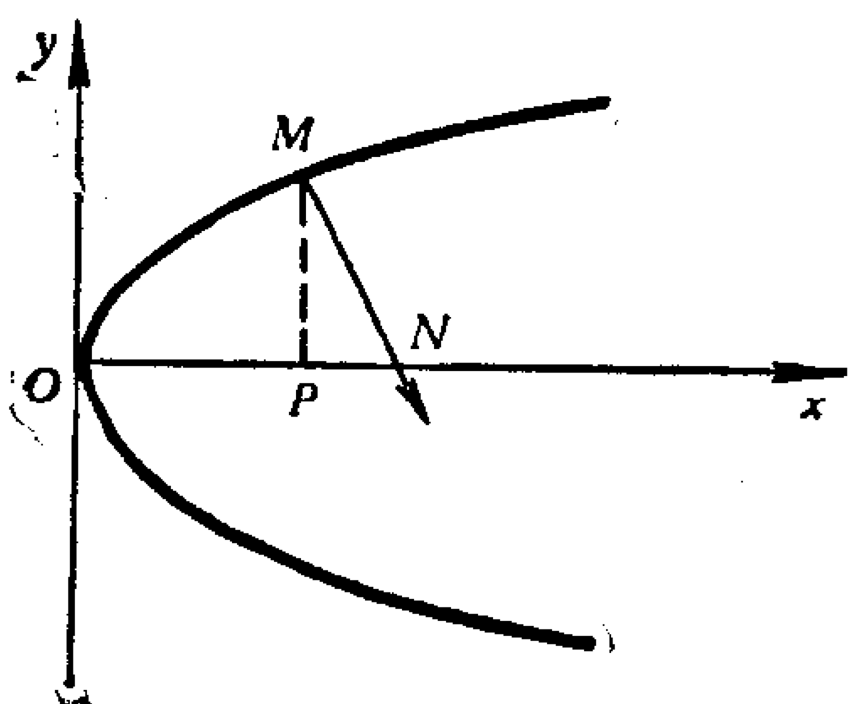


图 147

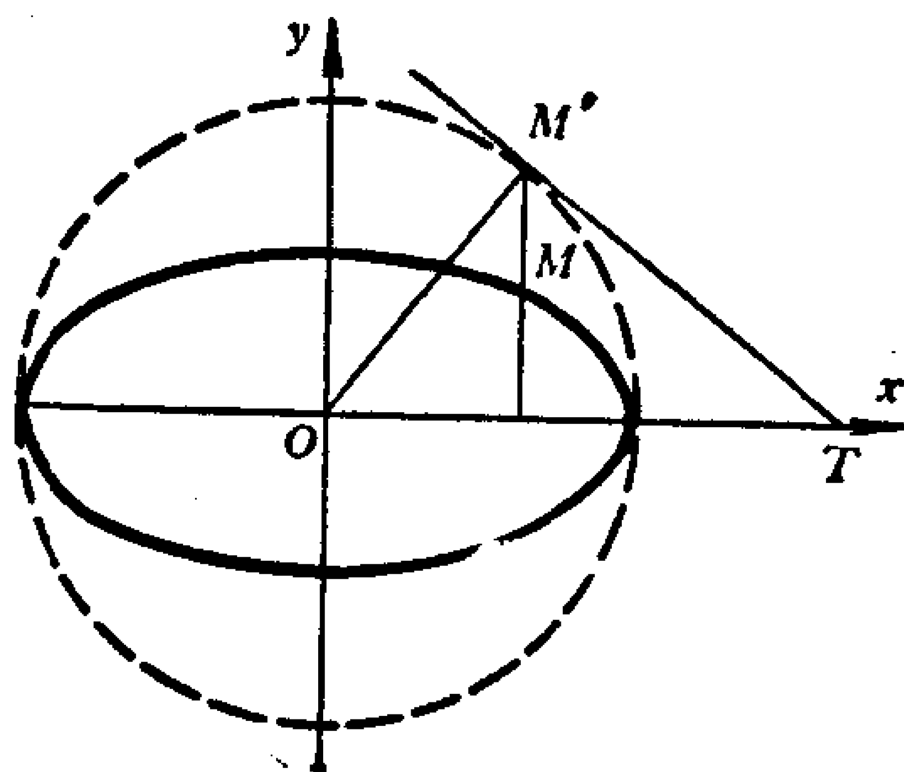


图 148

例 2. 求作椭圓 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ 的切綫与法綫.

椭圓的切綫方程是

$$\frac{x}{a^2}(X - x) + \frac{y}{b^2}(Y - y) = 0.$$

当 $Y = 0$ 时，得 $X = \frac{a^2}{x}$. 故椭圓在 $M(x, y)$ 的切綫与 x 軸的交点 T 与 y 及 b 无关.

故得求椭圓切綫的簡便作图法：过M作平行于Y軸的直綫交圓$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{a^2}=1$于$M'$．作此圓过$M'$的切綫，交$X$軸于$T$． 联接$T$与$M$，就得到椭圓的切綫了，随之而得法綫(图148)．

特别当曲綫由极坐标$r=f(\theta)$給出时，改写成直角坐标，則得

$$x=r\cos\theta=f(\theta)\cos\theta,$$
$$y=r\sin\theta=f(\theta)\sin\theta.$$

因此

$$\operatorname{tg}\alpha=\frac{y'_\theta}{x'_\theta}=\frac{r'_\theta\sin\theta+r\cos\theta}{r'_\theta\cos\theta-r\sin\theta}.$$

用极坐标来研究曲綫，則切綫的位置，往往不用它与极軸的交角α来确定，而用它与向径的延长綫的交角ω来确定．由图149知

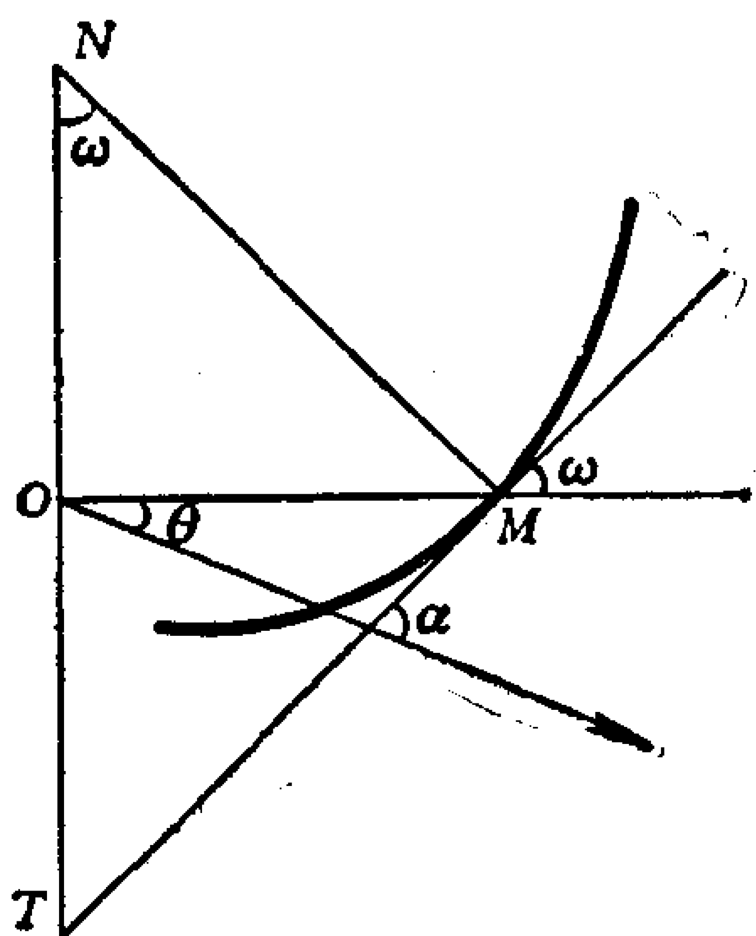


图 149

$$\operatorname{tg}\omega=\operatorname{tg}(\alpha-\theta)=\frac{\operatorname{tg}\alpha-\operatorname{tg}\theta}{1+\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\theta}=\frac{xy'_x-y}{x+yy'_x}=\frac{r}{r'_\theta}.$$

通过原点O，作垂直于向径的軸，設切綫与法綫分别与它交于T与N，則TO, ON, TM, MN分别称为**极子切綫**，**极子法綫**，**极切綫**与**极法綫**．由图149可知

$$\overline{TO}=r\operatorname{tg}\omega=\frac{r^2}{r'_\theta},$$

$$\overline{ON}=r\operatorname{ctg}\omega=r'_\theta,$$

$$\overline{TM}=\left|\frac{r}{r'_\theta}\sqrt{r^2+r'^2_\theta}\right|,$$

$$\overline{MN}=\sqrt{r^2+r'^2_\theta}.$$

例 3. 求作双曲螺綫$r=\frac{a}{\theta}$的切綫．

由$r'_\theta=-\frac{a}{\theta^2}$可知极子切綫等于$-a$(常数)，故得切綫簡便作图法見图150：

$$a>0.$$

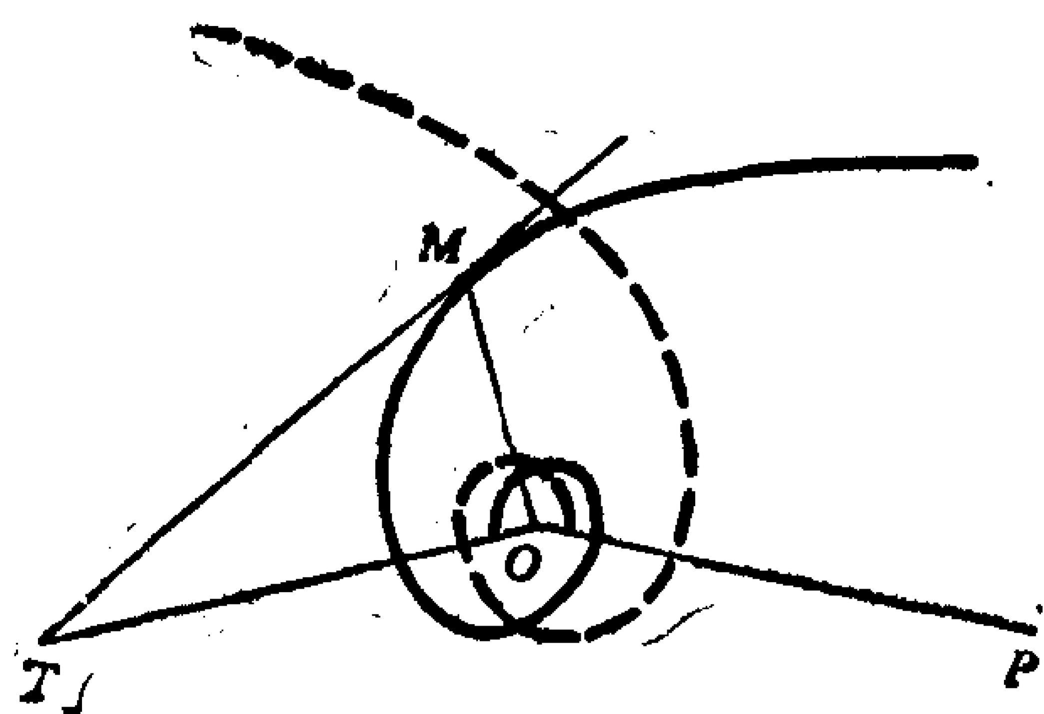


图 150

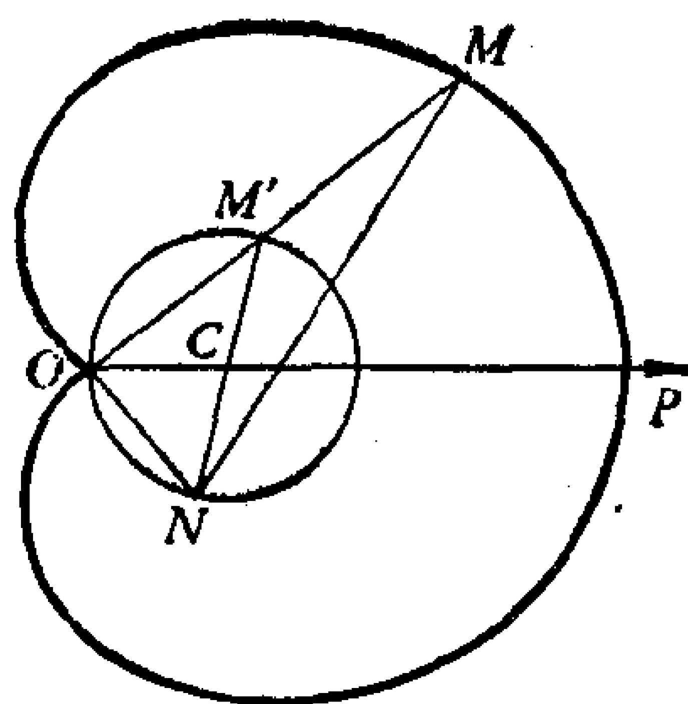


图 151

例 4. 求作蚶綫 $r=a\cos\theta+b$ 的法綫.

由

$$\text{极子法綫}=r'_\theta=-a\sin\theta,$$

故极子法綫与 b 无关,即无論什么 b,同一向径上的点所对应的 N 都是一样的. 故得法綫的作法如图 151: 过蚶綫上一点 M, 联 MO, 交圓 $r=a\cos\theta$(对应于 $b=0$ 的蚶綫) 于 M', M' 与圓心 C 的联綫交圓于 N, 則 N 与 M 的联綫就是蚶綫的法綫.

§10. 积分公式

如果 $F(x)$ 的微商是 $f(x)$, 也就是

$$\frac{dF(x)}{dx}=F'(x)=f(x),$$

我們就称 $F(x)$ 是 $f(x)$ 的积分原函数,或称为 $f(x)$ 的不定积分. 用符号

$$F(x)=\int f(x)dx=\int dF(x)$$

来表它. 但是必須注意,一个函数的积分原函数并不是唯一的. 例如,对任一常数 C, 我們有

$$\frac{d}{dx}(F(x)+C)=\frac{dF(x)}{dx}=f(x).$$

我們現在来証明这一現象的反定理.

定理 1. 一个函数的积分原函数只能相差一个常数.

証. 若

$$\frac{dF(x)}{dx}=\frac{dG(x)}{dx}=f(x),$$

即

$$\frac{d}{dx}(F(x)-G(x))=0.$$

所以我們如果能够証明:"微商为 0 的函数一定是常数"即足.

假定在 $[a, b]$ 中定义的函数 $F(x)$ 的微商是 0,由中值定理可知

$$F(x)-F(a)=(x-a)F'(\xi)=0,\quad a<\xi<x\leqslant b.$$

即无論 x 是 $[a, b]$ 中之何值,常有 $F(x)=F(a)$, 即得所証.

由这定理立刻推出

$$\int F'(x)dx = F(x) + C,$$

这儿C是一个常数.

又显而易見,对任意常数 a 与 b, 常有

$$\int (aF(x) + bG(x))dx = a\int F(x)dx + b\int G(x)dx + C.$$

把第五章 §7 的微商公式表倒轉順序,就可以得出本节之末的积分表. 这积分表中仅仅包括了很簡单的几个积分,較复杂的积分方法以后再系統地介紹. 注意,在求积分时,永远不要忘記写上积分常数 C.

积 分 公 式 表

1) $\int au'dx = au + C.$

2) $\int (u_1' + \cdots + u_n')dx = (u_1 + \cdots + u_n) + C.$

3) $\int (u_1'u_2\cdots u_n + u_1u_2'u_3\cdots u_n + u_1u_2\cdots u_n')dx = u_1u_2\cdots u_n + C.$

4) $\int \frac{u'v - uv'}{v^2}dx = \frac{u}{v} + C.$

5) $\int 1dx = x + C.$

6) $\int x^a dx = \frac{x^{a+1}}{1+a} + C. \qquad (a \neq -1)$

7) $\int \frac{1}{x}dx = \log x + C, \int \frac{1}{x}dx = \log a \log_a x + C.$

8) $\int e^x dx = e^x + C, \qquad \int a^x dx = \frac{a^x}{\log a} + C.$

9) $\int \sin x dx = -\cos x + C.$

10) $\int \cos x dx = \sin x + C.$

11) $\int \sec^2 x dx = \operatorname{tg} x + C.$

12) $\int \csc^2 x dx = -\operatorname{ctg} x + C.$

13) $\int \operatorname{tg} x \cdot \sec x dx = \sec x + C.$

14) $\int \operatorname{ctg} x \csc x dx = -\csc x + C.$

15) $\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx = \arcsin x + C.$

16) $\int \frac{1}{1+x^2}dx = \operatorname{arc tg} x + C.$

17) $\int \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}dx = \text{arc sec } x + C.$

18) $\int \text{sh } x dx = \text{ch } x + C.$

19) $\int \text{ch } x dx = \text{sh } x + C.$

20) $\int \frac{1}{\text{sh}^2 x}dx = -\text{cth } x + C.$

21) $\int \frac{1}{\text{ch}^2 x}dx = \text{th } x + C.$

22) $\int \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}dx = \text{sh}^{-1}x + C.$

23) $\int \frac{\pm 1}{\sqrt{x^2-1}}dx = \text{ch}^{-1}x + C.$

24) $\int \frac{1}{1-x^2}dx = \text{th}^{-1}x + C, \qquad (-1 < x < 1).$

25) $\int \frac{1}{1-x^2}dx = \text{cth}^{-1}x + C, \qquad (x > 1, x < -1).$

26) $\int y'_u u'_x dx = y + C.$

現在举几个簡单的例子来說明积分常数的意义:

先考虑等速运动. 在直綫上取一点作为原点或者称它为家. 在离"家"C里的地方依每小时v里的速度背向着"家"前进,t小时后离家多远? 当然离家

$$s = C + vt$$

里,速度就是

$$\frac{ds}{dt} = v.$$

所以仅仅知道了速度v和时間t,我們并不能确切地知道身在何处,必須知道出发点的所在. C就是当$t=0$时出发点离家的距离. 如果要問离我們出发点多远,那末C就等于0,而t小时后走了vt里.

再考虑等加速运动. 例如,物体墜地,地心吸力的加速度是

$$\frac{d^2s}{dt^2} = g \qquad (g = 9.81\,[\text{米}]/[\text{秒}]^2).$$

要研究这一个問題,就必須知道开始观察时(即$t=0$的时候)物体的所在地以及那时的速度. 例如,我們从地面上算起,物体从s_0公尺高度以每秒鐘v_0的速度向下墜,問几秒鐘后达到地面. 先算t秒鐘后的速度:积分一次,得出

$$\frac{ds}{dt} = gt + C.$$

当$t=0$时,速度$\left(\frac{ds}{dt}\right)_{t=0} = v_0$,所以$C = v_0$. 再积分,得物体所走过的总路程是

$$\frac{1}{2}gt^2+v_0t+C',$$

离地面的高度是

$$s_0-\left(\frac{1}{2}gt^2+v_0t+C'\right).$$

当 $t=0$ 时，高度是 s_0，所以 $C'=0$，即得 t 秒后，高度等于

$$s_0-\frac{1}{2}gt^2-v_0t,$$

落地的时間就是

$$s_0-\frac{1}{2}gt^2-v_0t=0$$

的解答.

这說明了：我們仅知加速度，是不能定出物体运动所在点的．我們必須知道在开始观察时这物体在那儿，以怎样的速度运动，才能由加速度知道这物体运动的規律．

§11. 隐函数的微分

即使对沒有解出的方程

$$F(x,y)=0, \tag{1}$$

我們也能求函数 y 对 x 的微商.

例 1. 命

$$x^3+y^3-3axy=0,$$

我們要求出 y'.

逐項求微分可知

$$3x^2+3y^2\frac{dy}{dx}-3ay-3ax\frac{dy}{dx}=0.$$

所以得出

$$y'=-\frac{x^2-ay}{y^2-ax}.$$

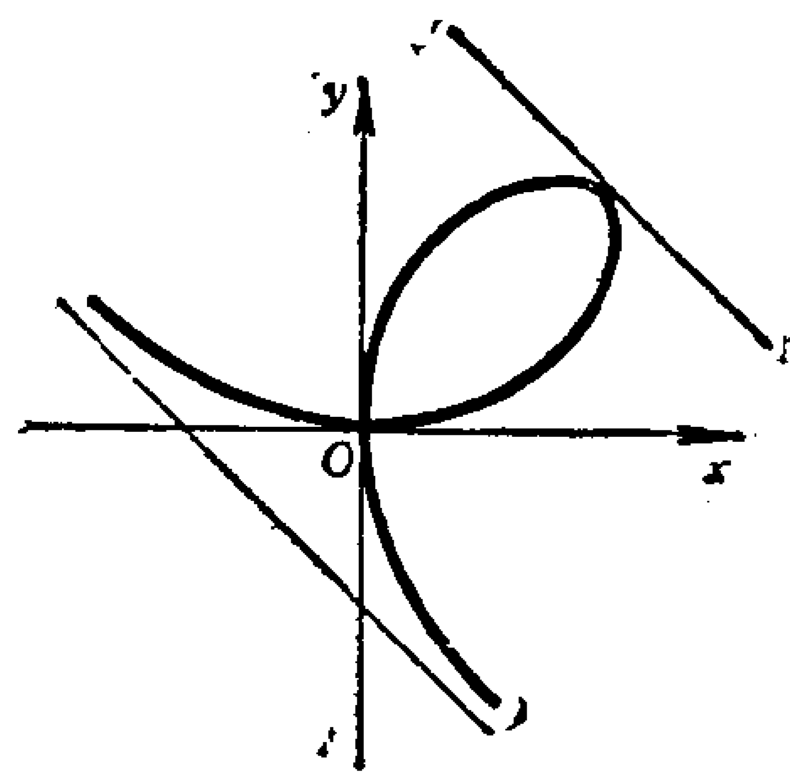


图 152

这曲綫經过一点 $\left(\frac{3}{2}a,\frac{3}{2}a\right)$. 在这一点我們有

$$y'=-1,$$

所以得切綫

$$y-\frac{3}{2}a=-\left(x-\frac{3}{2}a\right),$$

即

$$x+y=3a.$$

为了把这方法一般化，我們引进偏微商的概念．在 $F(x,y)$ 中把 y 看成常数，对 x 进

行微商，称为 $F(x, y)$ 对 x 的偏微商，用

$$F_x(x, y) \quad 或 \quad \frac{\partial}{\partial x} F(x, y)$$

来表它．同样，用

$$F_y(x, y) \quad 或 \quad \frac{\partial}{\partial y} F(x, y)$$

来表示 $F(x, y)$ 对 y 的偏微商，一般說我們有

定理 1. 假定 (x_0, y_0) 是适合于

$$F(x, y) = 0$$

的一点，并且由 (1) 定义一个 x 的函数 $y = y(x)$，y 是 x 的連續函数，微商及偏微商都存在，且 $\frac{\partial F}{\partial y} \neq 0 \mid y_0 = y(x_0)$，則在这一点，我們有

$$y' = -\frac{\partial F}{\partial x} \Big/ \frac{\partial F}{\partial y} = -F_x/F_y.$$

这称为隐函数的微商公式(所謂隐函数乃指 $F(x, y) = 0$ 还沒有对 y 解出来)．

証． 当 x_0 增加 Δx 时，y_0 增加了 Δy．当 $\Delta x \to 0$ 时，Δy 也接近于 0．由

$$F(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) = 0,$$

可知

$$F(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - F(x_0, y_0) = 0.$$

卽得

$$\frac{F(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - F(x_0, y_0 + \Delta y)}{\Delta x} +$$

$$+ \frac{F(x_0, y_0 + \Delta y) - F(x_0, y_0)}{\Delta y} \frac{\Delta y}{\Delta x} = 0.$$

由中值定理得

$$F_x(x_0 + \theta \Delta x, y_0 + \Delta y) + F_y(x_0, y_0 + \theta' \Delta y) \frac{\Delta y}{\Delta x} = 0,$$

此处 $0 < \theta < 1$，$0 < \theta' < 1$．当 $\Delta x \to 0$，得

$$F_x(x_0, y_0) + F_y(x_0, y_0) \left(\frac{dy}{dx}\right)_0 = 0.$$

卽得定理．

在曲綫 (1) 上的一点 (x_0, y_0)，切綫方程是

$$y - y_0 = -\frac{F_x(x_0, y_0)}{F_y(x_0, y_0)}(x - x_0),$$

卽

$$F_y(x_0, y_0)(y - y_0) + F_x(x_0, y_0)(x - x_0) = 0.$$

这样的表达形式，可以表达斜率是 ∞ 的情形．

再回到例 1．如果 (x_0, y_0) 是

$$x^3 + y^3 - 3axy = 0$$

上的一点，在这点的切綫方程是

$$\left(\frac{\partial}{\partial x}(x^3 + y^3 - 3axy)\right)_0 (x - x_0) + \left(\frac{\partial}{\partial y}(x^3 + y^3 - 3axy)\right)_0 (y - y_0) = 0.$$

我們用 $(f(x))_0 = (f(x))_{x=x_0}$ 表 $f(x_0)$，即得

$$(x_0^2 - ay_0)(x - x_0) + (y_0^2 - ax_0)(y - y_0) = 0,$$

即

$$(x_0^2 - ay_0)x + (y_0^2 - ax_0)y = ax_0y_0.$$

在 $\left(\frac{3}{2}a, \frac{3}{2}a\right)$ 的切綫，如前所述。在原点附近，这式子全等于 0。这样的点称为奇异点，以后再进行討論。

我們現在討論以下更一般的問題。如果

$$x = \varphi(t),\ y = \psi(t),$$

我們研究函数

$$G(x, y)$$

对 t 的微商。結果是

$$\frac{dG}{dt} = \frac{\partial G}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial G}{\partial y}\frac{dy}{dt}$$

（当然我們必須假定所应有的微商的存在性等）。用微分形式表出就是

$$dG = \frac{\partial G}{\partial x}dx + \frac{\partial G}{\partial y}dy.$$

我們来証明这一結果。当給了 t 的变量 Δt 时，x 及 y 的变量各为 Δx 与 Δy。由中值公式可得

$$\begin{aligned} G(x + \Delta x, y + \Delta y) - G(x, y) &= G(x + \Delta x, y + \Delta y) - G(x, y + \Delta y) \\ &+ G(x, y + \Delta y) - G(x, y) = G_x(x + \theta\Delta x, y + \Delta y)\Delta x \\ &+ G_y(x, y + \theta'\Delta y)\Delta y, \end{aligned}$$

此处 $0 < \theta < 1$，$0 < \theta' < 1$。除以 Δt 即得

$$\frac{dG}{dt} = \frac{\partial G}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial G}{\partial y}\frac{dy}{dt}.$$

这結果比定理 1 更广泛。取 $x = t$，即得定理 1。

应用这結果我們可以求隐函数的高阶微商。例如，

$$\begin{aligned} y'' &= \frac{d}{dx}\left(-\frac{F_x}{F_y}\right) = -\frac{1}{F_y}\frac{d}{dx}(F_x) + \frac{F_x}{F_y^2}\frac{d}{dx}F_y = \\ &= -\frac{1}{F_y}\left((F_x)_x + (F_x)_y\frac{dy}{dx}\right) + \frac{F_x}{F_y^2}\left((F_y)_x + (F_y)_y\frac{dy}{dx}\right) = \\ &= -\frac{1}{F_y}\left((F_x)_x + (F_x)_y\left(-\frac{F_x}{F_y}\right)\right) + \frac{F_x}{F_y^2}\left((F_y)_x + (F_y)_y\left(-\frac{F_x}{F_y}\right)\right) \end{aligned}$$

等等。

§ 12. $\frac{0}{0}$型的不定式

若当 $x=a$ 时、$\varphi(x)$ 与 $\psi(x)$ 都等于 0，則当 $x=a$ 时，商 $\frac{\varphi(x)}{\psi(x)}$ 是这样的一个不定式：$\frac{0}{0}$。本节就是研究当 $x\to a$ 时 $\frac{\varphi(x)}{\psi(x)}$ 的趋限情况。

定理 1 (l'Hospital)。 假定 $f(x)$ 与 $g(x)$ 在区間 $[a, b]$ 内定义，而且 $\lim\limits_{x\to a} f(x)=0$，$\lim\limits_{x\to a} g(x)=0$，并且 $f'(a)$ 及 $g'(a)$ 都存在而且有限，$g'(a)\neq 0$，則

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{f'(a)}{g'(a)}.$$

証． 因为 $f(x)$ 与 $g(x)$ 在 a 点都連續，故有 $f(a)=g(a)=0$。所以

$$\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{f(x)-f(a)}{g(x)-g(a)}=\frac{\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}}{\dfrac{g(x)-g(a)}{x-a}}.$$

令 $x\to a$ 卽得所需.

如果 $g'(a)=0$，但 $f'(a)\neq 0$，則 $\frac{f(x)}{g(x)}$ 趋向 ∞；如果 $g'(a)=f'(a)=0$，我們还可継續上述手續．續行可得

定理 2. 如果 $f(x)$，$g(x)$ 有 n 阶微商，且

$$\lim_{x\to a} f(x)=\lim_{x\to a} f'(x)=\cdots=\lim_{x\to a} f^{(n-1)}(x)=0,$$
$$\lim_{x\to a} g(x)=\lim_{x\to a} g'(x)=\cdots=\lim_{x\to a} g^{(n-1)}(x)=0$$

及 $g^{(n)}(a)\neq 0$，而 $f^{(n)}(a)$ 有限，則

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{f^{(n)}(a)}{g^{(n)}(a)}.$$

例 1. 求极限

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-e^{-x}}{\log(e-x)+x-1}.$$

分子分母都是零，我們可以用定理 1．极限等于

$$\left.\frac{e^x+e^{-x}}{1-\dfrac{1}{e-x}}\right|_{x=0}=\frac{2}{1-\dfrac{1}{e}}=\frac{2e}{e-1}.$$

例 2. 求极限

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-e^{-x}-2x}{x-\sin x},$$

此处有

$$\begin{aligned}
f(x)&=e^x-e^{-x}-2x, & f(0)&=0; & g(x)&=x-\sin x, & g(0)&=0,\\
f'(x)&=e^x+e^{-x}-2, & f'(0)&=0; & g'(x)&=1-\cos x, & g'(0)&=0,\\
f''(x)&=e^x-e^{-x}, & f''(0)&=0; & g''(x)&=\sin x, & g''(0)&=0,\\
f'''(x)&=e^x+e^{-x}, & f'''(0)&=2; & g'''(x)&=\cos x, & g'''(0)&=1.
\end{aligned}$$

所以极限等于 2.

注意. 1) 如果 $f(a) \neq 0$ 或 $g(a) \neq 0$, 我們并不能得出

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

換言之, 在应用定理 2 时, 我們必須步步检驗是否是 $\frac{0}{0}$. 到了不是这样的情况时, 运算应立刻終止, 决不能盲目地对分子与分母求微商.

2) 如果有可約的因子, 最好早早約去. 这样可以簡化我們的演算. 如果有极限值非 0 的因子, 我們也可以取出去.

例 3.

$$\lim_{x \to 0} \frac{xe^{2x} + xe^x - 2e^{2x} + 2e^x}{(e^x - 1)^3}$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{2xe^x - 3e^x + 3 + x}{3(e^x - 1)^2} \text{（上下求微商，并約去 } e^x\text{）}$$

$$= \frac{1}{3} \lim_{x \to 0} \frac{2xe^x + 2e^x - 3e^x + 1}{2(e^x - 1)e^x} \text{（微商）}$$

$$= \frac{1}{6} \lim_{x \to 0} \frac{-e^x + 2xe^x + 1}{e^x - 1} \text{（把 } \lim_{x \to 0} e^x = 1 \text{ 取出去）}$$

$$= \frac{1}{6} \lim_{x \to 0} \frac{2xe^x + e^x}{e^x} = \frac{1}{6}.$$

定理 3. 如果 $f(x)$ 及 $g(x)$ 在 $[c, +\infty)$ 內定义且

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} g(x) = 0,$$

并且 $f'(x)$ 及 $g'(x)$ 在 $[c, +\infty)$ 中存在且有限, $g'(x) \neq 0$; 如果极限

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)} = K$$

存在, 則也一定有

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = K.$$

証. 换变数 $x = \frac{1}{t}$, 則得

$$\lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{t \to 0} \frac{f\left(\frac{1}{t}\right)}{g\left(\frac{1}{t}\right)} = \lim_{t \to 0} \frac{f'\left(\frac{1}{t}\right)\left(-\frac{1}{t^2}\right)}{g'\left(\frac{1}{t}\right)\left(-\frac{1}{t^2}\right)} = \lim_{x \to \infty} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

§ 13. $\frac{\infty}{\infty}$ 型的不定式

定理 1. 假定 $f(x)$ 与 $g(x)$ 在 $[a, b]$ 內定义, 并且

$$\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to a} g(x) = \infty;$$

$f'(x)$ 与 $g'(x)$ 存在，并且 $g'(x)\neq 0$. 如果

$$\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}=K,$$

则

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=K.$$

証. 先研究K是有限的情况.

因为 $g'(x)\neq 0$, 所以照 Darboux 定理，它的符号不变. 我們不妨假定 $g'(x)<0$, 如此当 x 漸減时，而 $g(x)$ 变大，当 $x\to a$ 时 $g(x)\to+\infty$. 所以我們不妨假定 $g(x)>0$.

对任一 ε, 我們定有 $\eta>0$ 使

$$\left|\frac{f'(x)}{g'(x)}-K\right|<\frac{\varepsilon}{2},\qquad a<x<a+\eta.$$

命 $x_0=a+\eta$, 則 x 在 a 与 x_0 之間. 在 $[x, x_0]$ 中用 Cauchy 定理可知

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{g(x)-g(x_0)}=\frac{f'(c)}{g'(c)},\qquad x<c<x_0.$$

所以

$$\left|\frac{f(x)-f(x_0)}{g(x)-g(x_0)}-K\right|<\frac{\varepsilon}{2}. \tag{1}$$

直接驗証，我們有恆等式

$$\frac{f(x)}{g(x)}-K=\frac{f(x_0)-Kg(x_0)}{g(x)}+\left[1-\frac{g(x_0)}{g(x)}\right]\left[\frac{f(x)-f(x_0)}{g(x)-g(x_0)}-K\right],$$

由此得出

$$\left|\frac{f(x)}{g(x)}-K\right|\leqslant\left|\frac{f(x_0)-Kg(x_0)}{g(x)}\right|+\left|\frac{f(x)-f(x_0)}{g(x)-g(x_0)}-K\right|.$$

由(1)可知，右边第二項在 $x<x_0=a+\eta$ 时必小于 $\frac{\varepsilon}{2}$. 又因当 $x\to a$ 时 $g(x)\to+\infty$, 所以第一項也趋于 0, 且能找得 $\delta>0$ (可以使 $\delta<\eta$) 使 $a<x<a+\delta$ 时第一項亦小于 $\frac{\varepsilon}{2}$. 所以得出了

$$\left|\frac{f(x)}{g(x)}-K\right|<\varepsilon.$$

这証明了所需要的結果.

当 $K=\infty$, 已知至少在 a 近处有 $f'(x)\neq 0$, 所以 $\lim\limits_{x\to a}\frac{g'(x)}{f'(x)}=0$, 也就有 $\lim\limits_{x\to a}\frac{g(x)}{f(x)}=0$. 所以

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\infty.$$

类似上节，可以討論变元趋向 ∞ 的情况.

定理 2. 假定 $f(x)$ 与 $g(x)$ 在 $[c, +\infty)$ 內定义且

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=\lim_{x\to+\infty}g(x)=\infty.$$

在 $[c, +\infty)$ 內存在着有限导数 $f'(x)$ 与 $g'(x)$，且 $g'(x) \neq 0$. 如果极限

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f'(x)}{g'(x)}=K$$

存在(有限或无穷)，則

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=K.$$

証明留給讀者.

例 1. 当 $\mu>0$ 时

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\log x}{x^{\mu}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{1}{x}}{\mu x^{\mu-1}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\mu x^{\mu}}=0.$$

例 2. 当 $a>1, \mu>0$ 时

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^{\mu}}{a^{x}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\mu x^{\mu-1}}{a^{x}\log a}.$$

若 $\mu>1$，則右端仍然是 $\frac{\infty}{\infty}$，一次一次地接着做，总有一次分子的 x 的指数 <0，因此得出

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^{\mu}}{a^{x}}=0.$$

注意. 1) 在这两条定理里，我們假定了微商的比存在，而后求函数的极限. 我們不能倒过来用. 例如，极限

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x+\sin x}{x}=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{\sin x}{x}\right)=1$$

是存在的，但是微商之比 $1+\cos x$ 却沒有极限.

2) 定理 2 的变数 x 是連續变数，我們有关于貫的相仿的定理.

定理 3 (O. Stolz). 如果 $y_n\to\infty$ 并且 $y_{n+1}>y_n$，則有

$$\lim_{n\to\infty}\frac{x_n}{y_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{x_n-x_{n-1}}{y_n-y_{n-1}},$$

只須等式右边的极限已知其存在(有限或无穷).

証. 先假定有有限数 l 使

$$\lim_{n\to\infty}\frac{x_n-x_{n-1}}{y_n-y_{n-1}}=l,$$

即任給 $\varepsilon>0$，必有 N，使 $n>N$ 时

$$\left|\frac{x_n-x_{n-1}}{y_n-y_{n-1}}-l\right|<\frac{\varepsilon}{2},$$

或

$$l-\frac{\varepsilon}{2}<\frac{x_n-x_{n-1}}{y_n-y_{n-1}}<l+\frac{\varepsilon}{2}.$$

也就是

$$\frac{x_{N+1}-x_N}{y_{N+1}-y_N},\ \frac{x_{N+2}-x_{N+1}}{y_{N+2}-y_{N+1}},\ \cdots,\ \frac{x_{n-1}-x_{n-2}}{y_{n-1}-y_{n-2}},\ \frac{x_n-x_{n-1}}{y_n-y_{n-1}}$$

都在$\left(l-\frac{\varepsilon}{2}, l+\frac{\varepsilon}{2}\right)$之中. 由于$\frac{p}{q}<\frac{p+p'}{q+q'}<\frac{p'}{q'}$, 所以

$$\left|\frac{x_n-x_N}{y_n-y_N}-l\right|<\frac{\varepsilon}{2}.$$

(x_n-x_N是所有的分子之和, y_n-y_N是所有的分母之和).

由恆等式

$$\frac{x_n}{y_n}-l=\frac{x_N-ly_N}{y_n}+\left(1-\frac{y_N}{y_n}\right)\left(\frac{x_n-x_N}{y_n-y_N}-l\right)$$

可得

$$\left|\frac{x_n}{y_n}-l\right|\leqslant\left|\frac{x_N-ly_N}{y_n}\right|+\left|\frac{x_n-x_N}{y_n-y_N}-l\right|,$$

当$n>N$时第二項$<\frac{\varepsilon}{2}$. 由于$y_n\to\infty$, 所以第一項在$n>N'$时也$<\frac{\varepsilon}{2}$(并可取$N'>N$),就是当$n>N'$时

$$\left|\frac{x_n}{y_n}-l\right|<\varepsilon.$$

即得所証.

如果

$$\lim_{n\to\infty}\frac{x_n-x_{n-1}}{y_n-y_{n-1}}=+\infty,$$

当n充分大时有

$$x_n-x_{n-1}>y_n-y_{n-1},$$

所以当$y_n\to+\infty$时, x_n也$\to+\infty$. 研究$\frac{y_n}{x_n}$. 由前結果

$$\lim_{n\to\infty}\frac{y_n}{x_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{y_n-y_{n-1}}{x_n-x_{n-1}}=0,$$

所以

$$\lim_{n\to\infty}\frac{x_n}{y_n}=+\infty.$$

請比較定理1与定理3的証明.

§14. 其他型的不定式

1) $0\cdot\infty$型的不定式. 可以变成为$\frac{0}{0}$或$\frac{\infty}{\infty}$.

假定

$$\lim_{x\to a}f(x)=0,\quad \lim_{x\to a}g(x)=\infty,$$

則

$$f(x)g(x)=\frac{f(x)}{\frac{1}{g(x)}}=\frac{g(x)}{\frac{1}{f(x)}}.$$

这样便把 $0\cdot\infty$ 型变为 $\frac{0}{0}$ 型或 $\frac{\infty}{\infty}$ 型.

例 1. 命 $\mu>0$

$$\lim_{x\to 0}(x^{\mu}\cdot\log x)=\lim_{x\to 0}\frac{\log x}{x^{-\mu}}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{x}}{-\mu x^{-\mu-1}}=\lim_{x\to 0}\frac{x^{\mu}}{-\mu}=0.$$

2) $\infty-\infty$ 型的不定式.

假定

$$\lim_{x\to a}f(x)=+\infty,\qquad \lim_{x\to a}g(x)=+\infty,$$

我們可以利用

$$f(x)-g(x)=\frac{1}{\frac{1}{f(x)}}-\frac{1}{\frac{1}{g(x)}}=\frac{\frac{1}{g(x)}-\frac{1}{f(x)}}{\frac{1}{f(x)g(x)}}$$

把問題化为 $\frac{0}{0}$. 或者研究

$$\frac{e^{f(x)}}{e^{g(x)}},$$

把問題化为 $\frac{\infty}{\infty}$ 型.

例 2. 求

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x^2}-\operatorname{ctg}^2x\right)=\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2x-x^2\cos^2x}{x^2\sin^2x},$$

但

$$\frac{\sin^2x-x^2\cos^2x}{x^2\sin^2x}=\frac{\sin x+x\cos x}{\sin x}\cdot\frac{\sin x-x\cos x}{x^2\sin x}.$$

前一因子的极限等于 2. 又

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x-x\cos x}{x^2\sin x}=\lim_{x\to 0}\frac{x\sin x}{2x\sin x+x^2\cos x}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{2+\frac{x}{\sin x}\cos x}=\frac{1}{3},$$

所以所求的极限等于 $\frac{2}{3}$.

3) 形如 1^{∞}, 0^0, ∞^0 的不定型.

如

$$y=(f(x))^{g(x)}.$$

取 $\log y=g(x)\log f(x)$, 便各得 $\infty\cdot 0$, $0\cdot(-\infty)$ 及 $0\cdot\infty$ 的型.

例 3. 命

$$y=\left(\frac{\sin x}{x}\right)^{\frac{1}{1-\cos x}}.$$

当 $x \to 0$, 这是 1^∞ 型.

因为所討論的是 x 的偶函数,所以不妨假定 $x > 0$. 现在有

$$\log y = -\frac{\log x - \log \sin x}{1 - \cos x},$$

接連微分两次,可知

$$\lim_{x\to 0} \log y = \lim_{x\to 0} \frac{\dfrac{\cos x}{\sin x} - \dfrac{1}{x}}{\sin x} = \lim_{x\to 0} \frac{x\cos x - \sin x}{x\sin^2 x} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{-x\sin x}{\sin^2 x + 2x\sin x\cos x} = \lim_{x\to 0} \frac{-1}{\dfrac{\sin x}{x} + 2\cos x} = -\frac{1}{3}.$$

所以

$$\lim_{x\to 0} y = e^{-\frac{1}{3}}.$$

例 4.

$$y = \left(\frac{\pi}{2} - \operatorname{arc\,tg} x\right)^{\frac{1}{\log x}}.$$

当 $x \to +\infty$ 这是 0^0 型. 取 $\log y = \dfrac{\log\left(\dfrac{\pi}{2} - \operatorname{arc\,tg} x\right)}{\log x}$, 此为 $\dfrac{\infty}{\infty}$, 故

$$\lim_{x\to+\infty} \log y = \lim_{x\to+\infty} \frac{-\dfrac{1}{\dfrac{\pi}{2} - \operatorname{arc\,tg} x}\dfrac{1}{1+x^2}}{\dfrac{1}{x}} =$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{-\dfrac{x}{1+x^2}}{\dfrac{\pi}{2} - \operatorname{arc\,tg} x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\dfrac{1-x^2}{(1+x^2)^2}}{\dfrac{1}{1+x^2}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1-x^2}{1+x^2} = -1,$$

即

$$\lim_{x\to+\infty} y = \frac{1}{e}.$$

第七章　函数的 Taylor 展开式

§1. 多項式的 Taylor 公式

命 $p(x)$ 表一 n 次多項式

$$p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \cdots + a_nx^n, \tag{1}$$

逐次微商可得

$$\begin{aligned}
p'(x) &= a_1 + 2a_2x + 3a_3x^2 + \cdots + na_nx^{n-1},\\
p''(x) &= 1\cdot 2\cdot a_2 + 2\cdot 3a_3x + \cdots + (n-1)n\cdot a_nx^{n-2},\\
p'''(x) &= 1\cdot 2\cdot 3a_3 + \cdots + (n-2)(n-1)n\cdot a_nx^{n-3},\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
p^{(n)}(x) &= 1\cdot 2\cdot 3\cdots na_n.
\end{aligned}$$

在这些式子里，命 $x=0$，立刻得出

$$a_0 = p(0),\quad a_1 = \frac{p'(0)}{1!},\quad a_2 = \frac{p''(0)}{2!},\quad a_3 = \frac{p'''(0)}{3!},\ \cdots,\quad a_n = \frac{p^{(n)}(0)}{n!}.$$

把这些系数表示式代入(1)式可得

$$p(x) = p(0) + \frac{p'(0)}{1!}x + \frac{p''(0)}{2!}x^2 + \frac{p'''(0)}{3!}x^3 + \cdots + \frac{p^{(n)}(0)}{n!}x^n. \tag{2}$$

这公式与(1)的区别只在于系数的写法不同，而沒有什么性質上的差异．但是写法(2)的形式启示了以下一系列的工作．

首先，我們不依 x 的方次展开多項式，而依 $x-x_0$ 的方次展开多項式，x_0 是 x 的某一特别数值：

$$p(x) = A_0 + A_1(x-x_0) + A_2(x-x_0)^2 + A_3(x-x_0)^3 + \cdots + A_n(x-x_0)^n \tag{3}$$

命 $x-x_0=\xi$，$p(x)=p(x_0+\xi)=P(\xi)$．多項式

$$P(\xi) = A_0 + A_1\xi + A_2\xi^2 + A_3\xi^3 + \cdots + A_n\xi^n$$

的系数由前已証明的式子(2)得到：

$$A_0 = P(0),\quad A_1 = \frac{P'(0)}{1!},\quad A_2 = \frac{P''(0)}{2!},\quad A_3 = \frac{P'''(0)}{3!},\ \cdots,\quad A_n = \frac{P^{(n)}(0)}{n!}.$$

但由

$$P(\xi) = p(x_0+\xi),\quad P'(\xi) = p'(x_0+\xi),\quad P''(\xi) = p''(x_0+\xi),\ \cdots,$$

可知

$$P(0) = p(x_0),\quad P'(0) = p'(x_0),\quad P''(0) = p''(x_0),\ \cdots.$$

因而得出

$$A_0 = p(x_0), \quad A_1 = \frac{p'(x_0)}{1!}, \quad A_2 = \frac{p''(x_0)}{2!},$$

$$A_3 = \frac{p'''(x_0)}{3!}, \cdots, \quad A_n = \frac{p^{(n)}(x_0)}{n!}.$$

代入(3)得

$$p(x) = p(x_0) + \frac{p'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{p''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + $$
$$+ \frac{p'''(x_0)}{3!}(x - x_0)^3 + \cdots + \frac{p^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n. \tag{4}$$

这称为多項式 $p(x)$ 在 $x = x_0$ 点的 Taylor 展开式.

不难証明,展开式是唯一的.

§2. 函数的 Taylor 展开式

假定函数 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 內定义,且有 n 阶微商

$$f'(x), \quad f''(x), \cdots, \quad f^{(n)}(x).$$

命 x_0 为 $[a, b]$ 中的一点,我們仿上节做出多項式

$$p(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n.$$

又命

$$r(x) = f(x) - p(x).$$

定理 1. 在本节开始所給的假定下,当 $x \to x_0$ 时,$r(x) \to 0$,且是一个高于 n 級的无穷小(与 $x - x_0$ 比較),也就是

$$r(x) = o[(x - x_0)^n]$$

或

$$\lim_{x \to x_0} \frac{r(x)}{(x - x_0)^n} = 0.$$

証. 依 $p(x)$ 的性質可知

$$[r(x)]_{x=x_0} = [f(x) - p(x)]_{x=x_0} = 0,$$
$$[r'(x)]_{x=x_0} = [f'(x) - p'(x)]_{x=x_0} = 0,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$[r^{(n)}(x)]_{x=x_0} = [f^{(n)}(x) - p^{(n)}(x)]_{x=x_0} = 0.$$

我們現在用归納法来証明定理 1.

当 $n = 1$ 时

$$r(x_0) = r'(x_0) = 0,$$

所以

$$\lim_{x \to x_0} \frac{r(x)}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{r(x) - r(x_0)}{x - x_0} = r'(x_0) = 0,$$

即

$$r(x) = o(x - x_0).$$

假定这个論断对 $m(n > m \geqslant 1)$ 正确，我們进一步証明，它对 $m + 1$ 也正确. 此时，微商 $r'(x)$ 适合于

$$r'(x_0) = r''(x_0) = \cdots = r^{(m+1)}(x_0) = 0,$$

且依假設

$$r'(x) = o((x - x_0)^m).$$

由中值公式

$$r(x) = r(x) - r(x_0) = r'(c)(x - x_0),$$

此 c 在 x 与 x_0 之間. 因为 $|c - x_0| < |x - x_0|$，所以

$$r'(c) = o((c - x_0)^m) = o((x - x_0)^m).$$

于是得出

$$r(x) = o((x - x_0)^{m+1}).$$

这就是需要証明的.

因此我們定义 $p(x)$ 是函数 $f(x)$ 在 $x = x_0$ 点的近似多項式，而 $r(x)$ 称为余項.

命 $x - x_0 = \Delta x$, $f(x) - f(x_0) = \Delta f(x_0)$，則得出

$$\Delta f(x_0) = f'(x_0)\Delta x + \frac{1}{2!}f''(x_0)\Delta x^2 + \cdots$$

$$\cdots + \frac{1}{n!}f^{(n)}(x_0)\Delta x^n + o(\Delta x^n).$$

§ 3. Taylor 級数的余項

为了更清楚起見，我們把余項 $r(x)$ 改写成为 $r_n(x)$，因为它和 n 有关.

定理 1. 假定 $f(x)$ 在 $[x_0, x_0 + H]$ 上有 n 阶連續微商，而且在 $(x_0, x_0 + H)$ 中有第 $(n + 1)$ 阶有限微商. 假定 $\psi(z)$ 在 $[x_0, x]$ 上連續，且在开区間 (x_0, x) 內有不等于 0 的微商，則有一 c 适合于 $x_0 < c < x$，使

$$r_n(x) = \frac{\psi(x) - \psi(x_0)}{\psi'(c)} \frac{f^{(n+1)}(c)}{n!}(x - c)^n.$$

証. 我們有

$$r_n(x) = f(x) - f(x_0) - \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) - \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 - \cdots - \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n.$$

現在把 x 固定在 $[x_0, x_0 + H]$ 內的任一数. 作一輔助函数

$$\varphi(z) = f(x) - f(z) - \frac{f'(z)}{1!}(x - z) - \frac{f''(z)}{2!}(x - z)^2 - \cdots - \frac{f^{(n)}(z)}{n!}(x - z)^n,$$

其中 z 在 $[x_0, x]$ 內变动，函数 $\varphi(z)$ 連續而且适合于

$$\varphi(x_0) = r_n(x), \qquad \varphi(x) = 0,$$

并且在 (x_0, x) 內有微商

$$\varphi'(z) = -f'(z) - \left[\frac{f''(z)}{1!}(x-z) - f'(z)\right] -$$

$$-\left[\frac{f'''(z)}{2!}(x-z)^2 - \frac{f''(z)}{1!}(x-z)\right] -$$

$$-\left[\frac{f^{(4)}(z)}{3!}(x-z)^3 - \frac{f'''(z)}{2!}(x-z)^2\right] - \cdots$$

$$\cdots - \left[\frac{f^{(n+1)}(z)}{n!}(x-z)^n - \frac{f^{(n)}(z)}{(n-1)!}(x-z)^{n-1}\right] =$$

$$= -\frac{f^{(n+1)}(z)}{n!}(x-z)^n.$$

由 Cauchy 公式

$$\frac{\varphi(x)-\varphi(x_0)}{\psi(x)-\psi(x_0)} = \frac{\varphi'(c)}{\psi'(c)},$$

此处 $x_0 < c < x$ 或 $c = x_0 + \theta(x-x_0)$, $(0<\theta<1)$; 及

$$\varphi(x) = 0, \quad \varphi(x_0) = r_n(x), \quad \varphi'(c) = -\frac{f^{(n+1)}(c)}{n!}(x-c)^n,$$

得出

$$r_n(x) = \frac{\psi(x)-\psi(x_0)}{\psi'(c)} \frac{f^{(n+1)}(c)}{n!}(x-c)^n.$$

这就是所要証明的結果.

这定理虽然很一般,但在具体应用时很不方便. 如果我們取

$$\psi(z) = (x-z)^p; \qquad p>0,$$

則得

$$\psi'(z) = -p(x-z)^{p-1}, \quad (x_0<z<x).$$

于是有

$$r_n(x) = \frac{-(x-x_0)^p}{-p(x-c)^{p-1}} \cdot \frac{f^{(n+1)}(c)}{n!}(x-c)^n = \frac{f^{(n+1)}(c)}{n!p}(x-c)^{n+1-p}(x-x_0)^p.$$

因

$$c = x_0 + \theta(x-x_0),$$

所以

$$x - c = x - x_0 - \theta(x-x_0) = (1-\theta)(x-x_0),$$

因而得出

定理 2 (Schlömilch-Roché). 在定理 1 的假定下,余項

$$r_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(x_0+\theta(x-x_0))}{n!p}(1-\theta)^{n+1-p}(x-x_0)^{n+1},$$

此处 $0<\theta<1$.

取 $p = n+1$, 便得到更常用的形式.

定理 3 (Lagrange).

$$r_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1},$$

此处 c 是 x_0 与 x 之間的数或 $c=x_0+\theta(x-x_0)$, $0<\theta<1$.

Lagrange 余項的好处是：它使我們联想到下一項的形式.

带 Lagrange 余項的 Taylor 公式記之如下：

$$f(x)=f(x_0)+\frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\cdots$$
$$+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+\frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1},$$

此处 c 在 x 与 x_0 之間或 $c=x_0+\theta(x-x_0)$, $0<\theta<1$.

在定理 2 中取 $p=1$, 則得

定理 4.

$$r_n(x)=\frac{f^{(n+1)}(x_0+\theta(x-x_0))}{n!}(1-\theta)^n(x-x_0)^{n+1}.$$

如果 $f(x)$ 是无穷可微的函数(卽所有阶的微商都存在)，而且

$$\lim_{n\to\infty} r_n(x)=0,$$

則我們可以得到无穷展开式

$$f(x)=f(x_0)+\frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\cdots$$
$$+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+\cdots.$$

这級数收斂于 $f(x)$, 称为函数 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 处的 Taylor 展开式.

特别当 $x_0=0$ 时，級数

$$f(x)=f(0)+\frac{f'(0)}{1!}x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+\cdots$$

称为$f(x)$的 Maclaurin 展开式. 它的余項可以表为

$$r_n(x)=\frac{f^{(n+1)}(\theta x)}{(n+1)!}x^{n+1}, \quad 或 \quad \frac{f^{(n+1)}(\theta x)}{n!}(1-\theta)^n x^{n+1}.$$

用 Taylor 公式可以补充求极大极小的方法.

設 $n\geqslant 2$, 假定当 $x=x_0$ 时, $f(x)$ 的前 $n-1$ 次微商都等于 0，卽

$$f'(x_0)=f''(x_0)=\cdots=f^{(n-1)}(x_0)=0,$$

而 $f^{(n)}(x_0)\neq 0$. 如果 n 是奇数，則得一扭轉点；假定 n 是偶数，如果 $f^{(n)}(x_0)<0$, 則 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 取极大值，如果 $f^{(n)}(x_0)>0$, 則 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 取极小值.

証明是十分显然的. 我們有 Taylor 展开式

$$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\cdots+\frac{f^{(n-1)}(x_0)}{(n-1)!}(x-x_0)^{n-1}+$$
$$+\frac{f^{(n)}(c)}{n!}(x-x_0)^n=f(x_0)+\frac{f^{(n)}(c)}{n!}(x-x_0)^n,$$

此处 $c=x_0+\theta(x-x_0)$, $(0<\theta<1)$.

假定 n 是奇数，$(x-x_0)^n$ 在 $x=x_0$ 附近可正可負，而 $f^{(n)}(c)$ 在 $x=x_0$ 附近取定号.

假定 n 是偶数，当 x 与 x_0 充分接近时，$(x-x_0)^n$ 取正号，如果 $f^{(n)}(x_0)>0$，則常有

$$f(x)-f(x_0)>0,$$

即 $f(x_0)$ 极小. 同法証明 $f^{(n)}(x_0)<0$ 时为极大.

§4. e^x 的展开式

我們有

$$f(x)=e^x,\ f'(x)=e^x,\ f''(x)=e^x,\ \cdots,\ f^{(k)}(x)=e^x,\ \cdots.$$

所以

$$f(0)=f'(0)=f''(0)=\cdots=f^{(k)}(0)=1.$$

因此带 Lagrange 余項的公式是

$$e^x=1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\cdots+\frac{x^n}{n!}+\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}e^{\theta x},\quad 0<\theta<1.$$

无穷級数

$$1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\cdots+\frac{x^n}{n!}+\cdots$$

的公項是

$$a_n=\frac{x^n}{n!}.$$

而比率

$$\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{x}{n+1}\to 0.$$

由比例判別条件知道这級数收斂(对任一 x)，所以公項 $\frac{x^n}{n!}\to 0$. 因而得出余項(因为 $e^{\theta x}\leqslant e^{|x|}$ 与 n 无关)

$$\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}e^{\theta x}\to 0.$$

也就是对任一 x，常有

$$e^x=1+\frac{x}{1}+\frac{x^2}{2!}+\cdots+\frac{x^n}{n!}+\cdots.$$

特别当 $x=1$ 时，

$$e=1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\cdots+\frac{1}{n!}+\cdots.$$

由 e^x 的展开式立刻得到

$$\sinh x=\frac{e^x-e^{-x}}{2}=\frac{1}{2}\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-x)^n}{n!}\right)=$$

$$=\sum_{m=0}^{\infty}\frac{x^{2m+1}}{(2m+1)!}=x+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}+\cdots.$$

而

$$\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2} = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots.$$

習題 1. 由 e^x 的展开式証明

$$e^{x+y} = e^x \cdot e^y.$$

提示:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x+y)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \sum_{l=0}^{n} \frac{n!}{l!(n-l)!} x^l y^{n-l} = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{x^l}{l!} \sum_{n=l}^{\infty} \frac{y^{n-l}}{(n-l)!}.$$

§5. $\sin x$ 与 $\cos x$ 的展开式

我們有

$$f(x) = \sin x, \ f'(x) = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right), \ \cdots, \ f^{(k)}(x) = \sin\left(x + k\frac{\pi}{2}\right),$$

因此得

$$f(0) = 0, \ f'(0) = 1, \ f''(0) = 0, \ f'''(0) = -1, \cdots,$$
$$f^{(2m)}(0) = 0, \ f^{(2m+1)}(0) = (-1)^m.$$

由此得展开式

$$\sin x = \frac{x}{1!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$
$$+ \frac{x^{2n+3}}{(2n+3)!} \sin\left(\theta x + \frac{2n+3}{2}\pi\right).$$

在上节我們已經証明

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x^{2n+3}}{(2n+3)!} = 0,$$

所以得到展开式

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots + \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \cdots.$$

对任一 x, 这式子常成立.

类似地可以証明:对任一 x 常有

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \cdots + \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!} + \cdots.$$

必須注意,这公式的 x 是对弧度而言,不是对角度而言的.

Taylor 公式不但給我們近似式,而且也給我們精确度. 例如我們不仅有

$$\sin x \doteq x, \quad \sin x \doteq x - \frac{x^3}{3!}, \quad \sin x \doteq x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120},$$

而且有

$$|\sin x - x| < \frac{x^3}{6},$$

$$\left|\sin x - x + \frac{x^3}{3!}\right| < \frac{x^5}{120},$$

$$\left|\sin x - x + \frac{x^3}{6} - \frac{x^5}{120}\right| < \frac{x^7}{5040}.$$

为了使誤差小于 0.001，我們要

$$\frac{x^3}{3!} < 0.001$$

或 $x < 0.1817$. 就是当 $x < 0.1817$ (約 10°) 时，用 x 代 $\sin x$ 的誤差 < 0.001.

又由

$$\frac{x^5}{5!} < 0.001$$

或 $x < 0.6544$ (約 37°.5) 可知，用

$$x - \frac{x^3}{3!}$$

代 $\sin x$ 的誤差 < 0.001. 同法，如果 $x < 0.4129$ (約 23°.5)，誤差可 < 0.0001. 余类推.

关于 $y = \sin x$ 与它的近似多项式的图形如下：

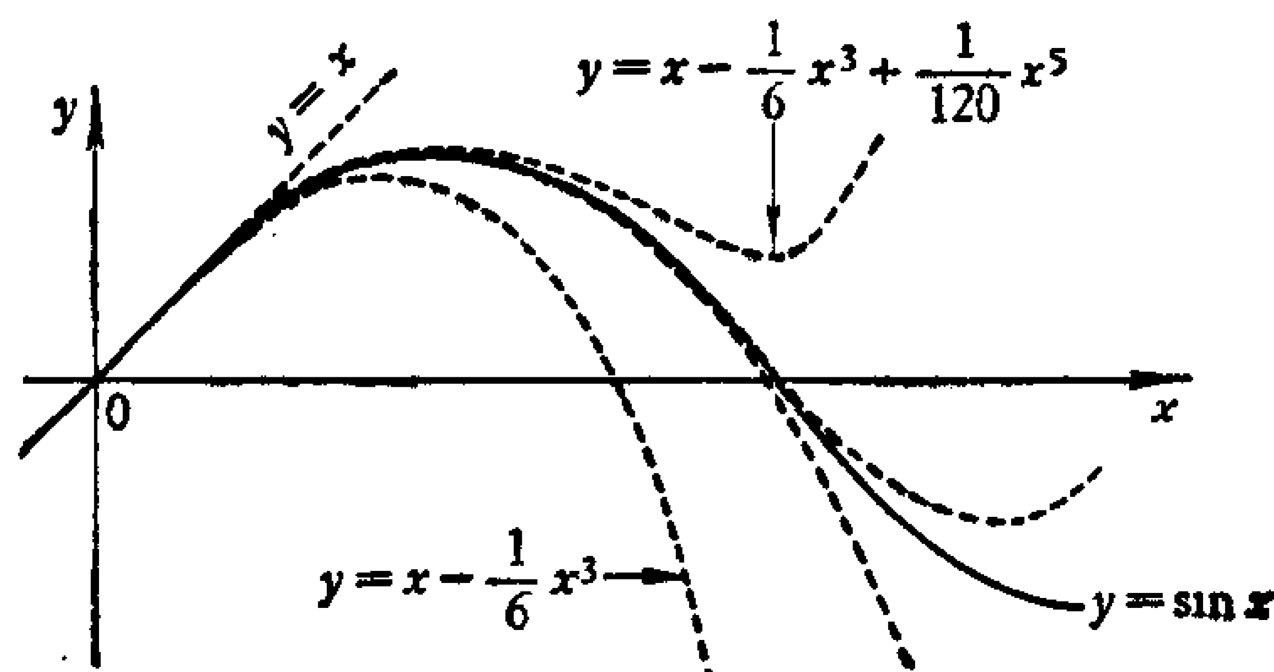


图 153

同样，当 $y = \cos x$ 时，我們不仅有

$$y \doteq 1,\ y \doteq 1 - \frac{x^2}{2},\ y \doteq 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24},$$

而且有

$$|\cos x - 1| < \frac{x^2}{2},$$

$$\left|\cos x - 1 + \frac{x^2}{2}\right| < \frac{x^2}{24},$$

$$\left|\cos x - 1 + \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{24}\right| < \frac{x^6}{720}.$$

关于 $y = \cos x$ 与它的近似多项式的图形如图 154 所示.

例 1. 設圓的半径为 r，圓心角 $2x$ 所对应的弦长为 d，弧长为 s，x 所对应的弦长为 δ，則关于弧长 s，有下面的近似値：

$$s \doteq 2\delta + \frac{2\delta - d}{3},$$

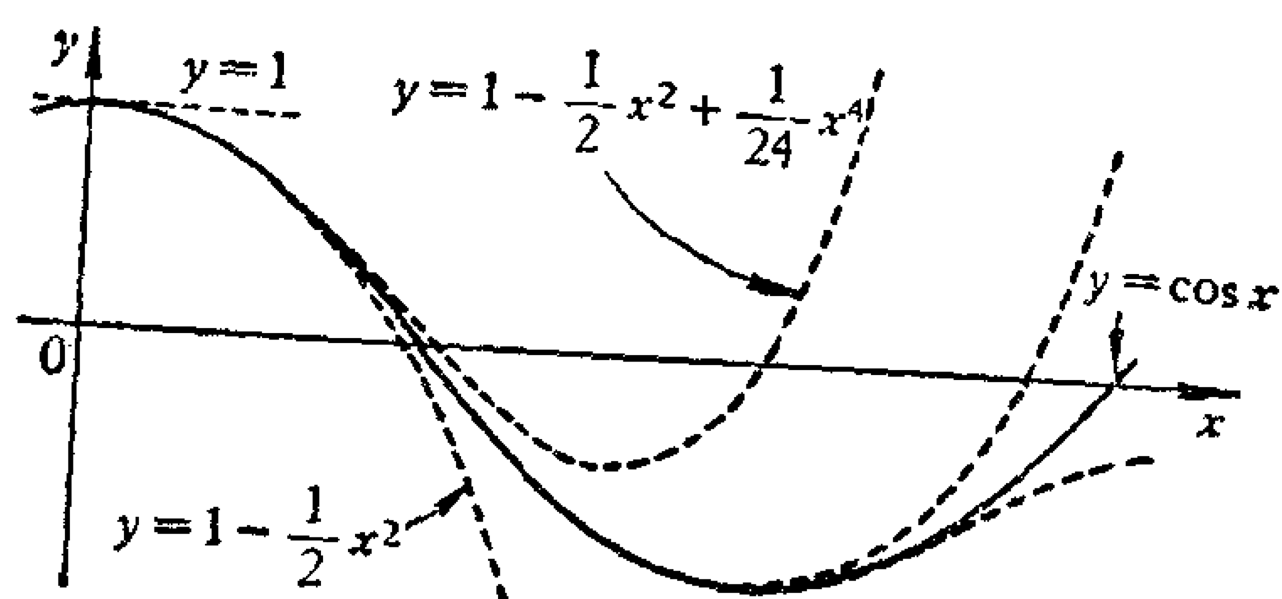


图 154

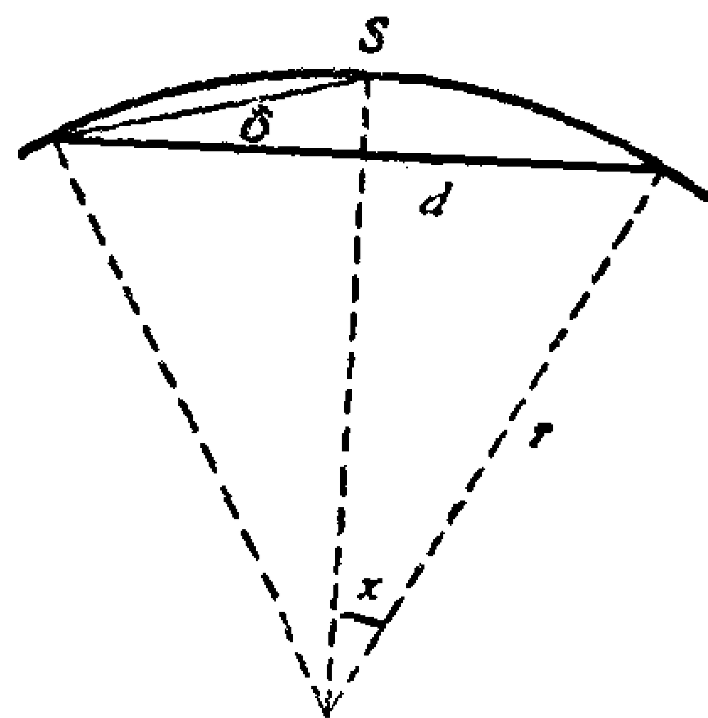


图 155

或更精确些，有

$$\left|s-2\delta-\frac{2\delta-d}{3}\right|<r\cdot\frac{x^5}{180}.$$

这一公式叫 Huygens 公式(图 155).

用待定系数法．假定

$$s\doteq Ad+B\delta,$$

然后确定系数 A 与 B.

由于

$$d=2r\cdot\sin x=2r\left(x-\frac{x^3}{6}+\frac{\theta'}{120}x^5\right)\qquad(0<\theta'<1),$$

$$\delta=2r\cdot\sin\frac{x}{2}=2r\left(\frac{1}{2}x-\frac{x^3}{48}+\frac{\theta''}{3840}x^5\right),\qquad(0<\theta''<1)$$

因此

$$Ad+B\delta=2r\left[\left(A+\frac{B}{2}\right)\cdot x-\left(\frac{1}{6}A+\frac{1}{48}B\right)x^3+\left(\frac{\theta'}{120}A+\frac{\theta''}{3840}B\right)\cdot x^5\right];$$

但另一方面

$$s=2rx.$$

比較系数可知

$$A+\frac{1}{2}B=1,$$

$$\frac{1}{6}A+\frac{1}{48}B=0.$$

故得 $A=-\frac{1}{3}$, $B=\frac{8}{3}$, 因此 s 的近似公式为

$$s\doteq 2\delta+\frac{2\delta-d}{3}.$$

而誤差为

$$\left|s-2\delta-\frac{2\delta-d}{3}\right|<2r\cdot\left(\frac{1}{120}\cdot\frac{1}{3}\right)x^5=r\cdot\frac{x^5}{180}.$$

例如取 $x=\frac{\pi}{12}$, $r=1$, 則由 Huygens 公式得出

$$s \doteq 0.523593,$$

且

$$|s-0.523593| < 0.000007.$$

例 2. 計算 $\sin 10^\circ$.

我們必須先把 10° 变为弧度

$$10^\circ = \frac{2\pi}{360}\cdot 10 = \frac{\pi}{18} = 0.17\cdots.$$

取两項,

$$\left|\sin\frac{\pi}{18}-\frac{\pi}{18}+\frac{1}{6}\left(\frac{\pi}{18}\right)^3\right| \leqslant \frac{1}{5!}\left(\frac{\pi}{18}\right)^5 < \frac{1}{120}(0.18)^5 < 0.0000016,$$

而

$$\frac{\pi}{18} \doteq 0.174533, \qquad \frac{1}{6}\left(\frac{\pi}{18}\right)^3 \doteq 0.000886,$$

即

$$\left|\sin\frac{\pi}{18} - 0.173647\right| \leqslant 0.0000016$$

$$0.1736454 < \sin\frac{\pi}{18} < 0.1736486,$$

所以 $\sin 10^\circ$ 准到五位小数的值是 0.17364.

引进虚数,得

$$\cos x = 1 + \frac{(ix)^2}{2!} + \frac{(ix)^4}{4!} + \cdots + \frac{(ix)^{2n}}{(2n)!} + \cdots,$$

$$i\sin x = (ix) + \frac{(ix)^3}{3!} + \frac{(ix)^5}{5!} + \cdots + \frac{(ix)^{2n+1}}{(2n+1)!} + \cdots.$$

并在一起就有

$$\cos x + i\sin x = 1 + (ix) + \frac{(ix)^2}{2!} + \frac{(ix)^3}{3!} + \cdots = e^{ix} \quad (\text{定义}).$$

由此得出 Euler 公式:

$$\cos x = \frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2},$$

$$\sin x = \frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i}.$$

習題 1. 由 Euler 公式証明

$$\cos(x+y) = \cos x\cos y - \sin x\sin y,$$
$$\sin(x+y) = \sin x\cos y + \sin y\cos x.$$

§ 6. 二項式展开式

假定 $x>-1$, 即 $1+x>0$, 我們現在考虑函数

$$f(x) = (1+x)^{\alpha},$$

这儿 α 是一任意实数.

$$f'(x) = \alpha(1+x)^{\alpha-1},$$
$$f''(x) = \alpha(\alpha-1)(1+x)^{\alpha-2},$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$f^{(k)}(x) = \alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-k+1)(1+x)^{\alpha-k},$$

由此得出

$$f(0)=1,\ f'(0)=\alpha,\ \cdots,\ f^{(k)}(0)=\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-k+1).$$

由 Taylor 公式得

$$(1+x)^{\alpha} = 1 + \frac{\alpha}{1!}x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!}x^3 + \cdots$$
$$+ \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-k+1)}{k!}x^k + \cdots$$
$$+ \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}x^n + r_n(x).$$

现在我們用定理 3.4 的余項形式

$$r_n(x) = \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n)}{n!}(1+\theta x)^{\alpha-n-1}(1-\theta)^n x^{n+1}.$$

先看級数

$$1 + \frac{\alpha}{1}x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-k+1)}{k!}x^k + \cdots,$$

它的一般項是

$$a_k = \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-k+1)}{k!}x^k,$$

所以,当 $k\to\infty$ 时,

$$\left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| = \left|\frac{\alpha-k}{k+1}\right||x| \to |x|.$$

故当 $-1<x<1$ 时,这級数收斂. 所以这級数的一般項

$$\frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-k+1)}{k!}x^k \to 0, \qquad (k\to\infty).$$

当 n 取任何值时,$\left(\frac{1-\theta}{1+\theta x}\right)^n$ 不大于 1. 因为在我們所考虑的情况下(即 $-1<x<1$),常有 $0<1-\theta<1+\theta x$,所以

$$0 < \frac{1-\theta}{1+\theta x} < 1.$$

因此

$$0 < \left(\frac{1-\theta}{1+\theta x}\right)^n < 1.$$

綜合起来,得

$$r_n(x)=\frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n)}{n!}x^n\cdot\left(\frac{1-\theta}{1+\theta x}\right)^n x(1+\theta x)^{\alpha-1}\to 0.$$

因此得到：当 $|x|<1$ 时，我們常有

$$(1+x)^\alpha=1+\frac{\alpha}{1}x+\frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2+\cdots+\frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}x^n+\cdots.$$

若 α 是正整数 m，这級数到 $m+1$ 項为止，它就变成普通的二項式公式。

我們提出以下的几个特殊情况：

$$\frac{1}{1-x}=1+x+x^2+x^3+\cdots+x^n+\cdots,$$

$$\frac{1}{(1-x)^2}=1+2x+3x^2+\cdots+nx^{n-1}+\cdots,$$

$$\sqrt{1+x}=1+\frac{1}{2}x-\frac{1}{2\cdot4}x^2+\frac{1\cdot3}{2\cdot4\cdot6}x^3-\frac{1\cdot3\cdot5}{2\cdot4\cdot6\cdot8}x^4+\cdots,$$

$$\frac{1}{\sqrt{1+x}}=1-\frac{1}{2}x+\frac{1\cdot3}{2\cdot4}x^2-\frac{1\cdot3\cdot5}{2\cdot4\cdot6}x^3+\frac{1\cdot3\cdot5\cdot7}{2\cdot4\cdot6\cdot8}x^4+\cdots.$$

这些公式可以用来开任何次方。例如要求 A 的 m 次方根，我們先找一整数 a，使

$$A=a^m+b\quad\text{或}\quad A=(a+1)^m-c.$$

如果 $\frac{b}{a^m}$ 或 $\frac{c}{(a+1)^m}$ 二数中有一小于 1，则我們便能根据

$$A^{\frac{1}{m}}=(a^m+b)^{\frac{1}{m}}=a\left(1+\frac{b}{a^m}\right)^{\frac{1}{m}}$$

或

$$A^{\frac{1}{m}}=[(a+1)^m-c]^{\frac{1}{m}}=(a+1)\left[1-\frac{c}{(a+1)^m}\right]^{\frac{1}{m}},$$

而用展开式算出 $A^{\frac{1}{m}}$。一般說来，$\frac{b}{a^m}$ 或 $\frac{c}{(a+1)^m}$ 愈小，級数收斂得愈快。

例 1. 計算 $(1000)^{\frac{1}{5}}$，准到 10^{-6}。

$$\sqrt[5]{1000}=\sqrt[5]{1024-24}=4\left(1-\frac{3}{128}\right)^{\frac{1}{5}}=$$

$$=4\left[1-\frac{1}{5}\cdot\frac{3}{128}-\frac{1}{5}\cdot\frac{4}{10}\left(\frac{3}{128}\right)^2-\frac{1}{5}\cdot\frac{4}{10}\cdot\frac{9}{15}\left(\frac{3}{128}\right)^3+r_3\left(\frac{3}{128}\right)\right].$$

当 $0<\theta<1$ 时，有 $0<\left(\frac{1-\theta}{1+\theta x}\right)^3<1\left(x=-\frac{3}{128}\right)$ 及

$$\left(1-\theta\frac{3}{128}\right)^{-\frac{4}{5}}<\left(1-\frac{3}{128}\right)^{-\frac{4}{5}}=\left(\frac{128}{125}\right)^{\frac{4}{5}}<\frac{128}{125}.$$

故用定理 3.4 的余項形式，得

$$4\left|r_3\left(\frac{3}{128}\right)\right|<\frac{4}{6}\cdot\frac{1}{5}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{9}{5}\cdot\frac{14}{5}\cdot\left(\frac{3}{128}\right)^4\frac{128}{125}=\frac{3^5\cdot7}{5^7\cdot2^{17}}=10^{-7}\frac{3^3\cdot63}{2^4\cdot64}<10^{-7}\frac{27}{16}$$

$$< 2 \cdot 10^{-7}.$$

又用四舍五入法得

$$\frac{1}{5} \cdot \frac{3}{128} = 0.0046875,$$

$$\frac{1}{5} \cdot \frac{4}{10}\left(\frac{3}{128}\right)^2 \doteq 0.0000439,$$

$$\frac{1}{5} \cdot \frac{4}{10} \cdot \frac{9}{15}\left(\frac{3}{128}\right)^3 \doteq 0.0000006,$$

故

$$4\left[1 - \frac{1}{5} \cdot \frac{3}{128} - \frac{1}{5} \cdot \frac{4}{10}\left(\frac{3}{128}\right)^2 - \frac{1}{5} \cdot \frac{4}{10} \cdot \frac{9}{15}\left(\frac{3}{128}\right)^3\right] \doteq 3.9810720.$$

括弧中三、四两項的誤差各不超过 $(0.5) \cdot 10^{-7}$,故上式的誤差不超过 $4 \cdot 2 \cdot (0.5) \cdot 10^{-7} = 4 \cdot 10^{-7}$. 因而

$$|\sqrt[5]{1000} - 3.981072| < 2 \cdot 10^{-7} + 4 \cdot 10^{-7} < 10^{-6}.$$

§7. log (1+x) 的展开式

命

$$f(x) = \log(1 + x),$$

我們有

$$f'(x) = \frac{1}{1+x}, \quad f''(x) = -\frac{1}{(1+x)^2}, \quad f'''(x) = \frac{2!}{(1+x)^3}, \cdots,$$

$$f^{(k)}(x) = \frac{(-1)^{k-1}(k-1)!}{(1+x)^k}, \cdots$$

因而得出

$$f(0) = 0, f'(0) = 1, f''(0) = -1, f'''(0) = 2!, \cdots,$$

$$f^{(k)}(0) = (-1)^{k-1}(k-1)!, \cdots$$

及

$$\log(1 + x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \cdots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + r_n(x).$$

这級数也是当 $|x| < 1$ 时收斂. 我們还是用定理 3.4 的余項形式

$$r_n(x) = \frac{(-1)^n(1-\theta)^n}{(1+x\theta)^{n+1}} x^{n+1}.$$

和上节一样地可証,当 $n \to \infty$ 时,

$$r_n(x) \to 0.$$

因此得出:如果 $-1 < x < 1$, 則

$$\log(1 + x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \cdots \frac{(-1)^{n-1}x^n}{n} + \cdots.$$

我們也能証明当 $x = 1$ 时有公式

$$\log 2 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \cdots$$

(考慮 Lagrange 的余項可能簡单些).

如果用这公式来計算$\log 2$，基本上是无能为力的．例如，我們要准到 0.0001，就必須取 10000 項.

在一般計算时，我們用以下的方法：

$$\log(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\cdots.$$

用 $-x$ 代替 x 得

$$\log(1-x)=-x-\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3}-\cdots.$$

二式相減得

$$\log\frac{1+x}{1-x}=2\left(x+\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}+\cdots\right)\qquad |x|<1.$$

以 $x=\frac{1}{31},\frac{1}{49},\frac{1}{161}$ 相継代入，則得

$$\log 16-\log 15=2\left[\frac{1}{31}+\frac{1}{3\cdot 31^3}+\cdots\right]=2P,$$

$$\log 25-\log 24=2\left[\frac{1}{49}+\frac{1}{3\cdot 49^3}+\cdots\right]=2Q,$$

$$\log 81-\log 80=2\left[\frac{1}{161}+\frac{1}{3\cdot 161^3}+\cdots\right]=2R.$$

即

$$\begin{aligned}4\log 2-\log 3-\log 5&=2P,\\ -3\log 2-\log 3+2\log 5&=2Q,\\ -4\log 2+4\log 3-\log 5&=2R.\end{aligned}$$

由此解出

$$\begin{aligned}\log 2&=14P+10Q+6R,\\ \log 3&=22P+16Q+10R,\\ \log 5&=32P+24Q+14R.\end{aligned}$$

在此 P, Q、R 都收斂得很快，故用这些式子計算$\log 2$，$\log 3$ 与$\log 5$ 是很方便的．例如要計算$\log 2$，准到 10^{-5}．由于

$$P-\frac{1}{31}-\frac{1}{3\cdot 31^3}<10^{-8},$$

$$Q-\frac{1}{49}-\frac{1}{3\cdot 49^3}<10^{-8},$$

$$R-\frac{1}{161}<10^{-7},$$

而用四舍五入法得

$$\frac{1}{31}+\frac{1}{3\cdot 31^3}=\frac{2884}{89373}=0.0322693,$$

$$\frac{1}{49}+\frac{1}{3\cdot 49^3}=\frac{7204}{352947}=0.0204110,$$

$$\frac{1}{161}=0.006211.$$

用这三数分别代替 P, Q, R，誤差分別不超过 $6\cdot 10^{-8}, 6\cdot 10^{-8}, 6\cdot 10^{-7}$.

$$14\times 0.0322693+10\times 0.0204110+6\times 0.006211=0.6931462,$$

因此

$$|\log 2-0.69315|<4\times 10^{-6}+84\times 10^{-8}+60\times 10^{-8}+$$
$$+36\times 10^{-7}<9.6\times 10^{-6}<10^{-5}.$$

同样可以求出 $\log 3$, $\log 5$ 的近似值.

習題. 若

$$\log_{10}\frac{1025}{1024}=a,\ \log_{10}\frac{1024^2}{1023\cdot 1025}=b,\ \log_{10}\frac{81^2}{80\cdot 82}=c,$$

$$\log_{10}\frac{125^2}{124\cdot 126}=d,\ \log_{10}\frac{99^2}{98\cdot 100}=e,$$

則

$$196\log_{10}2=59+5a+8b-3c-8d+4e.$$

并試用 a, b, c, d, e 表示 $\log_{10}3$ 及 $\log_{10}41$，再用此法以求 $\log_{10}2$ 至小数第 10 位，以說明此法在实际上有用处(已知 $\log_e 10=2.302580930$).

§ 8. arc tg x 的展开式

命

$$f(x)=\operatorname{arc\,tg} x,$$

在第五章 § 11 中已經証明

$$f^{(n)}(x)=(n-1)!\cos^n(\operatorname{arc\,tg} x)\cdot\sin n\left(\operatorname{arc\,tg} x+\frac{\pi}{2}\right),$$

所以

$$f^{(2m+1)}(0)=(-1)^m(2m)!,\qquad f^{(2m+2)}(0)=0.$$

因此得出

$$\operatorname{arc\,tg} x=x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}-\cdots+r_n(x),$$

这儿的 $r_n(x)$ 依定理 3.3 的形式为

$$r_n(x)=\frac{1}{n+1}\cos^{n+1}(\operatorname{arc\,tg}\theta x)\cdot\sin(n+1)\left(\operatorname{arc\,tg}\theta x+\frac{\pi}{2}\right)\cdot x^{n+1}\ (0<\theta<1).$$

故当 $|x|\leqslant 1$ 时，

$$|r_n(x)|\leqslant\frac{1}{n+1}\to 0.$$

所以当 $|x|\leqslant 1$ 时，

$$\operatorname{arc\,tg} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \cdots + \frac{(-1)^n x^{2n-1}}{2n-1} + \cdots. \tag{1}$$

特别当 $x=1$ 时,有

$$\frac{\pi}{4} = \operatorname{arc\,tg} 1 = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \cdots.$$

这个式子收斂得很慢，用它来計算 π 很不方便. 例如，我們要精密到 10^{-5}, 就需要計算 50,000 項.

x 愈小,(1)收斂得愈快. 置

$$x = \frac{1}{5}, \qquad \varphi = \operatorname{arc\,tg} \frac{1}{5}$$

$$\operatorname{tg} 2\varphi = \frac{\frac{2}{5}}{1-\frac{1}{25}} = \frac{5}{12}, \quad \operatorname{tg} 4\varphi = \frac{\frac{5}{6}}{1-\frac{25}{144}} = \frac{120}{119}.$$

因为 $\operatorname{tg} 4\varphi$ 与 1 相差很小,所以 4φ 与 $\frac{\pi}{4}$ 相差很小. 命

$$\psi = 4\varphi - \frac{\pi}{4},$$

則

$$\operatorname{tg}\psi = \operatorname{tg}\left(4\varphi - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\operatorname{tg} 4\varphi - \operatorname{tg}\frac{\pi}{4}}{1 + \operatorname{tg} 4\varphi \operatorname{tg}\frac{\pi}{4}} = \frac{\frac{120}{119} - 1}{1 + \frac{120}{119}} = \frac{1}{239}.$$

因此

$$\frac{\pi}{4} = 4\varphi - \psi = 4 \operatorname{arc\,tg} \frac{1}{5} - \operatorname{arc\,tg} \frac{1}{239} =$$

$$= 4\left[\frac{1}{5} - \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{5^3} + \frac{1}{5}\cdot\frac{1}{5^5} - \frac{1}{7}\cdot\frac{1}{5^7} + r_7\left(\frac{1}{5}\right)\right] - \left[\frac{1}{239} + r_1\left(\frac{1}{239}\right)\right].$$

由于交錯級数对誤差的估計(定理 4.4.1),得

$$\left|4r_7\left(\frac{1}{5}\right) - r_1\left(\frac{1}{239}\right)\right| < \frac{4}{9\cdot 5^9} + \frac{1}{3\cdot 239^3} < 0.5\cdot 10^{-6}.$$

用四舍五入法,对其他各項計算如下:

$\frac{1}{5} \doteq 0.2000000$	$\frac{1}{3.5^3} \doteq 0.0026667$
$\frac{1}{5\cdot 5^5} \doteq 0.0000640$	$\frac{1}{7.5^7} \doteq 0.0000018$
$+0.2000640$	-0.0026685

又

$$\frac{1}{239} \doteq 0.0041841,$$

于是

$$\pi \doteq 4\{4[0.2000640 - 0.0026685] - 0.0041841\} = 3.1415916.$$

因此

$$\pi \doteq 3.14159,$$

而誤差为

$$|\pi - 3.14159| < 4\times 0.5\times 10^{-6} + 4\times 4\times 2\times 0.5\times 10^{-7} + 4\times 0.5\times 10^{-7} + 1.6\times 10^{-6} < 5.4\times 10^{-6} < 10^{-5}.$$

習題 1. 試証：当 $|x| < 1$ 时

$$\arcsin x = \frac{x}{1} + \frac{1}{2}\frac{x^3}{3} + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\frac{x^5}{5} + \cdots + \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdots 2n}\frac{x^{2n+1}}{2n+1} + \cdots.$$

習題 2. 試証

$$\operatorname{ar\,sinh} x = x - \frac{1}{2\cdot 3}x^3 + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4\cdot 5}x^5 - \cdots.$$

$$\operatorname{ar\,tgh} x = x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \cdots.$$

§9. 冪級数，收斂半径

从以上一些例子可以归納出一个重要对象——冪級数：

$$a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n + \cdots.$$

現在扩大一下我們的研究范围，假定冪級数的系数是复数，变数 x 也是复虚数，改写为 z.

定理 1 (Abel). 如果冪級数

$$a_0 + a_1z + a_2z^2 + \cdots + a_nz^n + \cdots \tag{1}$$

在复数平面上一点 ξ 收斂，則当 z 取适合于不等式

$$|z| < |\xi| \tag{2}$$

的任何值时，(1)絕对收斂. 反之，如果(1)在点 ξ 处发散，則当 z 取适合于不等式

$$|z| > |\xi| \tag{3}$$

的任何值时，(1)发散.

証. 如果

$$a_0 + a_1\xi + a_2\xi^2 + \cdots + a_n\xi^n + \cdots \tag{4}$$

收斂，則

$$\lim_{n\to\infty} a_n\xi^n = 0.$$

故有一M存在，使

$$|a_n||\xi|^n < M.$$

如果 z 适合于(2),命

$$q=\left|\frac{z}{\xi}\right|<1,$$

則得

$$|a_nz^n|<M\left|\frac{z}{\xi}\right|^n=Mq^n.$$

由于 $\sum q^n$ 收斂,因而得出定理的第一部分.

第二部分十分明显. 因为如果有适合于(3)的 z 使(1)收斂,則由定理的第一部分,級数(4)一定收斂. 这和假定违背.

定义. 如果数 $R(\geqslant 0)$ 适合以下的性質,称它为冪級数(1)的收斂半径:

1) 当 $|z|<R$ 时,(1)絕对收斂;

2) 当 $|z|>R$ 时,(1)发散.

有时可能 $R=0$, 就是說除 $z=0$ 外,无处收斂. 有时可能 $R=\infty$, 就是說在全平面上处处收斂.

例 1. 設 α 非正整数,冪級数

$$(1+x)^\alpha=1+\alpha x+\frac{\alpha(\alpha-1)}{2}x^2+\cdots$$

的收斂半径是 1.

例 2. 冪級数

$$e^x=1+x+\frac{x^2}{2!}+\cdots$$

的收斂半径是 ∞.

例 3. 冪級数

$$x+2!x^2+3!x^3+\cdots+n!x^n+\cdots$$

的收斂半径等于 0.

定理 2. 收斂半径

$$R=\varliminf_{n\to\infty}|a_n|^{-\frac{1}{n}}.$$

証. 先假定 $0<R<\infty$.

1) 由 R 的定义可知,对于任意給定的 $\varepsilon>0$, 必有 N, 使当 $n>N$ 时,

$$|a_n|^{-\frac{1}{n}}>R-\varepsilon,$$

也即

$$|a_n|<\frac{1}{(R-\varepsilon)^n}.$$

所以一定存在正常数 M, 使对一切 n, 都有

$$|a_n|<\frac{M}{(R-\varepsilon)^n}.$$

故若 $|z|<R$，則可取 ε 使 $\left|\frac{z}{R-\varepsilon}\right|<1$，于是

$$\sum_{n=0}^{\infty}|a_n|\cdot|z|^n<M\sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{z}{R-\varepsilon}\right|^n$$

收斂，所以 $\sum_{n=0}^{\infty}a_nz^n$ 絕对收斂.

2）仍由 R 的定义，对于任意給定的正数 $\varepsilon>0$，必有无穷多个 n_ν 使

$$|a_{n_\nu}|^{-1/n_\nu}<R+\varepsilon.$$

也即

$$|a_{n_\nu}|>\frac{1}{(R+\varepsilon)^{n_\nu}}.$$

如果 $|z|>R$，則可取 ε 使 $\left|\frac{z}{R+\varepsilon}\right|>1$，于是 $a_{n_\nu}z^{n_\nu}$ 不趋于 0，因此 $\sum_{n=0}^{\infty}a_nz^n$ 并不收斂，得所欲証.

关于 $R=0$ 及 ∞ 的情形，讀者自証之.

§10. 冪級数的四則运算

定理 1. 如果在 $|z|<R$ 中

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nz^n,\quad g(z)=\sum_{n=0}^{\infty}b_nz^n$$

收斂，則

$$f(z)\pm g(z)=\sum_{n=0}^{\infty}(a_n\pm b_n)z^n$$

也在 $|z|<R$ 中收斂.

証. 因为两个收斂級数的和与差仍然收斂，所以定理成立.

定理 2. 仍如定理 1 的假定，級数

$$\sum_{n=0}^{\infty}c_nz^n,\quad c_n=\sum_{l=0}^{n}a_lb_{n-l}$$

在 $|z|<R$ 中也收斂.

証. 因为 $f(z)$，$g(z)$ 在 $|z|<R$ 中收斂，故由上节定理 2，一定有

$$R\leqslant\varliminf_{n\to\infty}|a_n|^{-1/n},\quad R\leqslant\varliminf_{n\to\infty}|b_n|^{-1/n};$$

而与上节定理 2 同样地可以推出：存在正常数 M 及 M_1，使

$$|a_n|<\frac{M}{(R-\varepsilon)^n},\qquad |b_n|<\frac{M_1}{(R-\varepsilon)^n}$$

对一切 n 都成立. 于是

$$|c_n|\leqslant\sum_{l=0}^{n}\frac{MM_1}{(R-\varepsilon)^l(R-\varepsilon)^{n-l}}\leqslant$$

$$\leqslant \frac{(n+1)MM_1}{(R-\varepsilon)^n} \leqslant \frac{MM_1}{\left(\frac{R-\varepsilon}{(n+1)^{\frac{1}{n}}}\right)^n}.$$

由于$\lim\limits_{n\to\infty}(n+1)^{\frac{1}{n}}=1$，故得定理。

至于两冪級数的商，問題不太簡单．它的收斂半径依賴于分母的零点而决定．但若分母的常数項不等于0，我們可以得一冪級数，它有收斂半径，但現在还不能說明收斂半径究竟多大，这里只介紹一下求冪級数商的方法。

例1．試将$\sec z$展成冪級数。

已知

$$\cos z = 1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \frac{z^6}{6!} + \cdots,$$

于是

$$\sec z = \frac{1}{\cos z} = \left(1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \frac{z^6}{6!} + \cdots\right)^{-1} =$$

$$= 1 + \left(\frac{z^2}{2!} - \frac{z^4}{4!} + \frac{z^6}{6!} - \cdots\right) +$$

$$+ \left(\frac{z^2}{2!} - \frac{z^4}{4!} + \frac{z^6}{6!} - \cdots\right)^2 + \left(\frac{z^2}{2!} - \frac{z^4}{4!} + \frac{z^6}{6!} - \cdots\right)^3 + \cdots$$

$$= 1 + \frac{z^2}{2!} + \frac{5}{24}z^4 + \cdots.$$

以后将說明这級数的收斂半径是$\frac{\pi}{2}$。

例2．試将$\operatorname{tg} z$展成冪級数。

$$\operatorname{tg} z = \sin z \cdot \sec z = \left(z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \cdots\right)\left(1 + \frac{z^2}{2!} + \frac{5}{24}z^4 + \cdots\right) =$$

$$= z + \frac{1}{3}z^3 + \frac{2}{15}z^5 + \cdots.$$

例3．展开$\csc z - \frac{1}{z}$为冪級数。

因为

$$z\csc z - 1 = \frac{z}{\sin z} - 1 = z\left(z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \cdots\right)^{-1} - 1 =$$

$$= \left(1 - \frac{z^2}{3!} + \frac{z^4}{5!} - \cdots\right)^{-1} - 1 = \left(\frac{z^2}{3!} - \frac{z^4}{5!} + \cdots\right) +$$

$$+ \left(\frac{z^2}{3!} - \frac{z^4}{5!} + \cdots\right)^2 + \cdots = \frac{1}{6}z^2 + \frac{7}{360}z^4 + \cdots,$$

所以得到

$$\csc z - \frac{1}{z} = \frac{1}{6}z + \frac{7}{360}z^3 + \cdots.$$

关于怎样写出这些級数的一般項，现在还不能叙述，待引进 Bernoulli 及 Euler 数之后，才能說明。

§ 11. 冪級数的微分与积分

从收斂半径为 R 的冪級数

$$a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \cdots + a_n z^n + \cdots,$$

我們可以得到两个冪級数

$$C + a_0 z + \frac{a_1}{2} z^2 + \cdots + \frac{a_n}{n+1} z^{n+1} + \cdots$$

及

$$a_1 + 2a_2 z + \cdots + n a_n z^{n-1} + \cdots.$$

先証明这两个冪級数的收斂半径都是 R. 由

$$\lim_{n\to\infty} n^{\frac{1}{n}} = 1,$$

可知

$$\varlimsup_{n\to\infty} |a_n|^{-\frac{1}{n}} = \varlimsup_{n\to\infty} |n a_n|^{-\frac{1}{n-1}} = \varlimsup_{n\to\infty} \left|\frac{a_n}{n+1}\right|^{-\frac{1}{n+1}}.$$

这就是我們所要求的結果.

命

$$f(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \cdots \qquad (|z| < R),$$

我們現在証明

$$f'(z) = a_1 + 2a_2 z + \cdots \qquad (|z| < R).$$

証. 对于固定的 $|z| < R$, 找出 ρ, 使 $|z| < \rho < R$. 数 $a_n \rho^n$ 有界，即存在常数 K，使 $|a_n \rho^n| < K(n = 0, 1, 2, \cdots)$. 对于 $\varepsilon > 0$，存在 $0 < \delta < \rho - |z|$，当 $|h| < \delta$ 时，

$$\frac{K\rho|h|}{(\rho - |z| - \delta)(\rho - |z|)^2} < \varepsilon.$$

于是

$$\left|\frac{f(z+h) - f(z)}{h} - \sum_{n=1}^{\infty} n a_n z^{n-1}\right| = \left|\sum_{n=0}^{\infty} a_n \left\{\frac{(z+h)^n - z^n}{h} - n z^{n-1}\right\}\right| \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{n=0}^{\infty} |a_n| \left|\frac{(z+h)^n - z^n}{h} - n z^{n-1}\right| \leqslant K \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\rho^n} \left|\binom{n}{2} z^{n-2} h + \cdots + h^{n-1}\right| \leqslant$$

$$\leqslant K \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\rho^n} \left\{\binom{n}{2} |z|^{n-2} |h| + \cdots + |h|^{n-1}\right\} =$$

$$= K \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\rho^n} \left\{\frac{(|z| + |h|)^n - |z|^n}{|h|} - n|z|^{n-1}\right\} =$$

$$= K \left\{\frac{1}{|h|}\left(\frac{\rho}{\rho - |z| - |h|} - \frac{\rho}{\rho - |z|}\right) - \frac{\rho}{(\rho - |z|)^2}\right\} =$$

$$\leqslant \frac{K\rho|h|}{(\rho - |z| - \delta)(\rho - |z|)^2} < \varepsilon, \qquad (|h| < \delta),$$

因此

$$f'(z)=\sum_{n=1}^{\infty} na_n z^{n-1}.$$

由于 $|z|<R$ 是任意的,故得所欲証.

由于 $f'(z)$ 的收斂半径仍为 R, 故可継續逐項求微商,而得

$$f^{(\nu)}(z)=\sum_{n=\nu}^{\infty} n(n-1)\cdots(n-\nu+1)a_n z^{n-\nu}, \quad (\nu=1, 2, \cdots).$$

它們的收斂半径都是 R. 特别有 $f^{(\nu)}(0)=\nu! a_\nu$. 又命

$$F(z)=C+a_0 z+\frac{a_1}{2}z^2+\cdots+\frac{a_n}{n+1}z^{n+1}+\cdots,$$

則 $F(z)$ 是 $f(z)=\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ 的原函数. 故

$$F(z)=\int f(z)dz.$$

§ 12. 冪級数的唯一性定理及反函数

定理 1. 若当 $|z|<R$ 时,收斂級数

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n=0,$$

則

$$a_0=a_1=a_2=\cdots=a_n=\cdots=0.$$

証. 若定理不成立,即存在 $a_k\neq 0$ 而 $a_0=a_1=\cdots=a_{k-1}=0$, 則 $f(z)$ 可以写为

$$f(z)=\sum_{n=k}^{\infty} a_n z^n.$$

若 $0<\rho<R$, 由于 $\sum\limits_{n=k}^{\infty}|a_n|\rho^n$ 收斂,故 $|a_n|\rho^n<K(n=k, k+1,\cdots)$. 因此当 $|z|<\rho$ 时

$$\begin{aligned}|f(z)| &\geqslant |z|^k(|a_k|-|a_{k+1}||z|-\cdots)\geqslant \\ &\geqslant |z|^k\left(|a_k|-\frac{K|z|}{\rho^{k+1}}-\frac{K|z|^2}{\rho^{k+2}}-\cdots\right)=|z|^k\left(|a_k|-\frac{K|z|}{\rho^k(\rho-|z|)}\right).\end{aligned}$$

由于 $|a_k|>0$, 故可取 $|z|$ 足够小,使

$$|z|>0, \qquad |a_k|-\frac{K|z|}{\rho^k(\rho-|z|)}>0.$$

因此

$$|f(z)|>0.$$

此与假定矛盾,故得定理.

从冪級数

$$y=a_1x+a_2x^2+a_3x^3+\cdots, \tag{1}$$

我們可以反轉过来得出冪級数

$$x = b_1 y + b_2 y^2 + b_3 y^3 + \cdots, \tag{2}$$

用比較系数法可以逐步确定 $b_1, b_2, b_3, \cdots$.

将(2)代入(1)得

$$a_1(b_1 y + b_2 y^2 + \cdots) + a_2(b_1 y + b_2 y^2 + \cdots)^2 + a_3(b_1 y + b_2 y^2 + \cdots)^3 + \\ + \cdots - y = 0,$$

故由定理1得

$$\begin{aligned} & a_1 b_1 - 1 = 0, \\ & a_1 b_2 + a_2 b_1^2 = 0, \\ & a_1 b_3 + 2a_2 b_1 b_2 + a_3 b_1^3 = 0, \\ & \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots. \end{aligned}$$

因此

$$b_1 = \frac{1}{a_1}, \quad b_2 = -\frac{a_2}{a_1^3}, \quad b_3 = \frac{2a_2^2}{a_1^5} - \frac{a_3}{a_1^4}, \cdots.$$

关于冪級数(2)的收斂半徑問題,牵涉較多,在此不作討論了。

例 1.

$$y = \frac{x}{1-x} = x + x^2 + x^3 + \cdots,$$

則得

$$x = y - y^2 + y^3 - \cdots.$$

例 2.

$$y = \log(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \cdots,$$

則得

$$x = y + \frac{y^2}{2} + \frac{y^3}{6} + \cdots.$$

例 3.

$$y = \sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots,$$

則得

$$x = y + \frac{y^3}{6} + \cdots.$$

§13. Kummer 判别法, Gauss 判别法

定理 1 (Kummer). 設有正項級数

$$u_1 + u_2 + \cdots u_n + \cdots, \tag{1}$$

若有正項貫 $a_1, a_2, \cdots$, 且存在 α 及 N, 使当 $n > N$ 时,

$$a_n \frac{u_n}{u_{n+1}} - a_{n+1} \geqslant \alpha > 0, \tag{2}$$

則(1)收斂;若 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{a_n}$ 发散,且当 $n > N$ 时

$$a_n \frac{u_n}{u_{n+1}} - a_{n+1} < 0, \tag{3}$$

则(1)发散.

証. 若(2)成立,则当 $n = N+1, N+2, \cdots, M$时,有

$$a_{N+1}u_{N+1} - a_{N+2}u_{N+2} \geqslant \alpha u_{N+2},$$
$$a_{N+2}u_{N+2} - a_{N+3}u_{N+3} \geqslant \alpha u_{N+3},$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$a_M u_M - a_{M+1}u_{M+1} \geqslant \alpha u_{M+1}.$$

总加之,得

$$\alpha(u_{N+2} + \cdots + u_{M+1}) \leqslant a_{N+1}u_{N+1} - a_{M+1}u_{M+1} < a_{N+1}u_{N+1}$$

将 $M \to \infty$, 则得

$$\sum_{n=N+2}^{\infty} u_n < \frac{a_{N+1}u_{N+1}}{\alpha},$$

故由定理 4.3.2 可知級数(1)收斂.

若(3)成立,则当 $n = N+1, \cdots, M$时

$$\frac{u_{N+2}}{u_{N+1}} > \frac{\dfrac{1}{a_{N+2}}}{\dfrac{1}{a_{N+1}}}, \quad \frac{u_{N+3}}{u_{N+2}} > \frac{\dfrac{1}{a_{N+3}}}{\dfrac{1}{a_{N+2}}}, \quad \cdots, \quad \frac{u_{M+1}}{u_M} > \frac{\dfrac{1}{a_{M+1}}}{\dfrac{1}{a_M}}.$$

各不等式相乘得

$$u_{M+1} > a_{N+1}u_{N+1}\frac{1}{a_{M+1}} \qquad (M = N+2, N+3\cdots),$$

故由定理 4.3. 4′可知級数(1)发散.

定理 2 (Gauss). 对于級数

$$u_1 + u_2 + \cdots + u_n + \cdots, \tag{1}$$

若

$$\left|\frac{u_n}{u_{n+1}}\right| = 1 + \frac{\mu}{n} + \frac{\omega_n}{n^p},$$

此处 $p > 1$ 而 $|\omega_n| < A$. 当 $\mu > 1$ 时,(1)絕对收斂;当(1)是正項級数,则 $\mu \leqslant 1$ 时,級数发散;当(1)是任意項級数,则 $\mu \leqslant 0$ 时,級数发散.

証. 取 $a_n = n$, 则

$$\lim_{n\to\infty}\left\{a_n\left|\frac{u_n}{u_{n+1}}\right| - a_{n+1}\right\} = \lim_{n\to\infty}\left\{n\left(1 + \frac{\mu}{n} + \frac{\omega_n}{n^p}\right) - n - 1\right\} = \mu - 1. \tag{4}$$

当 $\mu > 1$ 时,可知存在 α 及 N, 使当 $n > N$ 时,

$$a_n\left|\frac{u_n}{u_{n+1}}\right| - a_{n+1} \geqslant \alpha > 0.$$

故由定理 1 可知(1)絕对收斂.

当 $\mu < 0$ 时,由

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\omega_n}{\mu n^{p-1}}=0,$$

可知存在 N_1，当 $n>N_1$ 时

$$\left|\frac{u_n}{u_{n+1}}\right|=1+\frac{\mu}{n}\left(1+\frac{\omega_n}{\mu n^{p-1}}\right)<1,$$

也即 $|u_{n+1}|>|u_n|$. 故当 $n\to\infty$ 时，u_n 不趋于 0. 故級数(1)发散.

当 $\mu=0$ 时，因为

$$\left|\frac{u_n}{u_{n+1}}\right|\leqslant 1+\frac{|\omega_n|}{n^p}\leqslant 1+\frac{A}{n^p},$$

所以

$$\left|\frac{u_1}{u_n}\right|=\left|\frac{u_1}{u_2}\right|\cdot\left|\frac{u_2}{u_3}\right|\cdots\left|\frac{u_{n-1}}{u_n}\right|\leqslant\left(1+\frac{A}{1^p}\right)\left(1+\frac{A}{2^p}\right)\cdots\left(1+\frac{A}{(n-1)^p}\right)=$$

$$=e^{\sum\limits_{\nu=1}^{n-1}\log\left(1+\frac{A}{\nu^p}\right)}<e^{\sum\limits_{\nu=1}^{n-1}\frac{A}{\nu^p}}<e^{A\sum\limits_{\nu=1}^{\infty}\frac{1}{\nu^p}}<K,$$

故当 $n\to\infty$ 时，u_n 不趋于零，所以(1)发散.

当 $\mu<1$ 而 $u_n>0(n=1,2,\cdots)$ 时，由(4)可知存在 N_2，使当 $n>N_2$ 时，

$$a_n\frac{u_n}{u_{n+1}}-a_{n+1}<0.$$

故由定理 1 及調和級数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ 发散(見 § 4.3)，可知(1)发散.

最后，当 $\mu=1$ 而 $u_n>0(n=1,2,\cdots)$时，取 $a_n=n\log n$，则

$$a_n\frac{u_n}{u_{n+1}}-a_{n+1}=n\left(1+\frac{1}{n}+\frac{\omega_n}{n^p}\right)\log n-(n+1)\log(n+1)=$$

$$=\frac{\omega_n}{n^{p-1}}\log n+(n+1)\log\left(1-\frac{1}{n+1}\right).$$

由

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\omega_n}{n^{p-1}}\log n=0,\quad \lim_{n\to\infty}(n+1)\log\left(1-\frac{1}{n+1}\right)=-1,$$

可知存在 N_3，当 $n>N_3$ 时，

$$a_n\frac{u_n}{u_{n+1}}-a_{n+1}<0.$$

故由定理 1 及 $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\log n}$ 发散，可知級数(1)发散.

§ 14. 超越几何級数

定义. 假定 α,β,γ 是实数，但 γ 不是負整数或 0，則級数

$$F(\alpha,\beta,\gamma;z)=1+\frac{\alpha\beta}{1!\gamma}z+\frac{\alpha(\alpha+1)\beta(\beta+1)}{2!\gamma(\gamma+1)}z^2+$$

$$+\cdots+\frac{\alpha(\alpha+1)\cdots(\alpha+n-1)\beta(\beta+1)\cdots(\beta+n-1)}{n!\gamma(\gamma+1)\cdots(\gamma+n-1)}z^n+\cdots$$

$$=1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\alpha(\alpha+1)\cdots(\alpha+n-1)\beta(\beta+1)\cdots(\beta+n-1)}{n!\gamma(\gamma+1)\cdots(\gamma+n-1)}z^n$$

称为超越几何級数或 Gauss 級数.

当 $\alpha=\beta=\gamma=1$ 时,即为几何級数. 显然有

$$F(\alpha,\beta,\beta;z)=(1-z)^{-\alpha},$$

$$2F\left(-\frac{1}{2}n,\ -\frac{1}{2}n+\frac{1}{2},\ \frac{1}{2};\ z^2\right)=(1+z)^n+(1-z)^n,$$

$$zF(1,1,2;-z)=\log(1+z),$$

$$2zF\left(\frac{1}{2},\ 1,\ \frac{3}{2};\ z^2\right)=\log\frac{1+z}{1-z}.$$

又可証明

$$\lim_{\beta\to\infty}F\left(1,\beta,1;\ \frac{z}{\beta}\right)=e^z,$$

$$\lim_{\alpha\to\infty}F\left(\alpha,\alpha,\frac{1}{2};\ \frac{z^2}{4\alpha^2}\right)=\cosh z.$$

習題 1. 試証

$$F\left(\frac{1}{2}n,\ -\frac{1}{2}n,\ \frac{1}{2};\ \sin^2 x\right)=\cos nx.$$

習題 2. 試証

$$tF\left(1,\ \frac{1}{2},\ \frac{3}{2};\ -t^2\right)=\operatorname{arc\,tg} t.$$

定理 1. 当 $|z|<1$ 时,級数絕对收斂; 当 $|z|>1$ 时,級数发散.

証. 把 $F(\alpha,\beta,\gamma;z)$ 的第 $n+1$ 項記作 u_n, 則

$$\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right|=\left|\frac{(\alpha+n)(\beta+n)}{(n+1)(\gamma+n)}\right|\cdot|z|.$$

当 $n\to\infty$ 时, $|u_{n+1}/u_n|\to|z|$. 由定理 4.3.6 及 4.3.6′ 可知定理正确.

但在单位圓周上如何? 我們不作一般討論,仅就 $z=1$ 及 $z=-1$ 二点研究它們的收斂发散情况如下:

定理 2. 超越几何級数 $F(\alpha,\beta,\gamma;1)$ 当 $\gamma-\alpha-\beta>0$ 时絕对收斂; 当 $\gamma-\alpha-\beta\leqslant 0$ 时发散.

証. 当 $n>|\alpha|$, $n>|\beta|$ 时,

$$\frac{u_n}{u_{n+1}}=\frac{(n+1)(\gamma+n)}{(\alpha+n)(\beta+n)}=\frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(1+\frac{\gamma}{n}\right)}{\left(1+\frac{\alpha}{n}\right)\left(1+\frac{\beta}{n}\right)}=$$

$$=\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(1+\frac{\gamma}{n}\right)\left(1-\frac{\alpha}{n}+\frac{\alpha^2}{n^2}-\frac{\alpha^3}{n^3}+\cdots\right)\left(1-\frac{\beta}{n}+\frac{\beta^2}{n^2}-\frac{\beta^3}{n^3}+\cdots\right)=$$

$$=\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(1+\frac{\gamma}{n}\right)\left(1-\frac{\alpha}{n}+\frac{\alpha^2}{n(n+\alpha)}\right)\left(1-\frac{\beta}{n}+\frac{\beta^2}{n(n+\beta)}\right)=$$

$$=1+\frac{\gamma-\alpha-\beta+1}{n}+\frac{\omega_n}{n^2}.$$

这儿 ω_n 有界，因此超几何級数在若干項之后，所有的項都同号，故可以看作是正項級数。由定理 13.2 得知定理成立。

定理 3. 超越几何級数

$$F(\alpha,\beta,\gamma;-1)=1-\frac{\alpha\beta}{1!\gamma}+\cdots+$$

$$+(-1)^n\frac{\alpha(\alpha+1)\cdots(\alpha+n-1)\beta(\beta+1)\cdots(\beta+n-1)}{n!\gamma(\gamma+1)\cdots(\gamma+n-1)}+\cdots$$

当 $\gamma-\alpha-\beta>0$ 时絕对收斂，当 $-1<\gamma-\alpha-\beta\leqslant 0$ 时收斂，而当 $\gamma-\alpha-\beta\leqslant -1$ 时发散。

証. 由于

$$\left|\frac{u_n}{u_{n+1}}\right|=\left|\frac{(n+1)(\gamma+n)}{(n+\alpha)(n+\beta)}\right|=1+\frac{\gamma-\alpha-\beta+1}{n}+\frac{\omega_n}{n^2},$$

故由定理 13.2 可知当 $\gamma-\alpha-\beta>0$ 时，級数絕对收斂，当 $\gamma-\alpha-\beta\leqslant -1$ 时发散。

当 $-1<\gamma-\alpha-\beta\leqslant 0$ 时，可知当 $n>\max(|\alpha|,|\beta|,|\gamma|)$ 时，从第 $n+1$ 項开始，$F(\alpha,\beta,\gamma,-1)$ 是正負項相間的級数，而且存在 N，当 $n>N$ 时

$$\left|\frac{u_n}{u_{n+1}}\right|=1+\frac{\gamma-\alpha-\beta+1}{n}+\frac{\omega_n}{n^2}>1.$$

又可知存在 $\varepsilon>0$ 及 N，使 $-1<\gamma-\alpha-\beta-\varepsilon$. 当 $m>N$ 时

$$\left|\frac{u_m}{u_{m+1}}\right|>1+\frac{\gamma-\alpha-\beta-\varepsilon+1}{m}=1+\frac{\delta}{m}\quad(\delta>0),$$

故

$$\left|\frac{u_{N+1}}{u_{n+1}}\right|=\left|\frac{u_{N+1}}{u_{N+2}}\right|\cdot\left|\frac{u_{N+2}}{u_{N+3}}\right|\cdots\left|\frac{u_n}{u_{n+1}}\right|>\left(1+\frac{\delta}{N+1}\right)\cdots\left(1+\frac{\delta}{n}\right)=$$

$$=e^{\sum\limits_{\nu=N+1}^{n}\log\left(1+\frac{\delta}{\nu}\right)}\geqslant e^{\sum\limits_{\nu=N+1}^{n}\frac{\delta}{\nu}-\frac{1}{2}\sum\limits_{\nu=N+1}^{n}\frac{\delta^2}{\nu^2}}.$$

由于 $n\to\infty$ 时，$e^{\sum\limits_{\nu=N+1}^{n}\frac{\delta}{\nu}-\frac{1}{2}\sum\limits_{\nu=N+1}^{n}\frac{\delta^2}{\nu^2}}$ 趋于 ∞，亦即 $u_n\to 0$. 故由定理 4.4.1 可知，当 $-1<\gamma-\alpha-\beta\leqslant 0$，$F(\alpha,\beta,\gamma;-1)$ 收斂。

定理 4. 当 $|z|<1$ 时，有

$$F(\alpha,\beta+1,\gamma+1;z)=F(\alpha,\beta,\gamma;z)+z\frac{\alpha(\gamma-\beta)}{\gamma(\gamma+1)}F(\alpha+1,\beta+1,\gamma+2;z)\quad(1)$$

及

$$F(\alpha+1,\beta,\gamma+1;z)=F(\alpha,\beta,\gamma;z)+z\frac{\beta(\gamma-\alpha)}{\gamma(\gamma+1)}F(\alpha+1,\beta+1,\gamma+2;z).\quad(2)$$

証. 由

$$F(\alpha, \beta+1, \gamma+1; z) - F(\alpha, \beta, \gamma; z) =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{\alpha(\alpha+1)\cdots(\alpha+n-1)\cdot(\beta+1)\cdots(\beta+n)}{n!(\gamma+1)\cdots(\gamma+n)} - \right.$$

$$\left. - \frac{\alpha(\alpha+1)\cdots(\alpha+n-1)\cdot\beta(\beta+1)\cdots(\beta+n-1)}{n!\gamma(\gamma+1)\cdots(\gamma+n-1)} \right] z^n$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha(\alpha+1)\cdots(\alpha+n-1)(\beta+1)\cdots(\beta+n-1)}{n!(\gamma+1)\cdots(\gamma+n-1)} \left[\frac{\beta+n}{\gamma+n} - \frac{\beta}{\gamma} \right] z^n$$

$$= z\frac{\alpha(\gamma-\beta)}{\gamma(\gamma+1)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\alpha+1)\cdots(\alpha+n-1)(\beta+1)\cdots(\beta+n-1)}{(n-1)!(\gamma+2)\cdots(\gamma+n)} z^{n-1}$$

$$= z\frac{\alpha(\gamma-\beta)}{\gamma(\gamma+1)} F(\alpha+1, \beta+1, \gamma+2; z),$$

此即(1).

因为 $F(\alpha+1, \beta, \gamma+1; z) = F(\beta, \alpha+1, \gamma+1; z)$, 所以

$$F(\alpha+1, \beta, \gamma+1; z) = F(\alpha, \beta, \gamma; z) + z\frac{\beta(\gamma-\alpha)}{\gamma(\gamma+1)} F(\alpha+1, \beta+1, \gamma+2; z).$$

取

$$\begin{cases} X_{2n} = F(\alpha+n, \beta+n, \gamma+2n; x), \\ X_{2n+1} = F(\alpha+n, \beta+n+1, \gamma+2n+1; x), \end{cases}$$

$$a_{2n} = \frac{(\beta+n)(\gamma-\alpha+n)}{(\gamma+2n)(\gamma+2n-1)}, \quad a_{2n+1} = \frac{(\alpha+n)(\gamma-\beta+n)}{(\gamma+2n)(\gamma+2n+1)},$$

则

$$\begin{cases} X_0 = X_1 - a_1 x X_2, \\ X_1 = X_2 - a_2 x X_3, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ X_{m-1} = X_m - a_m x X_{m+1}, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \end{cases} \tag{3}$$

证. 由(1)得

$$F(\alpha+n, \beta+n+1, \gamma+2n+1; x) = F(\alpha+n, \beta+n, \gamma+2n; x) + \frac{(\alpha+n)(\gamma-\beta+n)}{(\gamma+2n)(\gamma+2n+1)} xF(\alpha+n+1, \beta+n+1, \gamma+2n+2; x),$$

即当 $m = 2n+1$ 时

$$X_m = X_{m-1} + a_m x X_{m+1}.$$

由(2)得

$$F(\alpha+n+1, \beta+n+1, \gamma+2n+2; x) = F(\alpha+n, \beta+n+1, \gamma+2n+1; x) + \frac{x(\beta+n+1)(\gamma-\alpha+n+1)}{(\gamma+2n+1)(\gamma+2n+2)} F(\alpha+n+1, \beta+n+2, \gamma+2n+3; x),$$

即当 $m = 2n+2$ 时

$$X_m = X_{m-1} + x a_m X_{m+1},$$

则得(3)式.

由(3)式可知

$$\frac{X_0}{X_1}=1-\frac{a_1x}{\frac{X_1}{X_2}},\quad \frac{X_1}{X_2}=1-\frac{a_2x}{\frac{X_2}{X_3}},\cdots,\quad \frac{X_{m-1}}{X_m}=1-\frac{a_mx}{\frac{X_m}{X_{m+1}}}.$$

逐步代入则得連分数

$$\frac{X_0}{X_1}=1-\cfrac{a_1x}{1-\cfrac{a_2x}{1-\ddots\cfrac{}{1-\cfrac{a_mx}{\cfrac{X_m}{X_{m+1}}}}}}.$$

因此

$$\frac{X_1}{X_0}=\frac{1}{\frac{X_0}{X_1}}=\cfrac{1}{1-\cfrac{a_1x}{1-\cfrac{a_2x}{1-\ddots\cfrac{}{1-\cfrac{a_mx}{\cfrac{X_m}{X_{m+1}}}}}}}$$

$$=\frac{1}{1}-\frac{a_1x}{1}-\frac{a_2x}{1}-\cdots-\frac{a_{m-1}x}{1}-\frac{a_mx}{\frac{X_m}{X_{m+1}}}.$$

Марков 用这个式子計算

$$S=1+\frac{n-l-1}{l+2}\cdot\frac{p}{q}+\frac{(n-l-1)(n-l-2)}{(l+2)(l+3)}\left(\frac{p}{q}\right)^2+\cdots$$

$$=F\left(-n+l+1,1,l+2;\ -\frac{p}{q}\right),$$

此处 l,n 是整数，$0\leqslant l<n$，$0<p<\frac{1}{2}$，$p+q=1$.

取

$$\begin{cases}\alpha=-n+l+1,\\ \beta=0,\\ \gamma=l+1,\\ x=-\dfrac{p}{q},\end{cases}$$

则

$$X_1=F\left(-n+l+1,1,l+2;-\frac{p}{q}\right),\qquad X_0=1.$$

由定义可知

$$a_{2n-2l-1}=a_{2(n-l-1)+1}=0,$$

故

$$\frac{X_1}{X_0} = F\left(-n+l+1, 1, l+2; -\frac{p}{q}\right) =$$

$$= \frac{1}{1} - \frac{a_1 x}{1} - \frac{a_2 x}{1} - \cdots - \frac{a_{2n-2l-2} x}{1}.$$

因为

$$a_{2k-1}x = \frac{(\alpha+k-1)(\gamma-\beta+k-1)}{(\gamma+2k-2)(\gamma+2k-1)}\left(-\frac{p}{q}\right) =$$

$$= \frac{(-n+l+k)(l+k)}{(l+2k)(l+2k-1)}\left(-\frac{p}{q}\right) =$$

$$= \frac{(n-l-k)(l+k)}{(l+2k)(l+2k-1)}\left(\frac{p}{q}\right) = c_k,$$

$$a_{2k}x = \frac{(\beta+k)(\gamma-\alpha+k)}{(\gamma+2k)(\gamma+2k-1)}\left(-\frac{p}{q}\right) = \frac{k(n+k)}{(2k+l)(2k+l+1)}\left(-\frac{p}{q}\right) = -d_k,$$

故

$$S = \frac{X_1}{X_0} = \frac{1}{1} - \frac{c_1}{1} + \frac{d_1}{1} - \frac{c_2}{1} + \cdots - \frac{c_{n-l-1}}{1} + \frac{d_{n-l-1}}{1}.$$

現在对 c_k 及 d_k 进行估計. 我們有

$$0 < c_k \qquad (k \leqslant n-l-1),$$

又假定 $(n+1)p < l+2$, 則

$$(n-l-1)p = (n+1)p - (l+2)p < (l+2)(1-p) = (l+2)q,$$

即

$$c_1 = \frac{(n-l-1)}{l+2} \cdot \frac{p}{q} < 1.$$

故

$$c_k = \frac{(n-k-l)}{l+2k} \cdot \frac{(l+k)}{(l+2k-1)} \frac{p}{q} < c_1 < 1, \qquad (k \geqslant 2).$$

命

$$\omega_k = \frac{c_k}{1} + \frac{d_k}{1} - \frac{c_{k+1}}{1} + \cdots,$$

則用数学归納法易証

$$0 < \omega_k < c_k.$$

又

$$S = \frac{1}{1-\omega_1}, \quad \omega_1 = \frac{c_1}{1} + \frac{d_1}{1-\omega_2}, \quad \omega_2 = \frac{c_2}{1} + \frac{d_2}{1-\omega_3},$$

一般說来有

$$\omega_k = \frac{c_k}{1} + \frac{d_k}{1-\omega_{k+1}}.$$

故由估計

$$0 < \omega_{k+1} < c_{k+1}$$

可得 ω_k 的上下界，从而得到 ω_{k-1}, $\cdots$, 以至 S 的上下界.

例. 取

$$p = \frac{1}{3},\ n = 9{,}000,\ l = 3{,}090,$$

ν	c_ν	d_ν
1	0.95553	0.00047
2	0.95444	0.00094
3	0.95335	0.00140
4	0.95227	0.00187
5	0.95119	0.00234
6	0.95010	

由不等式

$$0 < \omega_6 < 0.95011,$$

开始得

$$1.00234 < 1 + \frac{d_5}{1-\omega_6} < 1.04711;\ 0.90839 < \omega_5 < 0.94898,$$

$$1.02041 < 1 + \frac{d_4}{1-\omega_5} < 1.03685;\ 0.91842 < \omega_4 < 0.93324,$$

$$1.01716 < 1 + \frac{d_3}{1-\omega_4} < 1.02119;\ 0.93362 < \omega_3 < 0.93728,$$

$$1.01416 < 1 + \frac{d_2}{1-\omega_3} < 1.01514;\ 0.94020 < \omega_2 < 0.94113,$$

$$1.00785 < 1 + \frac{d_1}{1-\omega_2} < 1.00816;\ 0.94779 < \omega_1 < 0.94810,$$

因而得出

$$\frac{1}{0.05221} < S < \frac{1}{0.05190}.$$

習題 1. 証明 $y = F(\alpha, \beta, \gamma; x)$ 适合于

$$x(1-x)y'' + \{\gamma - (\alpha+\beta+1)x\}y' - \alpha\beta y = 0.$$

§ 15. 用冪級数解微分方程

例 1. 求冪級数

$$y = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n + \cdots \tag{1}$$

之适合于

$$y'' - xy = 0 \tag{2}$$

者.

以(1)代入(2)得

$$(2\cdot 1a_2 + 3\cdot 2a_3x + 4\cdot 3a_4x^2 + \cdots) - x(a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots) = 0.$$

由幂级数唯一性定理比較系数得出

$$\begin{array}{c|l} x^0 & 2\cdot 1a_2 = 0 \\ x^1 & 3\cdot 2a_3 - a_0 = 0 \\ x^2 & 4\cdot 3a_4 - a_1 = 0 \\ x^3 & 5\cdot 4a_5 - a_2 = 0 \\ \cdots & \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ x^s & (s+2)(s+1)a_{s+2} - a_{s-1} = 0 \\ \cdots & \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \end{array}$$

由这些式子不难得出 $a_{3k+2} = 0$ 及

$$a_{3k} = \frac{a_{3(k-1)}}{3k(3k-1)} = \frac{1\cdot 4\cdot 7\cdots(3k-2)}{(3k)!}a_0;$$

又

$$a_{3k+1} = \frac{a_{3(k-1)+1}}{3k(3k+1)} = \frac{2\cdot 5\cdot 8\cdots(3k-1)}{(3k+1)!}a_1,$$

因此我們得出

$$y = a_0y_1 + a_1y_2,$$

此处 a_0 及 a_1 是常数，且

$$y_1 = 1 + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1\cdot 4\cdot 7\cdots(3k-2)}{(3k)!}x^{3k},$$

及

$$y_2 = x + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{2\cdot 5\cdot 8\cdots(3k-1)}{(3k+1)!}x^{3k+1}.$$

因为

$$\left[\frac{1\cdot 4\cdot 7\cdots(3k+1)}{(3k+3)!}x^{3k+3}\right]\Big/\left[\frac{1\cdot 4\cdot 7\cdots(3k-2)}{(3k)!}x^{3k}\right] = \frac{x^3}{(3k+2)(3k+3)},$$

所以由比例判别条件可知，級数 y_1 对任何值都收斂．同法証明 y_2 也是对任何值都收斂的級数．

例2. 考虑方程

$$(1-x^2)y'' - xy' + a^2y = 0. \tag{3}$$

以幂級数(1)代入这方程得

$$(n+2)(n+1)a_{n+2} - n(n-1)a_n - na_n + a^2a_n = 0,$$

即

$$(n+2)(n+1)a_{n+2} = (n^2 - a^2)a_n.$$

由此得出

$$a_{2n} = (-1)^n\frac{a^2(a^2-4)\cdots(a^2-(2n-2)^2)}{(2n)!}a_0,$$

$$a_{2n+1} = (-1)^n\frac{(a^2-1)(a^2-3^2)\cdots(a^2-(2n-1)^2)}{(2n+1)!}a_1.$$

因此得到

$$y = a_0 y_1 + a_1 y_2,$$

此处 a_0, a_1 是二常数，而

$$y_1 = 1 - \frac{a^2}{2!}x^2 + \frac{a^2(a^2-2^2)}{4!}x^4 - \frac{a^2(a^2-2^2)(a^2-4^2)}{6!}x^6 + \cdots$$

及

$$y_2 = x - \frac{a^2-1}{3!}x^3 + \frac{(a^2-1)(a^2-3^2)}{5!}x^5 - \frac{(a^2-1)(a^2-3^2)(a^2-5^2)}{7!}x^7 + \cdots.$$

由于当 $n \to \infty$ 时

$$\left|\frac{a^2(a^2-4)\cdots(a^2-(2n)^2)}{(2n+2)!}x^{2n+2}\right| \Big/ \left|\frac{a^2(a^2-4)\cdots(a^2-(2n-2)^2)}{(2n)!}x^{2n}\right| =$$

$$= \left|\frac{a^2-(2n)^2}{(2n+1)(2n+2)}x^2\right| \to |x|^2,$$

故用比例判别条件，級数 y_1 当 $|x| < 1$ 时絕对收斂；同样地，y_2 当 $|x| < 1$ 时也絕对收斂.

只要 a 不等于一个偶数，当 $|x| > 1$ 时，这級数显然发散，当 a 是偶数时，級数 y_1 就成为多項式了. 不难驗証 y_1 与 y_2 就等于下面两个初等函数：

$$y_1 = \cos(a \arcsin x), \qquad y_2 = \frac{1}{a}\sin(a \arcsin x). \tag{4}$$

事实上，通过微分，容易証明 $\cos(a \arcsin x)$ 及 $\sin(a \arcsin x)$ 都适合微分方程(3)，因此它們能够表成 y_1 与 y_2 的綫性組合，如

$$\cos(a \arcsin x) = \alpha y_1 + \beta y_2, \qquad \sin(a \arcsin x) = \gamma y_1 + \delta y_2,$$

計算这两等式双方以及它們的一阶微商在 $x = 0$ 处的数值，容易定出 $\alpha = 1$, $\beta = 0$, $\gamma = 0$, $\delta = a$, 故得(4)式.

归納以上的方法我們可以处理如下形式的微分方程

$$\alpha(x)y'' + \beta(x)y' + \gamma(x)y = F(x),$$

此处 $\alpha(x)$, $\beta(x)$, $\gamma(x)$, $F(x)$ 都是 x 的冪級数，且 $\alpha(0) \neq 0$. 在这样的情况下，可以把

$$p(x) = \frac{\beta(x)}{\alpha(x)}, \quad q(x) = \frac{\gamma(x)}{\alpha(x)}, \quad g(x) = \frac{F(x)}{\alpha(x)}$$

写成为 x 的冪級数，然后用冪級数代入，比較系数而得解.

如果 $\alpha(0) = 0$, 修改上法，有时仍可解决問題.

習題 (Airy). 解方程

$$\frac{d^2y}{dx^2} + n^2xy = 0.$$

例 3 (超越几何級数). 解微分方程

$$x(1-x)\frac{d^2y}{dx^2} + [\gamma - (\alpha+\beta+1)x]\frac{dy}{dx} - \alpha\beta y = 0.$$

我們考虑形如

$$x^{\lambda}(a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots)$$

的解，代入上式比較 $x^{\lambda-1}$ 的系数立得

$$\lambda(\lambda - 1) + \gamma\lambda = 0,$$

即

$$\lambda = 0 \quad \text{或} \quad \lambda = 1 - \gamma.$$

比較 $x^{n+\lambda}$ 的系数可得

$$(n + 1 + \lambda)(n + \lambda)a_{n+1} - (n + \lambda)(n + \lambda - 1)a_n + \gamma(n + \lambda + 1)a_{n+1} - \\ - (\alpha + \beta + 1)(n + \lambda)a_n - \alpha\beta a_n = 0,$$

即

$$(n + \lambda + 1)(n + \lambda + \gamma)a_{n+1} = (n + \lambda + \alpha)(n + \lambda + \beta)a_n,$$

或即

$$a_{n+1} = \frac{(n + \lambda + \alpha)(n + \lambda + \beta)}{(n + \lambda + 1)(n + \lambda + \gamma)} a_n$$

所以有两个解：即当 $\lambda = 0$ 时，

$$y = a_0\left(1 + \frac{\alpha \cdot \beta}{1 \cdot \gamma}x + \frac{\alpha \cdot (\alpha + 1) \cdot \beta(\beta + 1)}{1 \cdot 2 \cdot \gamma \cdot (\gamma + 1)}x^2 + \cdots\right) = a_0F(\alpha, \beta, \gamma; x);$$

另一解是：当 $\lambda = 1 - \gamma$ 时，

$$y = a_0x^{1-\gamma}\left(1 + \frac{(1 - \gamma + \alpha)(1 - \gamma + \beta)}{(2 - \gamma)1}x + \right.$$
$$\left. + \frac{(1 - \gamma + \alpha)(2 - \gamma + \alpha)(1 - \gamma + \beta)(2 - \gamma + \beta)}{(2 - \gamma)(3 - \gamma) \cdot 1 \cdot 2}x^2 + \cdots\right)$$
$$= a_0x^{1-\gamma}F(\alpha + 1 - \gamma, \beta + 1 - \gamma, 2 - \gamma; x).$$

但是我們必須注意，当 γ 为負整数或 0 时，第一解无效，而当 $2 - \gamma$ 为負整数或 0 时，或即 γ 为不小于 2 的正整数时，第二解无效.

一般来讲，我們的超几何方程的解是

(*A*) $y = C_1F(\alpha, \beta, \gamma; x) + C_2x^{1-\gamma}F(\alpha + 1 - \gamma, \beta + 1 - \gamma, 2 - \gamma; x)$. 而当 $\gamma = 1$ 时，$F(\alpha, \beta, \gamma; x) = F(\alpha + 1 - \gamma, \beta + 1 - \gamma, 2 - \gamma; x)$，在 $F(\alpha, \beta, 1; x)$ 之外，对 γ 的其他整数値我們还是仅有一个解，由此可知，(*A*) 不能給出超越几何方程的有两个常数的解. 当 γ 为非整数时，(*A*) 便是超几何方程的有两个常数的解了.

例 4 (Legendre).

$$(1 - x^2)y'' - 2xy' + n(n + 1)y = 0.$$

以冪級数

$$y = \sum_{l=0}^{\infty} a_l x^l$$

代入并比較系数得

$$(l + 2)(l + 1)a_{l+2} - l(l - 1)a_l - 2la_l + n(n + 1)a_l = 0,$$

或即

$$a_{l+2} = -\frac{(n+l+1)(n-l)}{(l+1)(l+2)} a_l.$$

所以得出

$$a_{2l} = (-1)^l \frac{(n+1)(n+3)\cdots(n+2l-1)n(n-2)\cdots(n-2l+2)}{(2l)!} a_0,$$

$$a_{2l+1} = (-1)^l \frac{(n+2)(n+4)\cdots(n+2l)(n-1)(n-3)\cdots(n-2l+1)}{(2l+1)!} a_1,$$

而得 Legendre 方程的有两个任意常数的解:

$$y = a_0\left(1 - \frac{(n+1)n}{1\cdot 2}x^2 + \frac{(n+1)(n+3)\cdot n(n-2)}{4!}x^4 + \cdots\right)$$
$$+ a_1\left(x - \frac{(n+2)(n-1)}{2\cdot 3}x^3 + \frac{(n+2)(n+4)(n-1)(n-3)}{5!}x^5 - \cdots\right)$$
$$= a_0y_1 + a_1y_2.$$

如果 n 是一个正偶数,则 y_1 仅有有限项,它是 x 的 n 次多项式,用 $\dfrac{(-1)^{\frac{n}{2}}n!}{2^n\left(\frac{n}{2}!\right)^2}P_n(x)$ 表它,当 n 是正奇数时,y_2 仅有有限项,它是 x 的 n 次多项式,我们也用 $\dfrac{(-1)^{\frac{n-1}{2}}n!}{2^{n-1}\left(\frac{n-1}{2}!\right)^2}P_n(x)$ 表它. 这个多项式 $P_n(x)$ 称为 Legendre 多项式.

$$P_0(x) = 1,\ P_1(x) = x,\ P_2(x) = \frac{1}{2}(3x^2-1),\ P_3(x) = \frac{1}{2}(5x^3-3x),$$

$$P_4(x) = \frac{1}{8}(35x^4 - 30x^2 + 3),\ P_5(x) = \frac{1}{8}(63x^5 - 70x^3 + 15x),\cdots.$$

现在提出几个较难的习题,但是是重要的结果.

习题 1.

$$P_n(x) = \frac{(2n)!}{2^n(n!)^2}\left\{x^n - \frac{n(n-1)}{2(2n-1)}x^{n-2} + \right.$$
$$\left. + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{2\cdot 4(2n-1)(2n-3)}x^{n-4} - \cdots\right\}$$
$$= \sum_{r=0}^{m}(-1)^r \frac{(2n-2r)!}{2^n r!(n-r)!(n-2r)!}x^{n-2r},$$

此处 $m = \frac{1}{2}n$ 或 $\frac{1}{2}(n-1)$, 视 n 为偶或奇而定.

习题 2. 证明

$$P_n(x) = F\left(n+1,\ -n,\ 1;\ \frac{1-x}{2}\right).$$

习题 3. 证明

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!}\frac{d^n}{dx^n}((x^2-1)^n).$$

例 5 (Bessel).

$$x^2y'' + xy' + (x^2 - \mu^2)y = 0 \qquad \mu \neq 0,$$

我們現在考慮形如

$$y = x^r(a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots)$$

的解. 比較 x^r 的系数可得

$$r(r-1) + r - \mu^2 = 0,$$

即 $r = \pm\mu$. 命

$$y = x^\mu(a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots),$$

代入原方程比較系数可得 $a_1 = 0$ 及

$$k(2\mu + k)a_k + a_{k-2} = 0,$$

即得

$$a_{2k+1} = 0 \qquad (k = 1, 2, \cdots)$$

及

$$a_{2k} = (-1)^k \frac{a_0}{2^{2k}k!(\mu+1)(\mu+2)\cdots(\mu+k)}.$$

命

$$y_1 = x^\mu\left(1 - \frac{x^2}{2^2\cdot 1\cdot(\mu+1)} + \frac{x^4}{2^4\cdot 1\cdot 2\cdot(\mu+1)(\mu+2)} - \cdots\right),$$

又換 μ 为 $-\mu$, 而命

$$y_2 = x^{-\mu}\left(1 - \frac{x^2}{2^2\cdot 1\cdot(-\mu+1)} + \frac{x^4}{2^4\cdot 1\cdot 2\cdot(-\mu+1)(-\mu+2)} - \cdots\right),$$

則当 μ 非整数时,方程有两个任意常数的解 $c_1y_1 + c_2y_2$. 当 μ 为正整数时 y_2 不存在,当 μ 为負整数时 y_1 不存在,当 $\mu = 0$ 时 $y_1 = y_2$, 所以当 μ 为整数时, 我們仅得到只有一个任意常数的解. 将来知道,在这种情况下方程的解法还沒有完整.

第八章　方程的近似解

§1. 引　言

本章中将研究方程的数值解法．我們所討論的方程可能是代数方程也可能是超越方程．所謂方程求解就是在于求出数值ξ，使

$$f(\xi)=0, \tag{1}$$

这儿$f(x)$是一个已給的連續函数．ξ称为方程(1)的根，或称为函数$f(x)$的零点．

最直觉的方法是描图法，尽可能細地取一些点 $x_1<x_2<x_3\cdots$ 来算出 $y_1=f(x_1)$，$y_2=f(x_2)$，$\cdots$．把点(x_1,y_1)，(x_2,y_2)，$\cdots$画在紙上，如果(x_ν,y_ν)与$(x_{\nu+1},y_{\nu+1})$一个处于x軸以上，一个处于x軸以下，我們再在x_ν，$x_{\nu+1}$之間取一些分得更細些的点，这样就可以把曲綫$y=f(x)$交x軸的点逐步显示出来．这一方法，在原則上是簡单的，但是实际应用时，却是效率不高的．在实际計算时，实質上分成两步，第一步是确定两个数a，b，其間包含有根；第二步是把包含着根的区間的两端逐漸接近，在某些情形下，做些补充的計算来說明近似值的誤差．

关于第一步，一般講，我們并沒有很好的办法．但是在实际問題中，客观事物的本身往往就建議了根所应当存在的范围．例如，在α，β之間．因为在根的附近，一般講来，$f(x)$是变号的(不变号的情况是曲綫切于x軸，但在这一情况时$f'(x)$是变号的，我們不討論这种情况，如果讀者了解了一般情况之后，这种特殊情况的处理，自能作出)．因而分隔α，β可以得到这样的一个区間a，b，使$f(a)$与$f(b)$异号．

例 1.　考虑代数方程

$$x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_{n-1}x+a_n=0.$$

如果 $|x|>1+|a_1|+\cdots+|a_n|=M$，則

$$|a_1x^{n-1}+\cdots+a_{n-1}x+a_n|\leqslant(|a_1|+\cdots+|a_n|)|x|^{n-1}<M|x|^{n-1}<|x|^n.$$

因此

$$x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_{n-1}x+a_n\neq 0,$$

换言之，代数方程的根ξ一定适合于

$$|\xi|\leqslant 1+|a_1|+\cdots+|a_n|.$$

§2. 图　解　法

上节虽然說了图解法的缺点，但是，如果应用得恰当，还是可以給我們提出不少有用的資料的．

例 1. 解三次方程

$$x^3 - ax = b.$$

在图紙上固定地画好曲綫

$$y = x^3,$$

然后用一把直尺就可以找出我們所討論的三次方程的根来. 把直尺的边經过 $(0, b)$ 及 $\left(-\frac{b}{a}, 0\right)$ 二点，则与曲綫 $y = x^3$ 的交点的横标就是根的数值（图 156）. 其原因是經过 $(0, b)$ 及 $\left(-\frac{b}{a}, 0\right)$ 的直綫方程是

$$y = ax + b,$$

所以交点的横坐标就是原方程的根.

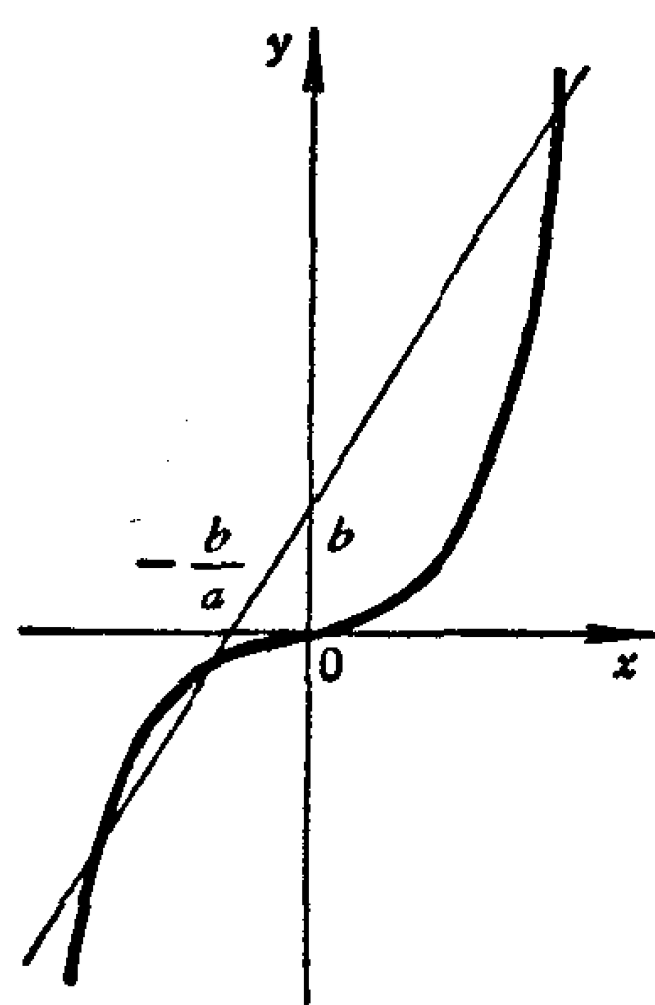


图 156

例 2. 解方程

$$\operatorname{tg} x = \operatorname{tgh} x.$$

把二个图形

$$y = \operatorname{tg} x, y = \operatorname{tgh} x$$

重叠在一起，我們可以看出交点的横坐标在 $\frac{\pi}{4} + n\pi$ 附近.

§3. 迭 代 法

在研究$\sqrt{2}$的漸近値时，我們已經用过迭代法. 迭代法的基本形式是：把 $f(x)$ 分为 $f_1(x) - f_2(x)$. 如此，方程变为

$$f_1(x) = f_2(x), \tag{1}$$

其中 $f_1(x)$ 是这样一个函数，对任意的实数 m，方程

$$f_1(x) = m$$

容易計算到高度准确的实根.

我們的計算方法是：先从一个近似値 x_0 出发，代到方程(1)的右边，解方程

$$f_1(x) = f_2(x_0)$$

而得出 x 的第二近似値 x_1.

再以 x_1 代入 (1) 的右边，解方程 $f_1(x) = f_2(x_1)$ 以确定第三近似値 x_2. 如此做下去，得出一系列的値：

$$x_0, x_1, x_2, \cdots, x_n, \cdots,$$

其中

$$f_1(x_1) = f_2(x_0),$$
$$f_1(x_2) = f_2(x_1),$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$f_1(x_n) = f_2(x_{n-1}),$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots.$$

这方法的几何意义是：所求的根是曲綫

$$y = f_1(x) \tag{c_1}$$

与

$$y = f_2(x) \tag{c_2}$$

的交点的横坐标 ξ.

已往的手續可以說成为，作直綫 $x = x_0$ 平行于 y 軸，交曲綫 C_2 于 (x_0, y_0)，过这交点引直綫平行于 x 軸交 C_1 于 (x_1, y_0)，再过 (x_1, y_0) 引平行于 y 軸的直綫交 C_2 于 (x_1, y_1)，过交点引平行于 x 軸的綫交 C_1 于 (x_2, y_1)，如此續行，得出一条折綫(图 157).

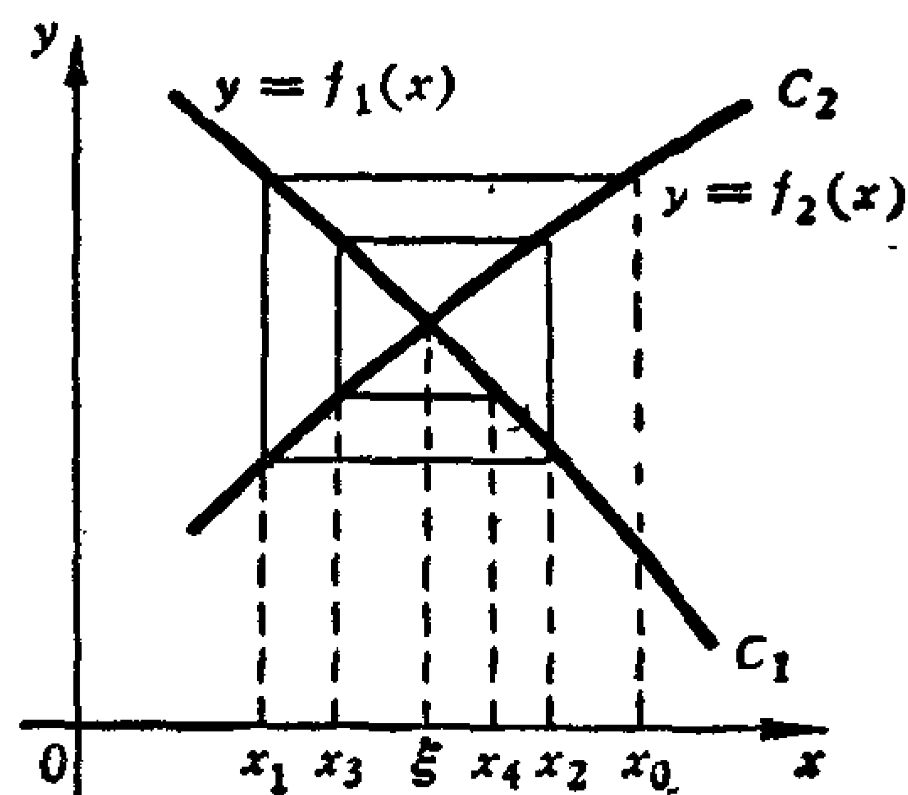


图 157

但这样的折綫是否愈来愈近于交点是一个問題，从图形 157 上看，如果我們从 x_2 出发先求与 C_1 的交点，并作平行于 x 軸的綫交 C_2 等等，則获得了一条刚好相反的折綫，这說明了，我們如果不小心地选择曲綫的次序，我們可能得到愈来愈远的結果. 保証趋向于交点的条件是

$$|f_2'(\xi)| < |f_1'(\xi)|.$$

这一条件当然很难用，因为这儿我們需要在 $x = \xi$ 的数值. 不过我們有以下的結果.

定理 1. 如果有

$$\left|\frac{f_2'(y)}{f_1'(x)}\right| \leqslant q < 1 \ (a < x < b,\ a < y < b),$$

則

$$x_n \to \xi.$$

証. 从

$$f_1(x_{n+1}) - f_1(x_n) = f_2(x_n) - f_2(x_{n-1})$$

及 Lagrange 定理可知

$$(x_{n+1} - x_n)f_1'(x) = (x_n - x_{n-1})f_2'(y),$$

此处 x 在 x_n 与 x_{n+1} 之間，而 y 在 x_n 与 x_{n-1} 之間. 因而得出

$$|x_{n+1} - x_n| \leqslant q|x_n - x_{n-1}|.$$

由此得出

$$|x_{n+1} - x_n| \leqslant q^n|x_1 - x_0|.$$

从而得出

$$|x_{n+p} - x_n| \leqslant (q^n + q^{n+1} + \cdots + q^{n+p-1})|x_1 - x_0| \leqslant \frac{q^n}{1-q}|x_1 - x_0|.$$

当 $n \to \infty$, $q^n \to 0$，所以 x_n 是收斂的. 既然收斂，我們由

$$\lim_{n\to\infty} f_1(x_n) = \lim_{n\to\infty} f_2(x_{n-1})$$

可知

$$f_1(\xi) = f_2(\xi).$$

这定理的特例是

定理 2. 如果在 (a, b) 中 $f(x)$ 連續，且 $|f'(x)| \leqslant q < 1$，則方程

$$x = f(x)$$

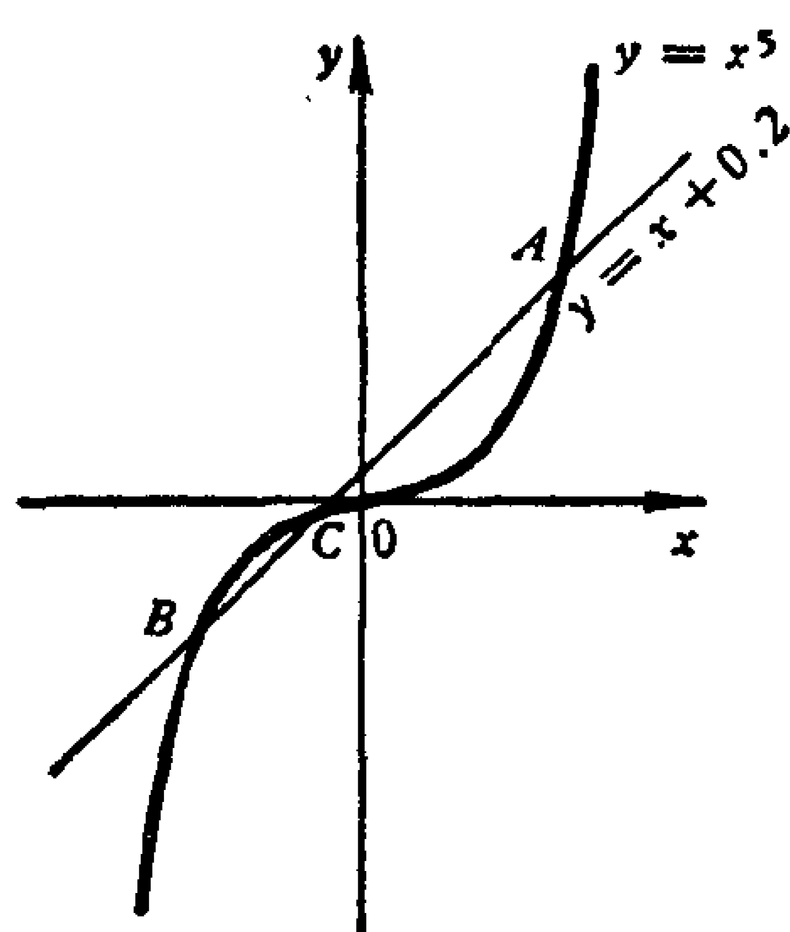


图 158

的一个根可由

$$x_1 = f(x_0),\ x_2 = f(x_1),\ \cdots,\ x_n = f(x_{n-1}),\ \cdots$$

来接近.

例 1. $x^5 - x - 0.2 = 0$,

这方程的实根是曲綫

$$y = x^5 \qquad (1)$$

与

$$y = x + 0.2 \qquad (2)$$

的交点的横坐标,由图 158 可以看出,它有两个負根,一个正根.

在 A 及 B, (2)的斜率的絕对值小于(1)的切綫的斜率的絕对值,取 $f_1(x) = x^5$, $f_2(x) = x + 0.2$, 将 A 与 B 的横坐标的計算列成表如下:

$\sqrt[5]{x_n + 0.2}$	$x_n + 0.2$
$x_0 = 1$	1.2
$x_1 = 1.037$	1.237
$x_2 = 1.0434$	1.2434
$x_3 = 1.0445$	1.2445
$x_4 = 1.04472$	

于是得到准确到四位的根的近似值 $x \doteq 1.04472$.

$\sqrt[5]{x_n + 0.2}$	$x_n + 0.2$
$x_0 = -1$	-0.8
$x_1 = -0.956$	-0.756
$x_2 = -0.9456$	-0.7456
$x_3 = -0.9430$	-0.7430
$x_4 = -0.9423$	-0.7423
$x_5 = -0.94214$	-0.74214
$x_6 = -0.94210$	

于是得誤差不超过 $2 \cdot 10^{-5}$ 的根的近似值 $x \doteq -0.94210$.

在計算 C 的坐标时,由于在 C 点(2)的斜率的絕对值大于(1)的切綫的斜率,故此时应該取 $f_1(x) = x$, $f_2(x) = x^5 - 0.2$. 現在将 C 的横坐标的計算列于下:

$x_n^5 - 0.2$	x_n^5
$x_0 = 0$	-0
$x_1 = -0.2$	-0.00032
$x_2 = -0.20032$	

于是得到准确到五位的根的近似值 $x \doteq -0.20032$.

例 2. $x = \operatorname{tg} x$.

这个方程的根是曲綫

$$y = x \qquad (3)$$

与

$$y = \operatorname{tg} x \qquad (4)$$

交点的横坐标.

由图 159 可以看出,在每一个区間

$$\left[(2n-1)\frac{\pi}{2},\ (2n+1)\frac{\pi}{2}\right]\ (n=0,\ \pm 1, \cdots)$$

中,这方程有一个根.

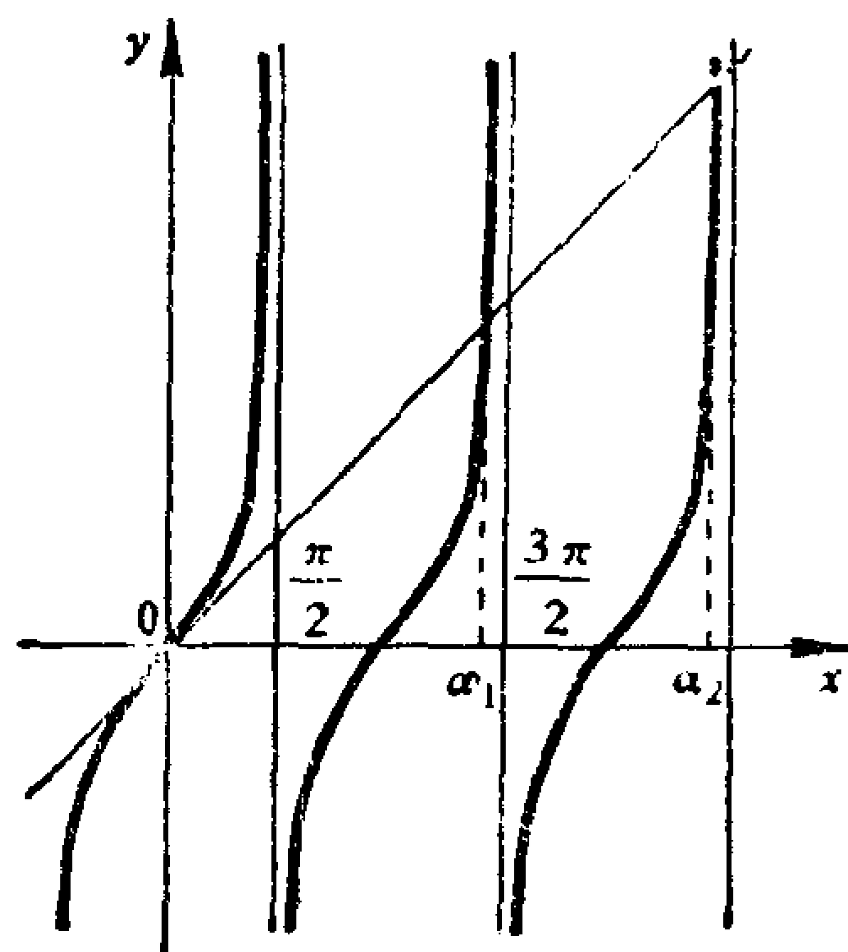


图 159

命 α_n 表示第 n 个正根, 則

$$\alpha_n \sim \left(2n+1\right)\frac{\pi}{2}.$$

現在来求 α_1. 将原来方程改变为

$$x = \operatorname{arc\,tg} x,$$

我們把計算列成下表:

x_n	$\operatorname{arc\,tg} x_n$
$x_0 = 4.7124\cdots = \frac{3\pi}{2}$	4.5033
$x_1 = 4.5033$	4.4938
$x_2 = 4.4938$	4.4935
$x_3 = 4.4935$	

于是得到根的近似值为 $\alpha_1 \doteq 4.4935$, 它准确到四位数字.

迭代法的原理也可以用来計算联立方程

$$F_1(x, y) = 0, \quad F_2(x, y) = 0$$

的交点(ξ, η).

設在(ξ, η)附近 $F_1(x, y) = 0$, $F_2(x, y) = 0$ 分别确定了函数 $y_1(x)$, $y_2(x)$. 这时 $\frac{\partial F_1}{\partial y} \neq 0$, $\frac{\partial F_2}{\partial y} \neq 0$, 且由定理 1, 当

$$\left|\frac{y_2'(x)}{y_1'(y)}\right| \leqslant q < 1,$$

即 $\left|\frac{\partial F_2}{\partial x} \Big/ \frac{\partial F_2}{\partial y}\right|_P \leqslant q \left|\frac{\partial F_1}{\partial x} \Big/ \frac{\partial F_1}{\partial y}\right|_Q$, $0 < q < 1$ 成立时(这里 P、Q 是(ξ, η)邻域的点),则可由一个 x_0 出发,在

$$y_1(x) = y_2(x_0)$$

中解 x_1. 这相当于由一适合 $F_2(x_0, y_0) = 0$ 的(x_0, y_0)出发,在 $F_1(x, y_0) = 0$ 中解出 x_1 使

$$F_1(x_1, y_0) = 0.$$

而由 $y_1(x) = y_2(x_1)$ 确定 x_2, 相当于确定 y_1 使

$$F_2(x_1, y_1) = 0.$$

再确定 x_2 使 $F_1(x_2, y_1) = 0, \cdots$, 即定理 1 的演算过程化为先确定$(x_0, y_0)$使

$$F_2(x_0, y_0) = 0,$$

然后再依次由以下方程来确定 $x_1, y_1, \cdots, x_n, y_n, \cdots$,

$$F_1(x_1, y_0) = 0$$
$$F_2(x_1, y_1) = 0$$
$$\vdots$$
$$F_1(x_n, y_{n-1}) = 0$$
$$F_2(x_n, y_n) = 0$$
$$\cdots\cdots\cdots.$$

§4. 插 值 法

我們假定 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上是連續的，$f'(x)$，$f''(x)$ 都不变号，$f(a)f(b) < 0$.

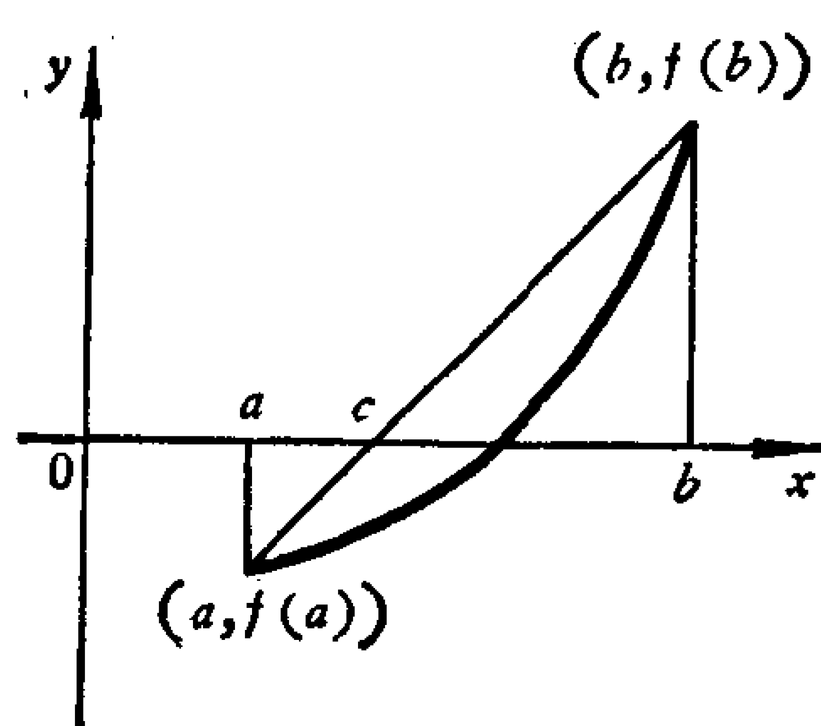


图 160

过 $(a, f(a))$ 与 $(b, f(b))$ 作一直綫

$$\frac{y - f(a)}{f(b) - f(a)} = \frac{x - a}{b - a}.$$

这直綫和 x 軸的交点是 $x = c$，卽

$$\frac{-f(a)}{f(b) - f(a)} = \frac{c - a}{b - a}.$$

解得

$$c = a - \frac{(b - a)f(a)}{f(b) - f(a)} = b - \frac{(a - b)f(b)}{f(a) - f(b)}.$$

这一公式便把区間 (a, b) 縮小成为 (a, c) 或 (c, b). 区別根是在 (c, b) 中，还是在 (a, c) 中的方法是研究 $f''(x)$ 的符号. 若在 (a, b) 中 $f'(x) > 0$，則当 $f''(x) > 0$ 时，根在 (c, b) 之中；而 $f''(x) < 0$ 时，根在 (a, c) 之中. 若在 (a, b) 中 $f'(x) < 0$，則当 $f''(x) > 0$ 时，根在 (a, c) 中；而 $f''(x) < 0$ 时，根在 (c, b) 之中.

例. 求方程

$$f(x) = x^3 - 2x^2 + 3x - 5 = 0$$

的根. 由下表

x	∞	5	2	1.9	1.8	1.7	1.5	1	0
$f(x)$	+	+	+	+0.339	−0.248	−	−	−	−

可見根落在(1.8,1.9)之中，又由公式可得

$$c = 1.9 + \left[\frac{-(1.8 - 1.9)0.339}{-0.248 - 0.339}\right] = 1.843.$$

計算得 $f(1.843) = -0.00427 < 0$，所以根在(1.843,1.9)之間，再用公式

$$c = 1.9 + \left[\frac{(-0.057)\cdot 0.339}{0.339 - (-0.00427)}\right] = 1.9 - \frac{0.019323}{0.34327} = 1.8437.$$

为了要説明精确度，取 $x = 1.8438$ 代入，

$$f(1.8438) = 6.268180 - 6.799197 + 5.5314 - 5 = 0.000383 > 0.$$

而

$$f(1.8437) < 0,$$

所以根在(1.8437,1.8438)中，卽近似值的誤差小于0.0001.

§ 5. Newton 法

我們仍然假定在 $[a, b]$ 中 $f(x)$ 是連續的, $f'(x)$ 也是連續的, $f(a)$ 与 $f(b)$ 异号. 为了肯定起見, 我們假定 $f(a) < 0, f(b) > 0$. 如此 $f(x)$ 是升函数, 即 $f'(x) > 0$. 过 $(a, f(a))$ 作曲綫 $y = f(x)$ 的切綫

$$\frac{y - f(a)}{x - a} = f'(a),$$

即

$$x = a + \frac{y - f(a)}{f'(a)}.$$

这切綫与 x 軸交于

$$c = a + \left[\frac{-f(a)}{f'(a)}\right].$$

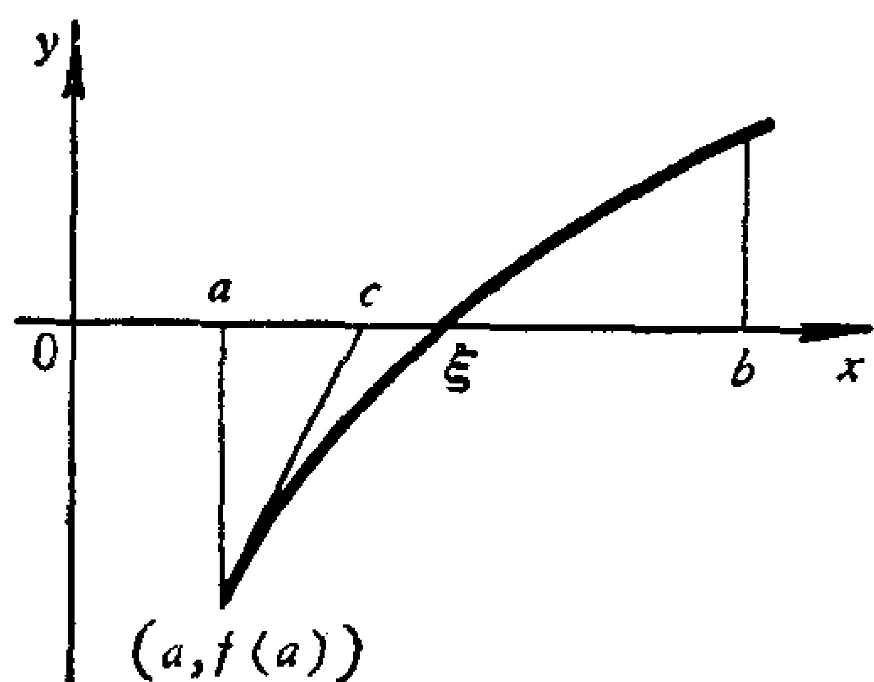


图 161

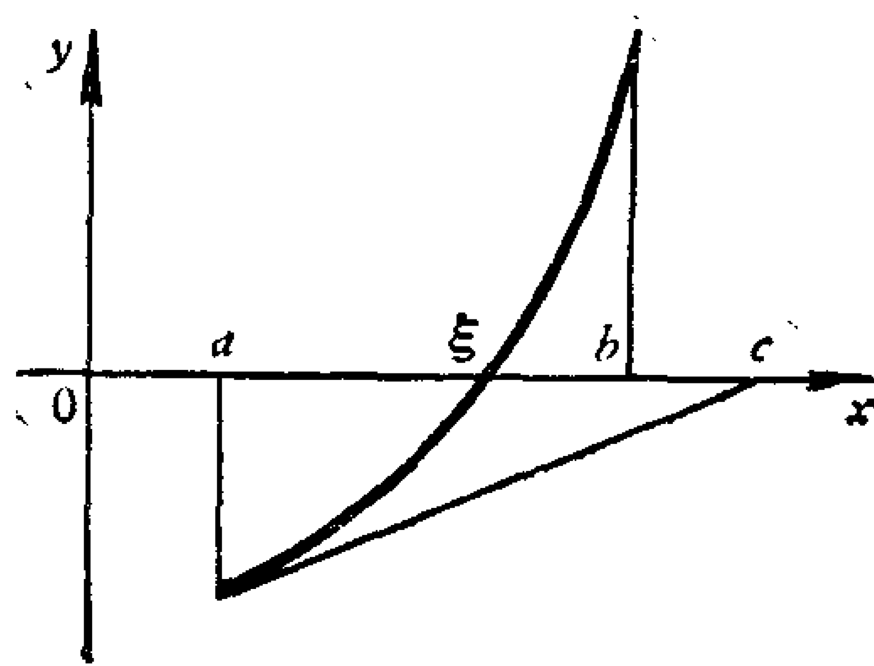


图 162

在第 161 图的情况下, c 比 a 更接近于 ξ, 但是在第 162 图的情况下, 并不一定有这样的結論, 主要的原因是第一种情况曲綫是向上凸的, 也就是 $f(a)$ 和 $f''(x)$ 是同号的. 如果 $f(a)$ 和 $f''(x)$ 异号, 我們由 b 点出发, 可得同样的結果:

$$c = b - \frac{f(b)}{f'(b)}.$$

我們再回到原来的問題, 把

$$a_1 = a + \left[-\frac{f(a)}{f'(a)}\right]$$

作为根的新数值, 再一个一个地求

$$a_2 = a_1 + \left[-\frac{f(a_1)}{f'(a_1)}\right], \quad a_3 = a_2 + \left[-\frac{f(a_2)}{f'(a_2)}\right], \cdots, \quad a_n = a_{n-1} + \left[-\frac{f(a_{n-1})}{f'(a_{n-1})}\right],$$

此处有 $a_1 < a_2 < a_3 < \cdots$. 又从

$$f(a_n) = f(a_n) - f(\xi) = (a_n - \xi)f'(\eta),$$

此 η 在 a_n 与 ξ 之間, 所以

$$|a_n - \xi| \leqslant \frac{|f(a_n)|}{m},$$

此处 m 等于 $|f'(x)|$ 在 a, b 間的最小值.

例 1. 給了方程

$$f(x)=x^3+2x^2-3x-7=0.$$

把根分隔出来:

x	$+\infty$	10	5	2	1.9	1.8	1.7	1.5	1	$-\infty$
$f(x)$	+	+	+	+	+1.379	−0.088	−	−	−	−

根在 1.8 与 1.9 之間.

微分得

$$f'(x)=3x^2+4x-3,$$

由此得

$$f'(a)=f'(1.8)=9.72+7.2-3=13.92.$$

代入則得

$$a_1=1.8+\frac{0.088}{13.92}=1.806.$$

代入原方程

$$f(1.806)=-0.0042<0.$$

因此根在(1.806,1.9)之間.

繼行可得

$$a_2=a_1+\left[\frac{-f(a_1)}{f'(a_1)}\right]=1.806+\frac{0.0042}{13.9348}=1.8063.$$

因为 $f(1.8063)<0$, 所以根在 (1.8063,1.9) 之中, 并求出 $f(1.807)>0$. 所以根在(1.8063,1.807)之間,这近似值的誤差小于 0.001.

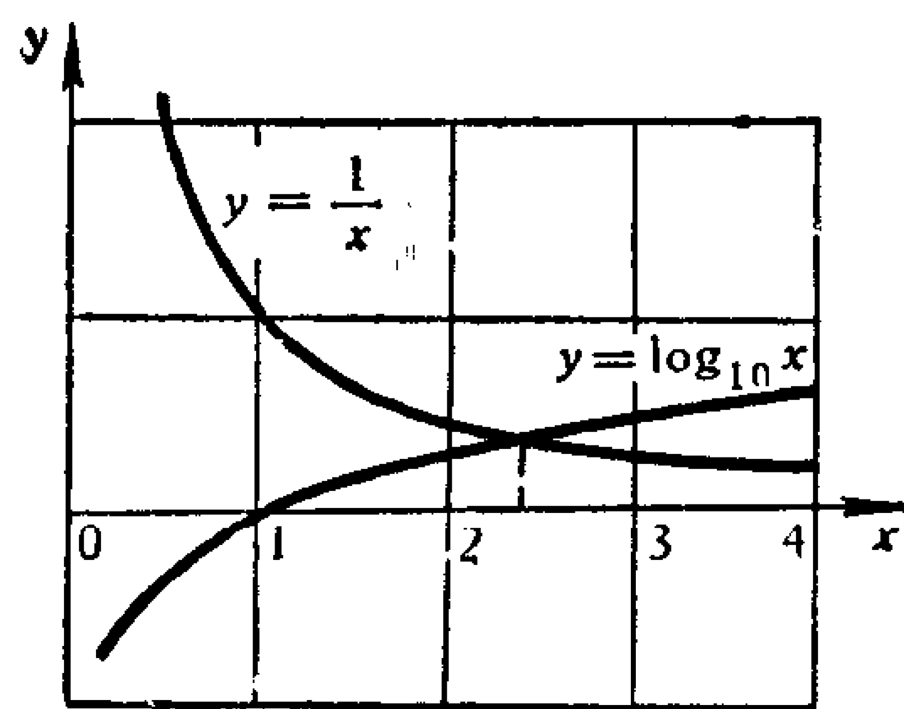


图 163

例 2. 解

$$x\cdot\log_{10}x=1.$$

用两曲綫

$$y=\log_{10}x,\quad y=\frac{1}{x}$$

的交点来預測方程的根的位置，由图中看出根是在 2 与 3 之間,我們再来进行驗算. 命 $f(x)=x\log_{10}x-1$, 則

$$f(2)=-0.39793\cdots<0,$$

$$f(3)=0.43136\cdots>0.$$

显然在 $2<x<3$ 間

$$f'(x)=\log_{10}x+\log_{10}e>0$$

$$f''(x)=\frac{\log_{10}e}{x}>0$$

我們由 $b=3$ 出发

$$b_1=3-\frac{f(3)}{f'(3)}=3-\frac{0.43136\cdots}{0.91141}=3-0.473\cdots.$$

我們取 $b_1=2.53$, $f(2.53)=0.019894\cdots$

$$b_2 = 2.53 - \frac{f(2.53)}{f'(2.53)} = 2.53 - \frac{0.019894\cdots}{0.83741} = 2.53 - 0.02375\cdots$$

再取 $b_2 = 2.5063$. 得出

$$f(2.5063) = 0.000089.$$

誤差可以估計得

$$|b_2 - \xi| < \frac{0.000089\cdots}{0.7} < 0.0002$$

(此处 $m = \min|f'(x)| > 0.7$). 所以我們所得的带有准确度的結果是

$$\xi = 2.5062(\pm 0.0001).$$

例 3. 試寻求一个求方程 $x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x = L(5 \leqslant L \leqslant 62)$的近似根(要求有三位准确)的快速解法.

这是計划工作者經常遇到的一个方程. 例如,假定一九五二年机械工业投資額是 a,第一个五年計划期間总投資額是 b. 問第一个五年計划期間的平均增长率是什么? 設平均增长率是 y, 那末

$$a[(1+y)+(1+y)^2+(1+y)^3+(1+y)^4+(1+y)^5] = b$$

作代換 $1 + y = x$, $\frac{b}{a} = L$, 就化为我們所要求的形式了.

命 $g(x) = x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x$. 我們就是要求 $f(x) = g(x) - L = 0$ 的根 ξ.

先造两个表,取分点間的距离为 0.01.

(I)

x	$g(x)$
1	5
1.01	…
⋮	⋮
1.99	…
2	62

(II)

x	$g'(x)$
1	15
1.01	…
⋮	⋮
1.99	…
2	136

对于 $5 \leqslant L \leqslant 62$ 中的 L, 由(I)可以找到 a 滿足

$$g(a) > L \geqslant g(a - 0.01). \tag{1}$$

命

$$\xi^* = a - \frac{f(a)}{f'(a)} = a - \frac{g(a) - L}{g'(a)}, \tag{2}$$

我們可証:

$$0 < \xi^* - \xi < 0.00013. \tag{3}$$

因此 ξ^* 适合我們的要求. 事实上由(1)可知

$$\xi = a + \eta, \ -0.01 < \eta \leqslant 0,$$

故由 Taylor 展开式得

$$0 = f(\xi) = f(a+\eta) = f(a) + f'(a)\eta + \frac{f''(a+\theta\eta)}{2}\eta^2, \quad 0 \leqslant \theta \leqslant 1.$$

由簡单計算,可知在 $1 \leqslant x \leqslant 2$ 时, $f'(x) > 0$, $f''(x) > 0$, $f'''(x) > 0$, $\left(\frac{f''(x-0.01)}{f'(x)}\right)' < 0$. 因此

$$\xi^* - \xi = a - \frac{f(a)}{f'(a)} - (a+\eta) = -\frac{f(a)}{f'(a)} - \eta = \frac{f''(a+\theta\eta)}{2f'(a)}\eta^2 \geqslant 0,$$

$$\xi^* - \xi = \frac{f''(a+\theta\eta)}{2f'(a)}\eta^2 < \frac{f''(a-0.01)}{2f'(a)}\eta^2 < \frac{f''(1)}{2f'(1.01)}(0.01)^2 < 0.00013.$$

故得(3)式.

§6. 联 合 法

这是插值法与 Newton 法的結合,我們只討論下面这种情形,其他情形是类似的.

若 $f(a) < 0, f(b) > 0$. 在(a, b)之中, $f'(x) > 0$, $f''(x) > 0$, 那末由 §4 与 §5 可知 $f(x) = 0$ 的根 ξ 一定滿足

$$a < x_1 < \xi < x_1' < b,$$

此处

$$x_1 = a - \frac{(b-a)f(a)}{f(b)-f(a)}, \quad x_1' = b - \frac{f(b)}{f'(b)}.$$

我們就用 x_1 与 x_1' 分别代替 a 与 b, 于是仿上又得到

$$x_2 = x_1 - \frac{(x_1'-x_1)f(x_1)}{f(x_1')-f(x_1)}, \quad x_2' = x_1' - \frac{f(x_1')}{f'(x_1')}.$$

这样一步步做下去得到

$$x_{n+1} = x_n - \frac{(x_n'-x_n)f(x_n)}{f(x_n')-f(x_n)}, \quad x_{n+1}' = x_n' - \frac{f(x_n')}{f'(x_n')},$$

而

$$a < x_{n+1} < \xi < x_{n+1}' < b.$$

这一方法的好处是由 $|x_n' - x_n|$ 就能直接判断根的近似值已达到的精确度.

例 1. 求 $f(x) = 2x^3 - x^2 - 7x + 5 = 0$ 在区間 $[-2, -1]$ 中的根 ξ.

由于在$[-2,-1]$中, $f'(x) > 0$, $f''(x) < 0$, 而 $f(-2) = -1 < 0$, $f(-1) = 9 > 0$, 所以 Newton 法应該用于左端.

$$x_1' = -2 - \frac{f(-2)}{f'(-2)} = -2 - \frac{-1}{21} = -1.952\cdots,$$

$$x_1 = -1 - \frac{f(-1)}{f(-1)-f(-2)} = -1 - \frac{9}{9-(-1)} = -1.9.$$

为簡单起見,我們都取两位小数, 显然 $\xi > -1.96$. 又經試驗可知 $f(-1.95) = 0.01775 > 0$. 将 x_1' 与 x_1 改取如下:

$$x_1' = -1.96, \quad x_1 = -1.95.$$

同法得

$$x_2' = -1.96 + \frac{0.180672}{19.9696} = -1.96 + 0.00904 = -1.95096.$$

$$x_2 = -1.95 - \frac{0.01 \cdot 0.01775}{0.01775 + 0.180672} = -1.95 - 0.00089\cdots = -1.95089\cdots.$$

因此得到

$$\xi = -1.9509 \pm 0.0001.$$

例 2. 求 $f(x) = x\sin x - 0.5 = 0$ 的根.

作出曲綫

$$y = \sin x$$

与

$$y = \frac{0.5}{x}$$

的图形可知,方程有无穷多个零点.

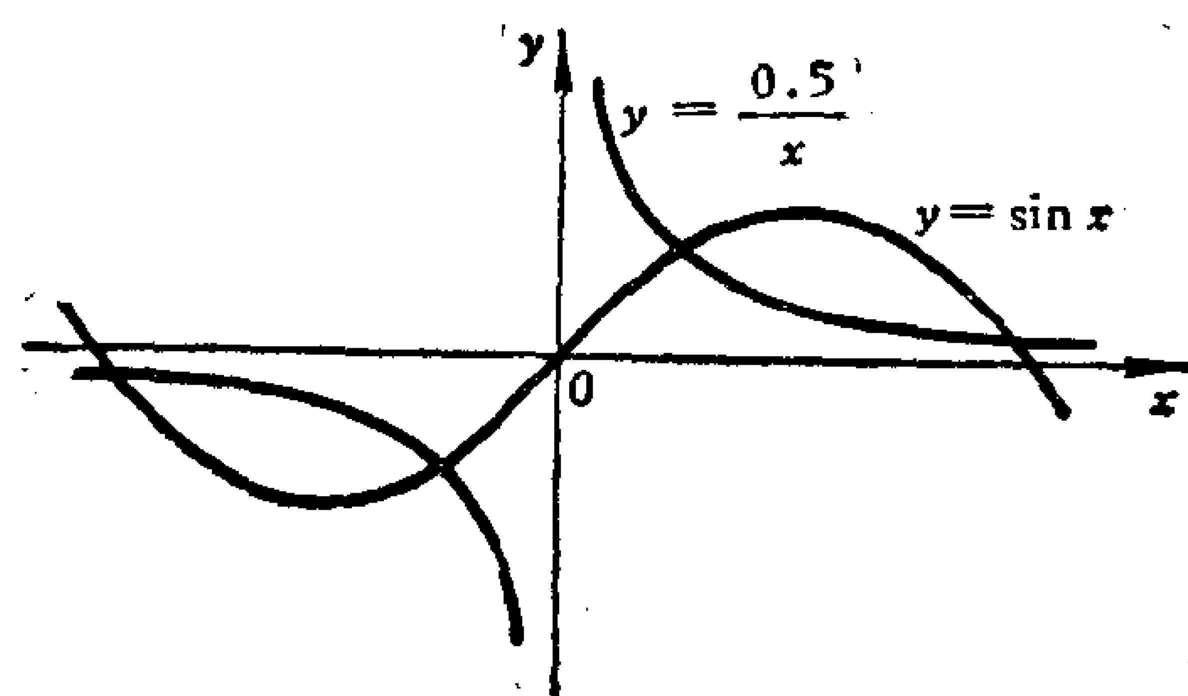


图 164

由图形可粗略看出最小正根大約是 0.7. 取

$$a = 0.6981317\cdots(=40^\circ),$$
$$b = 0.7853982\cdots(=45^\circ),$$

則

$$f(a) < 0,\ f(b) > 0;$$

又在 (a, b) 之中, $f'(x) > 0, f''(x) > 0$.

現在将計算的概要写于下:

$$x_1 = 0.6981317\cdots + 0.04194908\cdots = 0.7400807\cdots(\doteq 42^\circ 24'),$$
$$x_1' = 0.7853982\cdots - 0.0438510\cdots = 0.741547\cdots(\doteq 42^\circ 29').$$

再算一次,得

$$x_2 = 0.7400196\cdots + 0.0008211\cdots = 0.7408407\cdots,$$
$$x_2' = 0.741547\cdots - 0.0006329\cdots = 0.7409143\cdots.$$

故得

$$\xi = 0.7409 \pm 0.0001.$$

§7. 賈 宪 法

命 a 为整数, $f(x)$ 是 $[a, a+1]$ 中的連續函数. 若 $f(a) < 0$, $f(a+1) > 0$, 則在 $[a, a+1]$ 中必定有 ξ, 滿足

$$f(\xi) = 0.$$

作代換 $x = a + y$. 記

$$f(a+y) = g(y),$$

則必定有整数 b, 滿足

$$0 \leqslant b \leqslant 9,\ g\left(\frac{b}{10}\right) < 0,\quad g\left(\frac{b+1}{10}\right) > 0.$$

因此在 $\left[\frac{b}{10}, \frac{b+1}{10}\right]$ 中有 η 使

$$g(\eta) = 0,$$

即 ξ 滿足

$$a + \frac{b}{10} < \xi < a + \frac{b+1}{10}.$$

依次类推，可以逐步决定 ξ 的任意精确度的近似值.

特别当 $f(x)$ 为多項式时，計算还可以简化.

例 1. 求方程

$$f(x)=x^3-2x-5=0$$

的根 ξ.

由 $f(2)<0$, $f(3)>0$ 可知

$$2<\xi<3.$$

作代换 $x=2+y$, 得

$$f(x)=f(2+y)=g(y)=y^3+6y^2+10y-1.$$

又由 $g(0.09)<0$, $g(0.1)>0$, 可知 $g(y)=0$ 的根 η 滿足

$$0.09<\eta<0.1,$$

即

$$2.09<\xi<2.1.$$

再用此法一次. 命 $\xi=2.094+z$, 則 z 是方程

$$h(z)=z^3+6.282z^2+Az-B=0,\quad A=11.154508,\quad B=0.006153416.$$

的根.

命 $C(z)=z^3+6.282z^2$, 显然 $C(z)$ 相对于 A, B 是較小的，所以 z 的近似値由 $Az-B=0$ 来給出. 而 $\frac{B}{A}$ 在 $r=0.0005$ 与 $s=0.0006$ 之間. 由于

$$C(r)=0.00000157,\quad C(s)=0.00000226.$$

(以上两数的最后一位是正确的. 以后各数，除特殊声明外，亦然).

$$Ar-B=-0.000576,\quad As-B=0.000539.$$

因此 $h(r)<0$, $h(s)>0$, 所以

$$0.0005<z<0.0006.$$

我們再来求 z 的更精确的近似値. 命

$$h(z)=Az-D,\quad D=B-C(z),$$

則得

$$D=0.006151.$$

将 $z=D/A$ 算至六位小数如下：

```
 **   **
 11.  154 508 | 0.006151  | 0.0005514 = z
              |   5577
                   574
                   558
                    16
                    11
                     5
```

注意，在此除数只用到 11.15，幷适当注意进位. 因此

$$\xi = 2.0945514 + \cdots,$$

此处仅最后一位是 4 或 5，还无法肯定.

进而言之，由于

$$0.000551 < z < 0.000552,$$

要求$C(z)$的較精确的近似值. 显然z^3是可以忽略的，用对数：

$$\begin{array}{rl|rl}
2\log_{10}5.51 &= 1.48230 & 2\log_{10}5.52 &= 1.48388 \\
\log_{10}6.282 &= 0.79810 & \log_{10}6.282 &= 0.79810 \\
\hline
\log_{10}190.72 &= 2.28040 & \log_{10}191.42 &= 2.28198
\end{array}$$

所以

$$0.000001907 < C(z) < 0.000001915, \quad D = 0.00615150.$$

計算 D/A 如下：

```
 ** ****
11.154508 | 0.00615150 | 0.00055148
          ---------------------------
              557725
              ------
               57425
               55773
              ------
                1652
                1115
                ----
                 537
                 446
                 ---
                  91
                  89
                  --
                   2
```

因此

$$\xi = 2.094551482,$$

此处仅最后一位 2 是可疑的.

續行此法，还可以求出 ξ 更精确的近似值来.

習題 1. 求方程 $x^3 + 18x - 30 = 0$ 的根(答：1.4848066).

習題 2. 求方程 $x^4 - 12x^2 - 40x - 21 = 0$ 的两实根.

(答：4.6457513，-0.6457513).

§8. Лобачевский 法

已給方程

$$a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_{n-1}x + a_n = 0. \tag{1}$$

我們假定这个方程有 n 个实根 $x_1, x_2, \cdots, x_n$，且滿足

$$|x_1| > |x_2| > \cdots > |x_n|.$$

显然

$$a_0x^n - a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} - \cdots + (-1)^n a_n = 0 \tag{2}$$

的根是 $-x_1, -x_2, \cdots, -x_n$. 将(1)与(2)相乘得到

$$a_0^2x^{2n} + (a_0a_1 - a_0a_1)x^{2n-1} + (-a_1^2 + 2a_0a_2)x^{2n-2} + (-a_0a_3 + \\ + a_1a_2 - a_1a_2 + a_0a_3)x^{2n-3} + (a_2^2 - 2a_1a_3 + 2a_0a_4)x^{2n-4} + \cdots = 0.$$

再将 x^2 写成 z, 于是得到

$$a_0^2z^n - (a_1^2 - 2a_2a_0)z^{n-1} + (a_2^2 - 2a_1a_3 + 2a_4a_0)z^{n-2} + \cdots = 0, \tag{3}$$

但另一方面,(1)与(2)相乘得

$$(x - x_1)(x - x_2)\cdots(x - x_n)(x + x_1)(x + x_2)\cdots(x + x_n) = \\ = (z - x_1^2)\cdots(z - x_n^2) = 0,$$

故(3)的根是 $x_1^2, x_2^2, \cdots, x_n^2$. 将(3)中的 z 换为 $-z$, 則得

$$a_0^2z^n + (a_1^2 - 2a_2a_0)z^{n-1} + (a_2^2 - 2a_1a_3 + 2a_4a_0)z^{n-2} + \cdots = 0. \tag{4}$$

方程(4)的根是 $-x_1^2, -x_2^2, \cdots, -x_n^2$. 这方程 z^h 的系数是(1)中 x^h 的系数的平方,減去2倍 x^{h+1} 与 x^{h-1} 的系数的积,再加上2倍 x^{h+2} 与 x^{h-2} 的系数的积,如此等等,一直到方程的第一項或最末一項为止.

經过 h 次这样的手續,我們得到

$$x^n + b_1x^{n-1} + b_2x^{n-2} + \cdots + b_n = 0.$$

它的根都 $\leqslant 0$, 它的絕对值是所給方程(1)的根的絕对值的 2^h 次方, 即 $-x_1^{2^h}, -x_2^{2^h}, \cdots, -x_n^{2^h}$.

記 $m = 2^h$. 由于

$$x^n + b_1x^{n-1}\cdots + b_{n-1}x + b_n = (x + x_1^m)\cdots(x + x_n^m),$$

故得

$$\begin{cases} x_1^m + x_2^m + \cdots + x_n^m = b_1 \\ (x_1x_2)^m + (x_2x_3)^m + \cdots + \cdots = b_2 \\ (x_1x_2x_3)^m + (x_1x_2x_4)^m + \cdots = b_3 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ (x_1x_2\cdots x_n)^m = b_n. \end{cases}$$

将上式改写为

$$\begin{cases} x_1^m\left[1 + \left(\dfrac{x_2}{x_1}\right)^m + \left(\dfrac{x_3}{x_1}\right)^m + \cdots + \left(\dfrac{x_n}{x_1}\right)^m\right] = b_1 \\ (x_1x_2)^m\left[1 + \left(\dfrac{x_3}{x_2}\right)^m + \cdots\right] = b_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ (x_1x_2\cdots x_n)^m = b_n. \end{cases}$$

因为 $|x_1| > |x_2| > \cdots > |x_n|$, 故当 $m \to \infty$ 时, $\left(\dfrac{x_2}{x_1}\right)^m, \left(\dfrac{x_3}{x_1}\right)^m, \cdots, \left(\dfrac{x_n}{x_1}\right)^m; \left(\dfrac{x_3}{x_2}\right)^m \cdots$ 都趋于零,因此可以选取 m 充分大,使在許可的准确度之內,这些都可以略而不計. 故得

$$
\begin{cases}
x_1^m = b_1, \\
(x_1x_2)^m = b_2, \\
(x_1x_2x_3)^m = b_3, \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
(x_1x_2\cdots x_n)^m = b_n,
\end{cases}
$$

即

$$x_1^m = b_1, \ x_2^m = \frac{b_2}{b_1}, \ x_3^m = \frac{b_3}{b_2}, \ \cdots, \ x_n^m = \frac{b_n}{b_{n-1}}.$$

这样一来,我們就求得了原来方程根的絕对值,根的符号可以由直接检驗来确定.

在計算

$$x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_{n-1}x + a_n = 0$$

的根之前,可以先行代换 $x = \sqrt[n]{a_n}\, y$,于是得到

$$y^n + c_1y^{n-1} + \cdots + c_{n-1}y + 1 = 0.$$

解后者有时比較方便.

例. 解方程 $x^3 - 5x^2 - 2x + 24 = 0$.

我們将計算过程用表列出.

x^3 的系数	x^2 的系数	x 的系数	常数项	方程的根的方次数
$a_0 = 1$	$a_1 = -5$	$a_2 = -2$	$a_3 = 24$	1
$\log a_0 = 0$	$a_1^2 = (-5)^2 = 25$ $-2a_2a_0 = -2(-2)\times 1 = 4$ $a_1^2 - 2a_2a_0 = 25 + 4 = 29$ $\log 29 = 1.4624$	$(-2)^2 = 4$ $-2\times 24\times(-5) = 240$ $4 + 240 = 244$ $\log 244 = 2.3874$	$24^2 = 576$ $\log 576 = 2.7604$	
0	$\log b_1 = 1.4624$	$\log b_2 = 2.3874$	$\log b_3 = 2.7604$	2
	$b_1' = b_1^2 - 2b_0b_2 = 353.1$ $\log b_1' = 2.5479$	$b_2' = b_2^2 - 2b_1b_3 = 2.614\times 10^4$ $\log b_2' = 4.4173$	$\log b_3' = 2\log b_3 = 5.5208$	
0	$\log b_1' = 2.5479$	$\log b_2 = 4.4173$	$\log b_3' = 5.5208$	4
0	$\log b_1'' = 4.8597$	$\log b_2'' = 8.6522$	$\log b_3'' = 11.0416$	8
0	$\log b_1^{(3)} = 9.6378$	$\log b_2^{(3)} = 17.2688$	$\log b_3^{(3)} = 22.0832$	16
0	$\log b_1^{(4)} = 19.2672$	$\log b_2^{(4)} = 34.5362$	$\log b_3^{(4)} = 44.1664$	32
0	$\log b_1^{(5)} = 38.5343$	$\log b_2^{(5)} = 69.0724$	$\log b_3^{(5)} = 88.3328$	64

由

$$\log |x_1^{64}| = 38.5343$$

得

$$|x_1| = 4.$$

同样可知 $|x_2| = 3$, $|x_3| = 2$. 經过直接检查可知 $x_1 = 4$, $x_2 = 3$, $x_3 = -2$.

补　　充

§9. 实数根的几个定理

給定实系数多項式

$$P_n(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_n = 0,$$

我們知道它有 n 个根.

在前面几节的討論中,都是限于找寻方程的近似实数解,但是 $P_n(x)$ 什么时候有实数解? 有多少个实数解? 在什么区間有多少个实数解? 这些問題还未解决.

討論 $P_n(x)$ 的逐次微商組

$$P_n(x),\ P_n'(x),\ P_n''(x),\ \cdots,\ P_n^{(n)}(x). \tag{1}$$

如果实数 c 不为多項式組(1)中任一式的根,那么以 $S(c)$ 記下列序数的变号次数:

$$P_n(c),\ P_n'(c),\ P_n''(c),\ \cdots,\ P_n^{(n)}(c).$$

当 x 增大,不經过 (1) 中任一式的根时, $S(x)$ 不可能有变化. 因之,只要討論 x 經过 $P_n(x)$的根与P 任一微商 $P_n^{(k)}(x)(1 \leqslant k \leqslant n-1)$的根时的情况.

設 α 为 $P_n(x)$ 的 l 重根, $l \geqslant 1$, 即

$$P_n(\alpha) = P_n'(\alpha) = \cdots = P_n^{(l-1)}(\alpha) = 0,\ P_n^{(l)}(\alpha) \neq 0.$$

取 ε 充分小,使在 $(\alpha-\varepsilon, \alpha+\varepsilon)$ 中不含 $P_n(x), P_n'(x), \cdots, P_n^{(l-1)}(x)$的 α 以外的其他根,同时亦不含多項式 $P_n^{(l)}(x)$ 的任一根. 我們来証明,数組

$$P_n(\alpha-\varepsilon),\ P_n'(\alpha-\varepsilon),\cdots,\ P_n^{(l-1)}(\alpha-\varepsilon),\ P_n^{(l)}(\alpha-\varepsilon)$$

中任二相邻的数都是反号的,而所有的数

$$P_n(\alpha+\varepsilon),\ P_n'(\alpha+\varepsilon),\cdots,\ P_n^{(l-1)}(\alpha+\varepsilon),\ P_n^{(l)}(\alpha+\varepsilon)$$

都是同号的. 因为組(1)除 $P_n(x)$ 外, 每一个多項式都是它的前一个多項式的微商,所以我們只要証明, 如果 x 經过多項式 $P_n(x)$ 的根 α, 那么和这一根的重数无关, 在經过以前, $P_n(x)$ 与 $P_n'(x)$ 反号,而在經过之后它們是同号的. 如果 $P_n(\alpha-\varepsilon) > 0$, 那末在 $(\alpha-\varepsilon, \alpha)$中 $P_n(x)$是減少的,因而 $P_n'(\alpha-\varepsilon) < 0$; 如果 $P_n(\alpha-\varepsilon) < 0$, 那么 $P_n(x)$是增加的, 因而 $P_n'(\alpha-\varepsilon) > 0$. 故在这二种情形, 它們的符号都是相反的. 同样可以証明, $P_n(\alpha+\varepsilon)$ 与 $P_n'(\alpha+\varepsilon)$ 是同号的. 这就証明,当 x 經过 $P_n(x)$ 的 l 重根时,組

$$P_n(x),\ P_n'(x),\cdots,\ P_n^{(l-1)}(x),\ P_n^{(l)}(x)$$

失去 l 个变号.

設 α 为微商

$$P_n^{(k)}(x),\ P_n^{(k+1)}(x),\ \cdots,\ P_n^{(k+l-1)}(x),\ 1 \leqslant k \leqslant n-1,\ l \geqslant 1$$

的根,但不是 $P_n^{(k-1)}(x)$ 及 $P_n^{(k+l)}(x)$ 的根. 从上面証明推知,当 x 經过 α 时,組

$$P_n^{(k)}(x),\ P_n^{(k+1)}(x),\cdots,\ P_n^{(k+l-1)}(x),\ P_n^{(k+l)}(x)$$

将丧失 l 个变号, 但在 $P_n^{(k-1)}(x)$ 与 $P_n^{(k)}(x)$ 間可能得出一个新的变号. 由 $l \geqslant 1$, 当 x

經过 α 时

$$P_n^{(k-1)}(x),\ P_n^{(k)}(x),\cdots,\ P_n^{(k+l)}(x)$$

的变号数可能不变亦可能减少，因为当 x 經过值 α 时，多項式 $P_n^{(k-1)}(x)$ 与 $P_n^{(k+l)}(x)$ 的符号不变，如其变号数减少，则必减少一个正偶数。

因之得到：如果 a 与 $b(a<b)$ 都不是多項式組(1)中任一式的根，那末在 a,b 間多項式 $P_n(x)$ 的实根数（l 重根以 l 个計算）等于差 $S(a)-S(b)$ 或比这个数少一正偶数。后者对应于在 a,b 間存在 c,c 不是 $P_n(x)$ 的根，但是 $P_n^{(k)}(x)$ $(k\geqslant 1)$ 的根的情况。

为了减輕加在 a 与 b 上的限制，設 c 不是 $P_n(x)$ 的根，但可能是(1)中其他多項式的根。以 $S_+(c)$ 表这些数

$$P_n(c),\ P_n'(c),\cdots,\ P_n^{(n-1)}(c),\ P_n^{(n)}(c) \tag{2}$$

的变号数，其計算法如次：如

$$P_n^{(k)}(c)=P_n^{(k+1)}(c)=\cdots=P_n^{(k+l-1)}(c)=0, \tag{3}$$

但

$$P_n^{(k-1)}(c)\neq 0,\ P_n^{(k+l)}(c)\neq 0, \tag{4}$$

那么視 $P_n^{(k)}(c),\ P_n^{(k+1)}(c),\cdots,\ P_n^{(k+l-1)}(c)$ 与 $P_n^{(k+l)}(c)$ 同号，以 $S_-(c)$ 表(2)的另一变号数：如有(3)与(4)的情形，若 $l-i$ 是一个偶数，那么視 $P_n^{(k+i)}(c)$，$0\leqslant i\leqslant l-1$ 与 $P_n^{(k+l)}(c)$ 同号，若 $l-i$ 是一个奇数，则視为反号。

取 ε 充分小，使 $(a,a+2\varepsilon)$ 不含 $P_n(x)$ 的根且亦不含(1)中所有其余多項式的不等于 a 的根，取 η 充分小，使 $(b-2\eta,b)$ 中不含 $P_n(x)$ 的根，亦不含組(1)中其他多項式的不等于 b 的根。于是 $S(a+\varepsilon)=S_+(a)$，$S(b-\eta)=S_-(b)$，我們有：

Budan 定理. 如果实数 $a<b$，a 和 b 都不是实系数多項式 $P_n(x)$ 的根，那末多項式 $P_n(x)$ 在 a 与 b 間的实根数（l 重根以 l 个計算）等于差 $S_+(a)-S_-(b)$ 或比这个数少一正偶数.

x 很大时，可使(1)中多項式对应于这个值的符号都与首項符号相同，而这些系数順次为 $a_0,\ na_0,\ n(n-1)a_0,\cdots n!a_0$，它們的符号相同，故 $S(x)=S_-(x)=0$。另一方面

$$f(0)=a_n,\ f'(0)=a_{n-1},\ f''(0)=a_{n-2}2!,\cdots,\ f^{(n)}(0)=a_0\cdot n!.$$

故得：

Descartes 定理. 多項式 $P_n(x)$ 的正根个数（l 重根以 l 个計算），等于这一多項式的系数組（等于零的系数不予計入）的变号数或比这一个数少一个正偶数.

为了定出負根个数，考虑 $P_n(-x)$ 易得：

如果 $P_n(x)$ 沒有等于零的系数，那么它的負根个数（重根以其重数来計算）等于其系数組中的同号数，或比这个数少一正偶数.

§ 10. Sturm 定 理

上一节中給出了一些簡便的方法定出多項式 $P_n(x)$ 的实根个数的上限，但并未得到根的个数的确切数字. 这个問題为以下的 Sturm 定理所完全解决.

設 $P_n(x)$ 沒有重根，記 $Q_1(x) = P'_n(x)$ 以 $Q_1(x)$ 除 $P_n(x)$，得

$$P_n(x) = Q_1(x)q_1(x) - Q_2(x).$$

同样的定义

$$Q_{k-1}(x) = Q_k(x)q_k(x) - Q_{k+1}(x).$$

考慮

$$Q_0(x) = P_n(x),\ Q_1(x),\ \cdots Q_s(x), \tag{1}$$

由于 $P_n(x)$ 无重根，所以 $P_n(x)$ 与 $P'_n(x)$ 互素(即无公因式)，因而 $Q_s(x)$ 是一个不等于零的实数，而且(1)中相邻二个多項式沒有公根．如果 $Q_k(x)$ 与 $Q_{k+1}(x)$ 有公根α，那末 α 也是 $Q_{k-1}(x)$的根，也是 $Q_{k-2}(x)$的根，…，最后得到 $Q_0(x)$ 与 $Q_1(x)$ 有公根，这导出 $P_n(x)$ 有重根，这与假設矛盾．如果 $Q_k(\alpha) = 0$，那末 $Q_{k-1}(\alpha) = -Q_{k+1}(\alpha)$，即如果 α 是(1)中某一个多項式 $Q_k(x)$ 的根，那末它們相邻二个多項式的值反号．最后，可以看出，如果 α 是 $P_n(x)$ 的实根，那末 $P_n(x)P'_n(x)$ 在 $x = \alpha$ 处为增加函数．因为：如果 $P_n(x)$ 在 $x = \alpha$ 时增加，那末 $P'_n(\alpha) > 0$，所以 $P_n(x)P'_n(x)$ 是增加的；如果 $P_n(x)$ 在 $x = \alpha$ 是減少的，那么 $P'_n(\alpha) < 0$，因而 $P_n(x)P'_n(x)$仍然是增加的．

如果 c 不是 $P_n(x)$ 的根，考慮

$$P_n(c),\ Q_1(c),\ Q_2(c),\cdots,\ Q_s(c)$$

删去它里面等于零的数，以 $W(c)$記余下来这組数的变号数；称 $W(c)$ 为当 $x = c$ 的多項式 $P_n(x)$ 的 Sturm 組(1)的变号数，于是我們有

Sturm 定理． 如果实数 $a < b$，a 与 b 都不是多項式 $P_n(x)$ 的根，且 $P_n(x)$ 沒有重根，那么 $W(a) \geqslant W(b)$，而且差数 $W(a) - W(b)$ 等于 $P_n(x)$ 在 a 与 b 間的实根个数．

証． 当 x 增大而不經过 Sturm 組(1)中任一多項式的根时，其序列中多項式的符号都沒有变更，因而 $W(x)$ 无变动．由于 $Q_s(x)$ 是一个常数，所以我們只要討論 x 經过 $Q_k(x)$，$1 \leqslant k \leqslant s-1$ 的某一个多項式的根与 x 經过 $P_n(x)$ 的根．

設 α 是 $Q_k(x)(1 \leqslant k \leqslant s-1)$ 的根，那末由 $Q_k(x)$ 的定义，$Q_{k-1}(\alpha)$ 与 $Q_{k+1}(\alpha)$ 都不为零．取适当小的 $\varepsilon > 0$，使 $Q_{k-1}(x)$ 与 $Q_{k+1}(x)$ 在 $(\alpha - \varepsilon,\ \alpha + \varepsilon)$ 中无根，因而符号不变，但是我們已知它們的符号是相反的，因此，每一組数

$$Q_{k-1}(\alpha - \varepsilon),\ Q_k(\alpha - \varepsilon),\ Q_{k+1}(\alpha - \varepsilon)$$

与

$$Q_{k-1}(\alpha + \varepsilon),\ Q_k(\alpha + \varepsilon),\ Q_{k+1}(\alpha + \varepsilon)$$

都恰好有一个变号，且与 $Q_k(\alpha - \varepsilon)$，$Q_k(\alpha + \varepsilon)$的符号无关，因为当 x 經过 Sturm 組中多項式的某一个多項式的根时，只是这組的符号有所变动，但是变号数旣无增多亦未減少，故这种变动不使 $W(x)$ 改变．

另一方面，如 α 是 $P_n(x)$ 的根，由于 $P_n(x)$ 无重根，所以 α 不是 $Q_1(x)$ 的根，所以有 $\varepsilon > 0$，使 $(\alpha - \varepsilon,\ \alpha + \varepsilon)$ 內不含有 $Q_1(x)$ 的根，因而 $Q_1(x)$ 在这一区間內符号不变．如果符号是正的，那末由于 $P_n(x)Q_1(x)$ 在 $x = \alpha$ 是增加函数，所以 $P_n(\alpha - \varepsilon) < 0$，$P_n(\alpha + \varepsilon) > 0$．故数列

$$P_n(\alpha-\varepsilon),\ P'_n(\alpha-\varepsilon) \text{ 与 } P_n(\alpha+\varepsilon),\ P'_n(\alpha+\varepsilon) \tag{2}$$

各有符号

$$-,+,\ 与\ +,+,$$

亦即 Sturm 組失去一个变号．如果 $P'_n(x)$在$(\alpha-\varepsilon,\ \alpha+\varepsilon)$中$<0$，那末(2)的符号为

$$+,-,与-,-,$$

也失去了一个符号，因此

$W(x)$ 在 x 經过多項式 $P_n(x)$ 的根，而且只在这一情形，$W(x)$ 才減少一个单位数。

例． $h(x)=x^5+2x^4-5x^3+8x^2-7x-3$.

我們不必先去判断 $h(x)$ 有无重根，因为在构造 Sturm 組时，同时也驗証了 $h(x)$ 与 $h'(x)$ 之間是否互素。

$$\begin{aligned}
h(x) &= x^5+2x^4-5x^3+8x^2-7x-3,\\
h'(x) &= 5x^4+8x^3-15x^2+16x-7,\\
h_2(x) &= 66x^3-150x^2+172x+61,\\
h_3(x) &= -464x^2+1135x+723,\\
h_4(x) &= -32599457x-8486093,\\
h_5(x) &= -1.
\end{aligned}$$

造表

	$h(x)$	$h'(x)$	$h_2(x)$	$h_3(x)$	$h_4(x)$	$h_5(x)$	变号数
$-\infty$	$-$	$+$	$-$	$-$	$+$	$-$	4
∞	$+$	$+$	$+$	$-$	$-$	$-$	1

因之，$h(x)$ 有三个实根。

第九章　不定积分

§1. 换变数法則

在第六章已經得出一批簡单的积分公式，本章的目的在于較詳尽地介紹一些求原函数的方法，并且算出一些常見函数的积分.

首先我們介紹換变数法．有时用新变量 t 代替 x，可以使积分 $\int f(x)dx$ 簡化．設旧变量和新变量的关系是

$$x=\varphi(t), \tag{1}$$

則

$$\int f(x)dx=\int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt+C. \tag{2}$$

要証明这个式子十分容易，对 x 求微分得

$$d\left(\int f(x)dx\right)=f(x)dx=f(\varphi(t))\varphi'(t)dt=d\left(\int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt\right),$$

卽得所証.

例 1.　求 $\int\frac{dx}{ax+b}$.

命 $ax+b=t$，則

$$\int\frac{dx}{ax+b}=\frac{1}{a}\int\frac{dt}{t}=\frac{1}{a}\log t+C=\frac{1}{a}\cdot\log(ax+b)+C.$$

例 2.　求 $\int\frac{dx}{a^2+x^2}$.

命 $\frac{x}{a}=t$，則

$$\int\frac{dx}{a^2+x^2}=\int\frac{dx}{a^2\left(1+\left(\frac{x}{a}\right)^2\right)}=\frac{1}{a}\int\frac{dt}{1+t^2}$$

$$=\frac{1}{a}\operatorname{tg}^{-1}t+C=\frac{1}{a}\operatorname{tg}^{-1}\frac{x}{a}+C.$$

也可以命 $x=a\operatorname{tg}t$，則

$$\int\frac{dx}{a^2+x^2}=\int\frac{a\sec^2 t}{a^2\sec^2 t}dt=\frac{1}{a}t+C=\frac{1}{a}\operatorname{tg}^{-1}\frac{x}{a}+C.$$

例 3.　求 $\int\frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}}$.

命 $\frac{x}{a}=t$，同上例可知

$$\int\frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}}=\int\frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}=\sin^{-1}t+C=\sin^{-1}\frac{x}{a}+C.$$

也可以命 $x=a\sin\theta$，则得

$$\int\frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}}=\int\frac{a\cos\theta d\theta}{\sqrt{a^2-a^2\sin^2\theta}}=\int d\theta=\theta+C=\sin^{-1}\frac{x}{a}+C.$$

例 4. 求 $\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+a}}$.

命 $\sqrt{x^2+a}=t-x$，则

$$x^2+a=t^2+x^2-2tx,$$

$$x=\frac{1}{2}\left(t-\frac{a}{t}\right),\qquad dx=\frac{1}{2}\left(1+\frac{a}{t^2}\right)dt.$$

因此

$$\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+a}}=\int\frac{2t}{t^2+a}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{t^2+a}{t^2}dt=\int\frac{dt}{t}$$

$$=\log t+C=\log(\sqrt{x^2+a}+x)+C.$$

例 5. 求 $\int\sin^3x\cos x\,dx$.

命 $\sin x=t$，则

$$\int\sin^3x\cos x\,dx=\int\sin^3x\,d\sin x=\int t^3dt$$

$$=\frac{t^4}{4}+C=\frac{\sin^4x}{4}+C.$$

例 6. 求 $\int\frac{\log x}{x}dx$.

命 $\log x=t$，则

$$\int\frac{\log x}{x}dx=\int t\,dt=\frac{t^2}{2}+C=\frac{\log^2x}{2}+C.$$

例 7. 求 $\int\operatorname{tg}x\,dx$.

命 $\cos x=t$，则

$$\int\operatorname{tg}x\,dx=-\int\frac{d\cos x}{\cos x}=-\int\frac{dt}{t}=-\log t+C=-\log\cos x+C.$$

例 8. 求 $\int\frac{dx}{\sqrt{(x-\alpha)(\beta-x)}}\ (\alpha<x<\beta)$.

命 $x=\alpha\cos^2\theta+\beta\sin^2\theta$，则

$$x-\alpha=\alpha\cos^2\theta+\beta\sin^2\theta-\alpha(\cos^2\theta+\sin^2\theta)=(\beta-\alpha)\sin^2\theta,$$

$$\beta-x=(\beta-\alpha)\cos^2\theta,$$

$$dx=2(\beta-\alpha)\sin\theta\cos\theta d\theta.$$

因此

$$\int\frac{dx}{\sqrt{(x-\alpha)(\beta-x)}}=2\int d\theta=2\theta+C=2\operatorname{tg}^{-1}\sqrt{\frac{x-\alpha}{\beta-x}}+C.$$

习题 1. 求 $\int (ax+b)^m dx \quad (m \neq -1)$.

习题 2. 求 $\int \sin^3 x dx$.

习题 3. 求 $\int \mathrm{ctg}\, x dx$.

习题 4. 求 $\int \frac{dx}{\sqrt{x}(1+\sqrt[3]{x})}$.

习题 5. 求 $\int e^{x^2} x dx$.

习题 6. 求 $\int \frac{dx}{A^2\sin^2 x + B^2\cos^2 x}$.

提示：作变数代换 $\mathrm{tg}\, x = t$.

习题 7. 求 $\int \frac{dx}{\sin x}$.

§2. 分部积分法

分部积分法所根据的公式是

$$d(uv) = udv + vdu,$$

由此可以得出

$$\int udv = uv - \int vdu.$$

如果 $u = f(x)$, $v = g(x)$ 都是 x 的函数，則

$$\int f(x)g'(x)dx = f(x)g(x) - \int g(x)f'(x)dx.$$

例 1. 求积分 $\int x\cos x dx$.

命 $u = x$, $dv = \cos x\, dx$, 則

$$du = dx, \quad v = \sin x$$

(此处沒有必要写上常数項). 因此

$$\int x\cos x dx = \int x d\sin x = x\sin x - \int \sin x dx = x\sin x + \cos x + C.$$

这个方法，使原来求 $x\cos x$ 的积分的較难問題一变而为求 $\sin x$ 的积分的較易問題.

分部积分的公式，还可以做以下的推广：假定 u 与 v 各有 $(n+1)$ 級的微商

$$u', v', u'', v'', \cdots, u^{(n+1)}, v^{(n+1)}.$$

运用分部积分法可知

$$\int uv^{(n+1)}dx = \int udv^{(n)} = uv^{(n)} - \int v^{(n)}du = uv^{(n)} - \int v^{(n)}u'\, dx,$$

同样地，得到

$$\int u'v^{(n)}dx = u'v^{(n-1)} - \int u''v^{(n-1)}dx,$$

$$\int u''v^{(n-1)}dx = u''v^{(n-2)} - \int u'''v^{(n-2)}dx,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\int u^{(n)}v'dx = u^{(n)}v - \int u^{(n+1)}vdx.$$

逐步代入，即得

$$\int uv^{(n+1)}dx = uv^{(n)} - u'v^{(n-1)} + u''v^{(n-2)} - \cdots +$$

$$+ (-1)^n u^{(n)}v + (-1)^{n+1}\int u^{(n+1)}vdx.$$

如果 u 是一个 x 的 n 次多项式，则 $u^{(n+1)} = 0$，左端的式子就表达了右端的积分。

例 2. 求 $\int x^3 \log x\, dx$.

命 $u = \log x$, $dv = x^3\, dx$，则

$$du = \frac{dx}{x},\quad v = \frac{x^4}{4}.$$

因此

$$\int x^3 \log x\, dx = \frac{1}{4}x^4 \log x - \frac{1}{4}\int x^3 dx = \frac{1}{4}x^4 \log x - \frac{1}{16}x^4 + C.$$

例 3. 求 $\int \mathrm{tg}^{-1} x\, dx$.

命 $u = \mathrm{tg}^{-1} x$, $dv = dx$，则

$$\int \mathrm{tg}^{-1} x\, dx = x\,\mathrm{tg}^{-1} x - \int x d\,\mathrm{tg}^{-1} x = x\,\mathrm{tg}^{-1} x - \int \frac{x}{1+x^2}\, dx$$

$$= x\,\mathrm{tg}^{-1} x - \frac{1}{2}\log(x^2+1) + C.$$

例 4. 求 $\int x^2 \sin x\, dx$.

命 $u = x^2$, $dv = \sin x\, dx$，则由例 1 可知

$$\int x^2 \sin x\, dx = \int x^2 d(-\cos x) = -x^2 \cos x - \int (-\cos x)\, dx^2$$

$$= -x^2 \cos x + 2\int x \cos x\, dx$$

$$= -x^2 \cos x + 2(x \sin x + \cos x) + C.$$

例 5. 求 $\int xe^{ax} dx$.

命 $u = x$, $dv = e^{ax} dx$，则

$$\int xe^{ax} dx = \frac{1}{a} xe^{ax} - \frac{1}{a}\int e^{ax} dx = \frac{1}{a} xe^{ax} - \frac{1}{a^2} e^{ax} + C.$$

例 6. 求 $\int e^{ax} \cos bx\, dx$ 及 $\int e^{ax} \sin bx\, dx$.

分别命 $u = \cos bx$, $dv = e^{ax}\, dx$ 及 $u = \sin bx$, $dv = e^{ax}\, dx$，则得

$$\int e^{ax} \cos bx\, dx = \frac{1}{a} e^{ax} \cos bx + \frac{b}{a}\int e^{ax} \sin bx\, dx,$$

$$\int e^{ax}\sin bx\,dx = \frac{1}{a}e^{ax}\sin bx - \frac{b}{a}\int e^{ax}\cos bx\,dx.$$

这样一来,两个积分中的每一积分都能用另一积分来表达,因此由这两个式子解出

$$\int e^{ax}\cos bx\,dx = \frac{b\sin bx + a\cos bx}{a^2+b^2}e^{ax} + C,$$

$$\int e^{ax}\sin bx\,dx = \frac{a\sin bx - b\cos bx}{a^2+b^2}e^{ax} + C'.$$

例 7. 求 $J_n = \int \frac{dx}{(x^2+a^2)^n}$.

命 $u = \frac{1}{(x^2+a^2)^n}$, $dv = dx$, 則

$$J_n = \int \frac{dx}{(x^2+a^2)^n} = \frac{x}{(x^2+a^2)^n} + 2n\int \frac{x^2}{(x^2+a^2)^{n+1}}dx.$$

由于

$$\int \frac{x^2}{(x^2+a^2)^{n+1}}dx = \int \frac{(x^2+a^2)-a^2}{(x^2+a^2)^{n+1}}dx$$

$$= \int \frac{dx}{(x^2+a^2)^n} - a^2\int \frac{dx}{(x^2+a^2)^{n+1}} = J_n - a^2 J_{n+1},$$

因此

$$J_n = \frac{x}{(x^2+a^2)^n} + 2n(J_n - a^2 J_{n+1}),$$

卽

$$J_{n+1} = \frac{1}{2na^2}\cdot\frac{x}{(x^2+a^2)^n} + \frac{2n-1}{2n}\cdot\frac{1}{a^2}J_n.$$

这一公式称为所要求的积分 J_n 的循环公式，它把积分 J_{n+1} 的計算化为 J_n 的計算. 由例 1.2 可知

$$J_1 = \frac{1}{a}\operatorname{tg}^{-1}\frac{x}{a} + C.$$

故由循环公式可知

$$J_2 = \frac{1}{2a^2}\cdot\frac{x}{x^2+a^2} + \frac{1}{2a^3}\operatorname{tg}^{-1}\frac{x}{a} + C',$$

$$J_3 = \frac{1}{4a^2}\cdot\frac{x}{(x^2+a^2)^2} + \frac{3}{8a^4}\cdot\frac{x}{x^2+a^2} + \frac{3}{8a^5}\operatorname{tg}^{-1}\frac{x}{a} + C''.$$

等等.

附記. 分部积分法可以用来处理一般的反函数积分問題,因为

$$\int f(x)dx = xf(x) - \int x\,df(x).$$

由 $f(x)=y$, 得到反函数 $x=g(y)$, 則得

$$\int f(x)dx = xf(x) - \int g(y)dy.$$

習題 1. 求 $\int \sin^{-1}x\,dx$.

習題 2.　命 $P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_0$, 求

$$\int P(x)e^{ax}dx, \int P(x)\sin ax\,dx, \int P(x)\cos bx dx.$$

習題 3.　命 $J_{k,m} = \int x^k \log^m x\,dx (k \neq -1)$,

求証:

$$J_{k,m} = \frac{1}{k+1}x^{k+1}\log^m x - \frac{m}{k+1}J_{k,m-1}.$$

并具体算出 $J_{3,2}$.

習題 4.　命 $I_n = \int x^n e^{ax}\sin bx\,dx$, $J_n = \int x^n e^{ax}\cos bx\,dx$,

求証:

$$I_n = x^n\frac{a\sin bx - b\cos bx}{a^2+b^2}e^{ax} - \frac{na}{a^2+b^2}I_{n-1} + \frac{nb}{a^2+b^2}J_{n-1},$$

$$J_n = x^n\frac{b\sin bx + a\cos bx}{a^2+b^2}e^{ax} - \frac{nb}{a^2+b^2}I_{n-1} - \frac{na}{a^2+b^2}J_{n-1}.$$

并具体算出 I_1 及 J_1.

§3. 分項积分法

先从一个例題說起.

例 1.　求积分

$$\int\frac{dx}{x^2-a^2}.$$

由于

$$x^2 - a^2 = (x-a)(x+a),$$

我們引进以下的分項分数法. 定出 A 与 B 使

$$\frac{1}{x^2-a^2} = \frac{A}{x-a} + \frac{B}{x+a}.$$

通分后比較分子的系数可知,

$$a(A-B) = 1,\ A+B = 0.$$

卽得

$$A = -B = \frac{1}{2a},$$

因此

$$\frac{1}{x^2-a^2} = \frac{1}{2a}\left(\frac{1}{x-a} - \frac{1}{x+a}\right).$$

所求的积分就是

$$\int\frac{dx}{x^2-a^2} = \frac{1}{2a}\left(\int\frac{dx}{x-a} - \int\frac{dx}{x+a}\right) = \frac{1}{2a}\log\left|\frac{x-a}{x+a}\right| + C.$$

更一般些,有

例 2.　求积分

$$\int\frac{mx+n}{x^2+px+q}dx.$$

配平方得

$$x^2+px+q=\left(x+\frac{p}{2}\right)^2+q-\frac{p^2}{4}.$$

命 $t=x+\frac{p}{2}$, $A=m$, $B=n-\frac{1}{2}mp$ 及 $\pm a^2=q-\frac{p^2}{4}$, 則

$$\int\frac{mx+n}{x^2+px+q}\,dx=\int\frac{At+B}{t^2\pm a^2}\,dt.$$

积分

$$A\int\frac{tdt}{t^2\pm a^2}=\frac{A}{2}\int\frac{d(t^2\pm a^2)}{t^2\pm a^2}=\frac{A}{2}\log|t^2\pm a^2|+C.$$

由例 1.2 可知

$$B\int\frac{dt}{t^2+a^2}=\frac{B}{a}\operatorname{tg}^{-1}\frac{t}{a}+C.$$

由例 1 知

$$B\int\frac{dt}{t^2-a^2}=\frac{B}{2a}\log\left|\frac{t-a}{t+a}\right|+C,$$

因而得到:如果 $p^2>4q$, 則

$$\int\frac{mx+n}{x^2+px+q}\,dx=\frac{m}{2}\log|x^2+px+q|+$$

$$+\frac{2n-mp}{2\sqrt{p^2-4q}}\log\left|\frac{2x+p-\sqrt{p^2-4q}}{2x+p+\sqrt{p^2-4q}}\right|+C.$$

如果 $p^2<4q$, 則

$$\int\frac{mx+n}{x^2+px+q}\,dx=\frac{m}{2}\log(x^2+px+q)+\frac{2n-mp}{\sqrt{4q-p^2}}\operatorname{tg}^{-1}\frac{2x+p}{\sqrt{4q-p^2}}+C.$$

为了配合以下两节的目的,我們概括一下我們已經得到的一些結果。

我們已經会求以下五种函数的积分:

I. 多項式,

II. $\frac{A}{x-a}$,

III. $\frac{A}{(x-a)^k}$ $(k=2,3,\cdots\cdots)$,

IV. $\frac{Mx+N}{x^2+px+q}$, $p^2-4q<0$,

V. $\frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^m}$ $(m=2,3,\cdots\cdots)$, $(p^2-4q<0)$.

关于 V, 乃用代换 $t=x+\frac{p}{2}$, 于是

$$\int\frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^m}\,dx=\frac{M}{2}\int\frac{2tdt}{(t^2+a^2)^m}+\left(N-\frac{Mp}{2}\right)\int\frac{dt}{(t^2+a^2)^m}.$$

右端第一个积分可以直接算出：

$$\int \frac{2tdt}{(t^2+a^2)^m} = -\frac{1}{m-1}\cdot\frac{1}{(t^2+a^2)^{m-1}} + C = -\frac{1}{m-1}\cdot\frac{1}{(x^2+px+q)^{m-1}} + C.$$

右端第二个积分的算法見例 2.7.

以下两节的目的，在于証明用分項分数法，任何有理函数的积分都可以成为以上五种函数的积分之和。

§ 4. 有理分式的积分

若 $F(x)$ 与 $G(x)$ 为实系数的多項式，則 $F(x)/G(x)$ 就称为有理分式，特别当 $F(x)$ 的次数低于 $G(x)$ 的次数时，就称为眞分式。由除法可知，任一有理分式可以写成

$$\frac{F(x)}{G(x)} = H(x) + \frac{P(x)}{Q(x)},$$

此处 $H(x)$ 是实系数的多項式，而 $P(x)/Q(x)$ 是旣約的眞分式(卽 $P(x)$ 的次数小于 $Q(x)$，且不存在次数大于 0 的多項式，同时除尽 $P(x)$ 与 $Q(x)$)。

因此，有理分式的积分問題化为眞分式的积分問題了。

定理 1. 任一眞分式

$$P(x)/Q(x)$$

是 § 3 型 II, III, IV, V 的眞分式的和。

証：命 $Q(x) = (x-a)^k\cdots(x^2+px+q)^m\cdots$.

1) 若 $Q(x) = (x-a)^k Q_1(x)$, $Q_1(a) \neq 0$, $k \geqslant 1$, 要証明存在 A 及 $P_1(x)$, 使

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{A}{(x-a)^k} + \frac{P_1(x)}{(x-a)^{k-1}Q_1(x)}.$$

等式双方乘以 $Q(x)$ 得

$$P(x) = AQ_1(x) + (x-a)P_1(x).$$

由 $Q_1(a) \neq 0$ 得

$$A = \frac{P(a)}{Q_1(a)}.$$

卽取这样的 A, 則 $P(x) - AQ_1(x)$ 一定可为 $x-a$ 除尽，因而定出 $P_1(x)$ 来，卽得所証.

2) 若 $Q(x) = (x^2+px+q)^m Q_1(x)$, $(p^2 < 4q)$, 而 $Q_1(x)$ 不含有因子 x^2+px+q, 要証明存在常数 M, N 及多項式 $P_1(x)$ 使

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^m} + \frac{P_1(x)}{(x^2+px+q)^{m-1}Q_1(x)}.$$

双方乘以 $Q(x)$ 得

$$P(x) = (Mx+N)Q_1(x) + (x^2+px+q)P_1(x).$$

确定 M 与 N 使 $P(x) - (Mx+N)Q_1(x)$ 是 x^2+px+q 的倍数. 命以 x^2+px+q 除 $P(x)$ 与 $Q_1(x)$ 后的余式分别是 $\alpha x+\beta$ 与 $\gamma x+\delta$, 因此問題化为确定 M 与 N 使 x^2+px

$+q$ 整除

$$\alpha x+\beta-(Mx+N)(\gamma x+\delta).$$

以 x^2+px+q 除此式得余式

$$[(p\gamma-\delta)M-\gamma N+\alpha]x+[q\gamma M-\delta N+\beta],$$

因此必須

$$\begin{cases}(p\gamma-\delta)M-\gamma N+\alpha=0,\\ q\gamma M-\delta N+\beta=0.\end{cases}$$

由这組方程解出 M 与 N，必須行列式

$$\begin{vmatrix}p\gamma-\delta & -\gamma\\ q\gamma & -\delta\end{vmatrix}=\delta^2-p\gamma\delta+q\gamma^2$$

异于零.

当 $\gamma\neq 0$，則 $\delta^2-p\gamma\delta+q\gamma^2=\gamma^2\left[\left(-\frac{\delta}{\gamma}\right)^2+p\left(-\frac{\delta}{\gamma}\right)+q\right]\neq 0$，否則三項式 x^2+ $+px+q=0$ 有一实根 $-\frac{\delta}{\gamma}$，这是不可能的；当 $\gamma=0$ 时，δ 必非零，否則 $Q_1(x)$ 是 x^2+ $+px+q$ 的倍数了，亦不可能.

$P_1(x)$ 可以看作是 x^2+px+q 除 $P(x)-(Mx+N)Q_1(x)$ 后所得的商.

3) 綜合 1) 与 2) 逐步做去可知

$$\frac{P(x)}{Q(x)}=\frac{A_k}{(x-a)^k}+\frac{A_{k-1}}{(x-a)^{k-1}}+\cdots+\frac{A_1}{x-a}+\cdots$$
$$+\frac{M_mx+N_m}{(x^2+px+q)^m}+\frac{M_{m-1}x+N_{m-1}}{(x^2+px+q)^{m-1}}+\cdots+\frac{M_1x+N_1}{x^2+px+q}+\cdots. \quad (1)$$

定理証完(对 $Q(x)$ 的每一实根，每一对虚根都得入算).

但如何将眞分式 $P(x)/Q(x)$ 表示成形式(1)呢？除掉以上所說的逐步做的方法，还有以下的待定系数法. 若 $Q(x)$ 的次数是 n，将(1)式右方的 $A_k, A_{k-1},\cdots, A_1,\cdots, M_m, N_m,\cdots, M_1, N_1$ 看成待定系数，則一共 n 个. (1)式双方乘以 $Q(x)$，比較系数，共得 n 个关于待定系数的綫性方程(因 $P(x)$ 的次数低于 n). 由此可以确定这 n 个待定系数，由于分解为形状(1)的可能性已由定理 1 建立，所以方程組是不会矛盾的. 又无論方程組的常数項如何(即 $P(x)$ 的系数)，都是可解的，所以这 n 个方程的系数行列式必异于零，因此解答是唯一的，也就是說，将 $P(x)/Q(x)$ 分解为形状(1)的表示法是唯一的.

例. 分解

$$\frac{2x^2+2x+13}{(x-2)(x^2+1)^2}.$$

命

$$\frac{2x^2+2x+13}{(x-2)(x^2+1)^2}=\frac{A}{x-2}+\frac{Bx+C}{x^2+1}+\frac{Dx+E}{(x^2+1)^2},$$

由恆等式

$$2x^2+2x+13=A(x^2+1)^2+(Bx+C)(x^2+1)(x-2)+(Dx+E)(x-2)$$

得

$$\begin{cases} A + B = 0, \\ -2B + C = 0, \\ 2A + B - 2C + D = 2, \\ -2B + C - 2D + E = 2, \\ A - 2C - 2E = 13. \end{cases}$$

因此

$$A = 1,\ B = -1,\ C = -2,\ D = -3,\ E = -4.$$

所以

$$\frac{2x^2 + 2x + 13}{(x-2)(x^2+1)^2} = \frac{1}{x-2} - \frac{x+2}{x^2+1} - \frac{3x+4}{(x^2+1)^2}.$$

§5. М. В. Остроградский 方法

定理（Остроградский）．任一真分式 $P(x)/Q(x)$ 的积分可以写为

$$\int \frac{P(x)}{Q(x)}dx = \frac{P_1(x)}{Q_1(x)} + \int \frac{P_2(x)}{Q_2(x)}dx, \tag{1}$$

此处 $\frac{P_1(x)}{Q_1(x)}$, $\frac{P_2(x)}{Q_2(x)}$ 为真分式，$Q_1(x) = (x-a)^{k-1}\cdots(x^2+px+q)^{m-1}\cdots$，$Q_2(x) = $ $=(x-a)\cdots(x^2+px+q)\cdots$, $Q_1Q_2 = Q$.

证．当 $k > 1$ 时

$$\int \frac{A}{(x-a)^k}dx = -\frac{A}{k-1}\cdot\frac{1}{(x-a)^{k-1}} + C. \tag{2}$$

又当 $m > 1$, $4q - p^2 > 0$ 时

$$\int \frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^m}dx = \frac{M'x+N'}{(x^2+px+q)^{m-1}} + \alpha\int\frac{dx}{(x^2+px+q)^{m-1}},$$

其中 α, M', N' 都是常数(见§3末)．

若 $m > 2$，则

$$\alpha\int\frac{dx}{(x^2+px+q)^{m-1}} = \frac{M''x+N''}{(x^2+px+q)^{m-2}} + \beta\int\frac{dx}{(x^2+px+q)^{m-2}},$$

等等．最后得到

$$\int \frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^m}dx = \frac{R(x)}{(x^2+px+q)^{m-1}} + \lambda\int\frac{dx}{x^2+px+q}. \tag{3}$$

由(2)、(3)及(4.1)可知

$$\int \frac{P(x)}{Q(x)}dx = \frac{P_1(x)}{Q_1(x)} + \int \frac{P_2(x)}{Q_2(x)}dx,$$

此处 $\frac{P_1(x)}{Q_1(x)}$ 是由上法，即[(2)与(3)]分离出来的真分式的和，故为真分式．而

$$Q_1(x) = (x-a)^{k-1}\cdots(x^2+px+q)^{m-1}\cdots,$$

$\frac{P_2}{Q_2}$ 是§3型 II 与 IV 的真分式的和，故亦为真分式，且

$$Q_2(x) = (x-a)\cdots(x^2+px+q)\cdots.$$

显然 $Q = Q_1Q_2$，明所欲証.

但如何确定 $P_1(x)$ 与 $P_2(x)$ 的系数呢？微分(1)式得

$$\frac{P}{Q} = \left[\frac{P_1}{Q_1}\right]' + \frac{P_2}{Q_2} = \frac{Q_1P_1' - P_1Q_1'}{Q_1^2} + \frac{P_2}{Q_2} = \frac{P_1'Q_2 - P_1H + P_2Q_1}{Q},$$

此处

$$H = \frac{Q_1'Q_2}{Q_1}.$$

由恆等式

$$P = P_1'Q_2 - P_1H + P_2Q_1$$

可以得出 n 个待定系数的綫性方程組（因恆等双方的次数都为 $n-1$），与 §4 的理由一样，可知这方程組的系数行列式非零，故解答是唯一的，也就是說，表达成(1)的表示法是唯一的.

例. 求

$$\int \frac{4x^4+4x^3+16x^2+12x+8}{(x+1)^2(x^2+1)^2}\,dx.$$

由 $Q_1, Q_2 = (x+1)(x^2+1) = x^3+x^2+x+1$ 及

$$\frac{4x^4+4x^3+16x^2+12x+8}{(x^3+x^2+x+1)^2} = \left[\frac{ax^2+bx+c}{x^3+x^2+x+1}\right]' + \frac{dx^2+ex+f}{x^3+x^2+x+1}.$$

得

$$4x^4+4x^3+16x^2+12x+8 = (2ax+b)(x^3+x^2+x+1) -$$
$$-(ax^2+bx+c)(3x^2+2x+1) + (dx^2+ex+f)(x^3+x^2+x+1).$$

比較系数后有

$$\begin{cases} d = 0, \\ -a + e = 4, \\ -2b + e + f = 4, \\ a - b - 3c + e + f = 16, \\ 2a - 2c + e + f = 12, \\ b - c + f = 8, \end{cases}$$

所以

$$a = -1,\ b = 1,\ c = -4,\ d = 0,\ e = 3,\ f = 3.$$

因此

$$\int \frac{4x^4+4x^3+16x^2+12x+8}{(x+1)^2(x^2+1)^2}\,dx = -\frac{x^2-x+4}{x^3+x^2+x+1} + 3\int\frac{dx}{x^2+1}$$
$$= -\frac{x^2-x+4}{x^3+x^2+x+1} + 3\operatorname{tg}^{-1}x + C.$$

習題 1. 求 $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2(1+x^2)^2}$.

習題 2. 求 $\displaystyle\int \frac{4x^2+4x-11}{(2x-1)(2x+3)(2x-5)}\,dx$.

习题 3. 求 $\int \frac{dx}{x^4+1}$.

习题 4. 求 $\int \frac{2x^4-4x^3+24x^2-40x+20}{(x-1)(x^2-2x+2)^3}\,dx$.

习题 5. 求 $\int \frac{x^6-x^5+x^4+2x^3+3x^2+3x+3}{(x+1)^2(x^2+x+1)^3}\,dx$.

§6. 某些含有根式的函数的积分

A) 形如 $R\left(x, \sqrt[m]{\frac{\alpha x+\beta}{\gamma x+\delta}}\right)$ 的积分,此处 $R(x, y)$ 是 x, y 的有理函数,也即它能表成两个以 x, y 为变量的实系数多项式的商,m 为自然数,$\alpha\delta-\beta\gamma \neq 0$.

命

$$t=\sqrt[m]{\frac{\alpha x+\beta}{\gamma x+\delta}},\quad x=\varphi(t)=\frac{\delta t^m-\beta}{\alpha-\gamma t^m},$$

则积分变为

$$\int R(\varphi(t), t)\varphi'(t)dt.$$

这是有理函数的积分了.

例 1. $\int \frac{\sqrt{x+1}+2}{(x+1)^2-\sqrt{x+1}}\,dx$.

命 $t=\sqrt{x+1}$, 于是

$$\int \frac{\sqrt{x+1}+2}{(x+1)^2-\sqrt{x+1}}\,dx=2\int \frac{t+2}{t^3-1}\,dt=\int\left(\frac{2}{t-1}-\frac{2t+2}{t^2+t+1}\right)dt=$$

$$=\log\left|\frac{(t-1)^2}{t^2+t+1}\right|-\frac{2}{\sqrt{3}}\operatorname{tg}^{-1}\frac{2t+1}{\sqrt{3}}+C=$$

$$=\log\left|\frac{(\sqrt{x+1}-1)^2}{x+\sqrt{x+1}+2}\right|-\frac{2}{\sqrt{3}}\operatorname{tg}^{-1}\frac{2\sqrt{x+1}+1}{\sqrt{3}}+C.$$

例 2. $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{(x+1)^2(x-1)}}$.

由

$$\int \frac{dx}{\sqrt[3]{(x+1)^2(x-1)}}=\int \sqrt[3]{\frac{x+1}{x-1}}\cdot\frac{dx}{x+1},$$

命

$$t=\sqrt[3]{\frac{x+1}{x-1}},\ \text{则}\ x=\frac{t^3+1}{t^3-1},\quad dx=\frac{-6t^2dt}{(t^3-1)^2}.$$

因此

$$\int \frac{dx}{\sqrt[3]{(x+1)^2(x-1)}}=-3\int \frac{dx}{t^3-1}=\int\left(-\frac{1}{t-1}+\frac{t+2}{t^2+t+1}\right)dt$$

$$=\frac{1}{2}\log\left|\frac{t^2+t+1}{(t-1)^2}\right|+\sqrt{3}\operatorname{tg}^{-1}\frac{2t+1}{\sqrt{3}}+C$$

$$=\frac{1}{2}\log\left(\frac{\sqrt[3]{(x+1)^2}+\sqrt[3]{x^2-1}+\sqrt[3]{(x-1)^2}}{(\sqrt[3]{x+1}-\sqrt[3]{x-1})^2}\right)+\sqrt{3}\operatorname{tg}^{-1}\frac{2\sqrt[3]{x+1}+\sqrt[3]{x-1}}{\sqrt{3}\cdot\sqrt[3]{x-1}}+C.$$

B) 二項式 $x^m(a+bx^n)^p$ 的积分，a, b 是常数，m, n, p 是有理数.

命 $x^n = z$，则得

$$\int x^m(a+bx^n)^p dx = \frac{1}{n}\int (a+bz)^p z^q dz,$$

此处

$$q = \frac{m+1}{n} - 1.$$

再命 $z = \frac{a}{b} w$，就变为形如

$$\int (1+w)^p w^q dw$$

的积分了. 如果 p 是整数，而 q 的分母是 l，命 $w = u^l$，我們的积分就是 u 的有理函数的积分了. 又如果 q 是整数，而 p 的分母是 l，则命 $1 + w = v^l$，也把上式化为 v 的有理函数的积分.

如果 $p + q$ 是整数，而 p 的分母是 l，命

$$\frac{1+w}{w} = t^l,$$

也把上式化为 t 的有理函数的积分.

总結起来，若数 $p, \frac{m+1}{n}, \frac{m+1}{n} + p$ 中有一个是整数，则二項式 $x^m(a+bx^n)^p$ 的积分可以化为有理函数的积分. 除此之外的情况，П. Л. Чебышев 已經証明我們无法找出初等函数的表达式来.

例 3. $\int \frac{\sqrt[3]{1+\sqrt[4]{x}}}{\sqrt{x}} dx.$

由于

$$\int \frac{\sqrt[3]{1+\sqrt[4]{x}}}{\sqrt{x}} = \int x^{-\frac{1}{2}}(1+x^{\frac{1}{4}})^{\frac{1}{3}} dx,$$

在此 $m = -\frac{1}{2}$，$n = \frac{1}{4}$，$p = \frac{1}{3}$. 因为

$$\frac{m+1}{n} = 2$$

是整数，所以可以化为有理函数的积分.

命 $t = \sqrt[3]{1+\sqrt[4]{x}}$，则 $x = (t^3-1)^4$，$dx = 12t^2(t^3-1)^3 dt$.

因此

$$\int \frac{\sqrt[3]{1+\sqrt[4]{x}}}{\sqrt{x}} dx = 12\int (t^6 - t^3) dt = \frac{3}{7} t^4(4t^3 - 7) + C$$

$$= \frac{3}{7}(1+\sqrt[4]{x})\sqrt[3]{1+\sqrt[4]{x}}(4\sqrt[4]{x} - 3) + C.$$

例 4. $\int \frac{dx}{\sqrt[4]{1+x^4}}$,

在这里, $m=0$, $n=4$, $p=-\frac{1}{4}$. 因为

$$\frac{m+1}{n}+p=\frac{1}{4}-\frac{1}{4}=0,$$

所以可以化为有理函数的积分.

命 $t=\frac{\sqrt[4]{1+x^4}}{x}$, 則 $x=(t^4-1)^{-1/4}$, $dx=-t^3(t^4-1)^{-5/4}dt$,

因此

$$\int \frac{dx}{\sqrt[4]{1+x^4}}=-\int \frac{t^2dt}{t^4-1}=\frac{1}{4}\int\left(\frac{1}{t+1}-\frac{1}{t-1}\right)dt-\frac{1}{2}\int\frac{dt}{t^2+1}=$$

$$=\frac{1}{4}\log\left|\frac{t+1}{t-1}\right|-\frac{1}{2}\operatorname{tg}^{-1}t+C=$$

$$=\frac{1}{4}\log\left|\frac{\sqrt[4]{1+x^4}+x}{\sqrt[4]{1+x^4}-x}\right|-\frac{1}{2}\operatorname{tg}^{-1}\frac{\sqrt[4]{1+x^4}}{x}+C.$$

例 5. $\int \frac{dx}{x\sqrt[3]{1+x^5}}$,

在这里 $m=-1$, $n=5$, $p=-\frac{1}{3}$. 因为

$$\frac{m+1}{n}=0,$$

所以可以化为有理函数的积分.

命 $t=\sqrt[3]{1+x^5}$, 則 $x=(t^3-1)^{1/5}$, $dx=\frac{3}{5}t^2(t^3-1)^{-4/5}dt$. 因此

$$\int \frac{dx}{x\sqrt[3]{1+x^5}}=\frac{3}{5}\int\frac{tdt}{t^3-1}=\frac{1}{5}\int\left(\frac{1}{t-1}-\frac{t-1}{t^2+t+1}\right)dt=$$

$$=\frac{1}{10}\log\left|\frac{(t-1)^2}{t^2+t+1}\right|+\frac{\sqrt{3}}{5}\operatorname{tg}^{-1}\frac{2t+1}{\sqrt{3}}+C=$$

$$=\frac{1}{10}\log\left|\frac{(\sqrt[3]{1+x^5}-1)^2}{\sqrt[3]{(1+x^5)^2}+\sqrt[3]{1+x^5}+1}\right|+\frac{\sqrt{3}}{5}\operatorname{tg}^{-1}\frac{2\sqrt[3]{1+x^5}+1}{\sqrt{3}}+C.$$

習題 1. 命

$$J_{p,q}=\int(1+z)^pz^qdz,$$

試証

$$J_{p+1,q}=J_{p,q}+J_{p,q+1}$$

$$(1+z)^{p+1}z^{q+1}=(p+1)J_{p,q+1}+(q+1)J_{p+1,q},$$

并以此証明

$$J_{p,q}=-\frac{(1+z)^{p+1}z^{q+1}}{p+1}+\frac{p+q+2}{p+1}J_{p+1,q}\quad(p\neq-1);$$

$$J_{p,q}=\frac{(1+z)^{p+1}z^{q+1}}{q+1}-\frac{p+q+2}{q+1}J_{p,q+1}\ (q\neq -1).$$

習題 2. 命 $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ 表实数且 $\alpha\delta-\beta\gamma\neq 0$，試将习題 1 的公式推广到积分

$$J_{p,q}=\int(\alpha+\beta z)^p(\gamma+\delta z)^q dz.$$

習題 3. 命 m 是一整数，求

$$H_m=\int\frac{x^m}{\sqrt{1-x^2}}dx.$$

§7. 求积分 $\int R(x,\sqrt{ax^2+bx+c})dx$

先配平方，得

$$ax^2+bx+c=a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+c-\frac{b^2}{4a}.$$

因此我們不妨假定所要討論的情况是 $b=0$.

再換变数

$$x=\sqrt{\left|\frac{c}{a}\right|}\,y,$$

則

$$\sqrt{ax^2+c}=\begin{cases}\sqrt{c}\sqrt{y^2+1} & 若\ a>0,\ c>0,\\ \sqrt{|c|}\sqrt{y^2-1} & 若\ a>0,\ c<0,\\ \sqrt{c}\sqrt{1-y^2} & 若\ a<0,\ c>0.\end{cases}$$

第四种情况 $a<0,\ c<0$ 在实数范圍內是不存在的.

当 $a>0,\ c>0$，命

$y=\frac{2t}{1-t^2}$，則 $\sqrt{1+y^2}=\frac{1+t^2}{1-t^2}$，因而所求的积分变为 t 的有理函数的积分.

当 $a>0, c<0$，命 $y=\frac{1+t^2}{1-t^2}$，則得 $\sqrt{y^2-1}=\frac{2t}{1-t^2}$. 也化为求有理函数的积分問題.

又当 $a<0, c>0$，命 $y=\frac{1-t^2}{1+t^2}$，則 $\sqrt{1-y^2}=\frac{2t}{1+t^2}$. 也化为求有理函数的积分問題.

这三种情况，我們也可以各以 $y=\mathrm{tg}\theta$，$y=\sec\theta$ 及 $y=\sin\theta$ 代入而化为三角函数的积分.

例 1. $$\int\frac{dx}{\sqrt{x^2\pm a^2}}=\log\left|x+\sqrt{x^2\pm a^2}\right|+C,$$

$$\int\frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}}=\arcsin\frac{x}{a}+C$$

(見 §1).

例 2.

$$\int\frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}=\begin{cases}\frac{1}{\sqrt{a}}\log\left|ax+\frac{b}{2}+\sqrt{a(ax^2+bx+c)}\right|+C, \text{若 } a>0\\ -\frac{1}{\sqrt{|a|}}\arcsin\frac{2ax+b}{\sqrt{b^2-4ac}}+C, \text{若 } a<0,\ b^2-4ac>0.\end{cases}$$

先凑平方,再由例 1 可得此二式.

例 3. $\int\frac{dx}{x\sqrt{\alpha x^2+\beta}}$, $\int\frac{dx}{x^2\sqrt{\alpha x^2+\beta}}$, $\int\frac{dx}{(\alpha x^2+\beta)^{3/2}}$

都可以用簡单替換 $x=\frac{1}{t}$ 化为已知的积分.

例 4. $\int\frac{dx}{x+\sqrt{x^2-x+1}}$.

命 $\sqrt{x^2-x+1}=t-x$, 則 $x=\frac{t^2-1}{2t-1}$, $dx=2\frac{t^2-t+1}{(2t-1)^2}dt$. 因此

$$\int\frac{dx}{x+\sqrt{x^2-x+1}}=2\int\frac{t^2-t+1}{t(2t-1)^2}dt=-\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{2t-1}+2\log|t|-$$

$$-\frac{3}{2}\log|2t-1|+C=-\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{2x+2\sqrt{x^2-x+1}-1}+$$

$$+2\log\left|x+\sqrt{x^2-x+1}\right|-\frac{3}{2}\log|2x+2\sqrt{x^2-x+1}-1|+C.$$

習題 1. 命 $y=\sqrt{ax^2+bx+c}$ 及

$$V_m=\int\frac{x^m dx}{y}\quad m=0,1,2,\cdots,$$

試証

$$x^{m-1}y=maV_m+\left(m-\frac{1}{2}\right)bV_{m-1}+(m-1)cV_{m-2},$$

并由此証明

$$V_m=p_{m-1}(x)y+\lambda_m V_0,$$

此处 $p_{m-1}(x)$ 是 x 的 $m-1$ 次多項式, λ_m 是常数.

这习題建議了以下的求积分方法:命 $P(x)$ 表 n 次多項式 $\sum_{\nu=0}^{n}a_\nu x^\nu$, 由上式可知

$$\int\frac{P(x)}{y}dx=\sum_{\nu=0}^{n}a_\nu V_\nu=Q(x)y+\lambda V_0,$$

此处 $Q(x)$ 是一个 $n-1$ 次多項式, λ 是常数.

微分此式立得

$$P(x)=Q'(x)(ax^2+bx+c)+\frac{1}{2}Q(x)(2ax+b)+\lambda.$$

我們可以用比較系数法来求出 $Q(x)$ 及 λ.

習題 2. 試用此法証明

$$\int \frac{x^3 - x + 1}{\sqrt{x^2 + 2x + 2}} dx = \frac{1}{6}(2x^2 - 5x + 1)\sqrt{x^2 + 2x + 2}$$
$$+ \frac{5}{2}\log(x + 1 + \sqrt{x^2 + 2x + 2}) + C.$$

習題 3. 在积分

$$\int \frac{dx}{(x-\alpha)^m \sqrt{ax^2 + bx + c}} \quad (m \geqslant 1)$$

中換变数 $x - \alpha = \frac{1}{t}$，使它化为习題 1 的形式。

習題 4. 証明

$$\int \frac{dx}{(x-1)^3 \sqrt{x^2 - 2x - 1}} = \frac{1}{4(x-1)^2}\sqrt{x^2 - 2x - 1} - \frac{1}{4\sqrt{2}} \sin^{-1} \frac{\sqrt{2}}{x-1} + C.$$

§8. Abel 积 分

考虑形如

$$\int R(x, y) dx \tag{1}$$

的积分，其中 $R(x, y)$ 是 x, y 的有理函数，而 x 与 y 之間滿足代数方程：

$$P(x, y) = 0. \tag{2}$$

这样的积分称为 Abel 积分，我們已經研究过的就有

$$(\gamma x + \delta) y^m - (\alpha x + \beta) = 0$$

及

$$y^2 - (ax^2 + bx + c) = 0.$$

二特例，积分(1)能否表为已知函数，主要是以曲綫(2)的性质为轉移．除掉十分特殊的情况以外，(1)是不能用本书以往所說的函数表出来的．

如果曲綫(2)有参变数的有理函数表达法

$$x = r_1(t), \quad y = r_2(t), \tag{3}$$

則

$$\int R(x, y) dx = \int R(r_1(t), r_2(t)) r_1'(t) dt$$

就是 t 的有理函数的积分．

有理式(3)表达的曲綫是一种十分特殊的曲綫，称为有理曲綫．本书中不能說明有理曲綫的条件，但仅准备指出

$$y^2 = ax^3 + bx^2 + cx + d$$
$$y^2 = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$$

都不是有理曲綫(如果右边沒有重因子)，但任意一条二次曲綫，都是有理的，即

$$ax^2 + 2bxy + cy^2 + 2dx + 2ey + 2f = 0$$

一定能够表成某一参变数的有理函数．

如果曲綫上有一点 (x_0, y_0)，即

$$ax_0^2 + 2bx_0y_0 + cy_0^2 + 2dx_0 + 2ey_0 + 2f = 0.$$

換变数 $x' = x - x_0$, $y' = y - y_0$，就可把 x_0, y_0 变为原点，即不失普遍性，我們可以假定 $f = 0$. 命

$$y = tx,$$

則得

$$x^2(a + 2bt + ct^2) + (2d + 2et)x = 0,$$

即我們有参变数表达法

$$x = -\frac{2d + 2et}{a + 2bt + ct^2}, \quad y = tx.$$

例 1. $x^3 + y^3 - 3axy = 0$ 是有理曲綫.

命 $y = tx$，則得参变数表示法

$$x = \frac{3at}{1 + t^3}, \quad y = \frac{3at^2}{1 + t^3}.$$

例 2. 双紐綫

$$(x^2 + y^2)^2 = 2a^2(x^2 - y^2)$$

有参变数表示法

$$x = \frac{a^2t(t^2 + a^2)}{t^4 + a^4}, \quad y = \frac{a^2t(t^2 - a^2)}{t^4 + a^4}.$$

例 3. 求积分

$$\int R(\cos\theta, \sin\theta)d\theta.$$

这一积分也是 Abel 积分的一个特例，就是

$$\int R(x, y)x^{-1}dy,$$

此处

$$x^2 + y^2 = 1.$$

由参变数表示法

$$x = \frac{1 - t^2}{1 + t^2}, \quad y = \frac{2t}{1 + t^2},$$

我們立刻就把所要求的积分变为有理函数的积分. 这种换变数的方法，也就是命

$$t = \operatorname{tg}\frac{1}{2}\theta$$

的方法，因为

$$\sin\theta = \frac{2\operatorname{tg}\frac{1}{2}\theta}{1 + \operatorname{tg}^2\frac{1}{2}\theta} = \frac{2t}{1 + t^2}, \quad \cos\theta = \frac{1 - \operatorname{tg}^2\frac{1}{2}\theta}{1 + \operatorname{tg}^2\frac{1}{2}\theta} = \frac{1 - t^2}{1 + t^2}.$$

例 4. 求

$$T_1=\int\frac{\sin x dx}{a\cos x+b\sin x},\ T_2=\int\frac{\cos x dx}{a\cos x+b\sin x}.$$

我們可以用代换 $t=\operatorname{tg}\frac{1}{2}x$ 分别求 T_1 与 T_2，但还有更簡单的方法。

$$bT_1+aT_2=\int dx=x+C_1,$$

$$-aT_1+bT_2=\int\frac{-a\sin x+b\cos x}{a\cos x+b\sin x}dx=\int\frac{d(a\cos x+b\sin x)}{a\cos x+b\sin x}=$$

$$=\log|a\cos x+b\sin x|+C_2,$$

由此立刻得到

$$T_1=\frac{1}{a^2+b^2}[bx-a\log|a\cos x+b\sin x|]+C,$$

$$T_2=\frac{1}{a^2+b^2}[ax+b\log|a\cos x+b\sin x|]+C'.$$

例 5. 求

$$\int\frac{dx}{a+b\cos x+c\sin x},$$

其中 $|a|>\sqrt{b^2+c^2}$ 或 $|a|<\sqrt{b^2+c^2}$.

命 $\cos\alpha=\frac{b}{\sqrt{b^2+c^2}}$, $\sin\alpha=\frac{c}{\sqrt{b^2+c^2}}$，則

$$\int\frac{dx}{a+b\cos x+c\sin x}=\int\frac{dx}{a+\sqrt{b^2+c^2}\cos(x-\alpha)}.$$

若 $|a|>\sqrt{b^2+c^2}$，則先命 $x-\alpha=t$，然后命 $\operatorname{tg}\frac{t}{2}=z$，則

$$\int\frac{dx}{a+\sqrt{b^2+c^2}\cos(x-\alpha)}=\int\frac{dt}{a+\sqrt{b^2+c^2}\cos t}=$$

$$=\int\frac{2dz}{(a+\sqrt{b^2+c^2})\left(1+\frac{a-\sqrt{b^2+c^2}}{a+\sqrt{b^2+c^2}}z^2\right)}=$$

$$=\frac{2}{\sqrt{a^2-b^2-c^2}}\int\frac{d\left(\sqrt{\frac{a-\sqrt{b^2+c^2}}{a+\sqrt{b^2+c^2}}}z\right)}{1+\frac{a-\sqrt{b^2+c^2}}{a+\sqrt{b^2+c^2}}z^2}+C=$$

$$=\frac{2}{\sqrt{a^2-b^2-c^2}}\operatorname{tg}^{-1}\frac{\sqrt{a-\sqrt{b^2+c^2}}}{\sqrt{a+\sqrt{b^2+c^2}}}\operatorname{tg}\frac{x-\alpha}{2}+C.$$

若 $|a|<\sqrt{b^2+c^2}$，作同样变换可知

$$\int \frac{dx}{a+\sqrt{b^2+c^2}\cos(x-\alpha)} = 2\int \frac{dz}{(\sqrt{b^2+c^2}+a)-(\sqrt{b^2+c^2}-a)z^2} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{b^2+c^2-a^2}} \log \left| \frac{\sqrt{\sqrt{b^2+c^2}+a} + \sqrt{\sqrt{b^2+c^2}-a}\,\mathrm{tg}\,\frac{x-\alpha}{2}}{\sqrt{\sqrt{b^2+c^2}+a} - \sqrt{\sqrt{b^2+c^2}-a}\,\mathrm{tg}\,\frac{x-\alpha}{2}} \right| + C.$$

習題 1.　求积分

$$\int y dx,$$

其中 y 的定义如例 1.

習題 2.　求积分

$$\int \frac{dx}{y},$$

此处 y 的定义如例 2.

習題 3.　命

$$I_{\nu,\mu} = \int \sin^\nu x \cos^\mu x dx.$$

試証明

$$I_{\nu,\mu} = -\frac{\sin^{\nu+1}x\cos^{\mu+1}x}{\mu+1} + \frac{\nu+\mu+2}{\mu+1} I_{\nu,\mu+2} (\mu \neq -1),$$

$$I_{\nu,\mu} = \frac{\sin^{\nu+1}x\cos^{\mu+1}x}{\nu+1} + \frac{\nu+\mu+2}{\nu+1} I_{\nu+2,\mu} (\nu \neq -1),$$

$$I_{\nu,\mu} = \frac{\sin^{\nu+1}x\cos^{\mu-1}x}{\nu+\mu} + \frac{\mu-1}{\nu+\mu} I_{\nu,\mu-2} (\nu+\mu \neq 0),$$

$$I_{\nu,\mu} = -\frac{\sin^{\nu-1}x\cos^{\mu+1}x}{\nu+\mu} + \frac{\nu-1}{\nu+\mu} I_{\nu-2,\mu} (\nu+\mu \neq 0).$$

習題 4.　用习題 3 求

$$\int \frac{dx}{\cos^5 x}, \quad \int \frac{\cos^4 x}{\sin^3 x} dx.$$

習題 5.　求积分

$$\int \frac{1 - r\cos x}{1 - r\cos x + r^2} dx.$$

§ 9. 一些不能用已知函数表达的积分

和微分学不同，要求出一个函数的原函数是比較困难的. 不但困难，有时还不可能用有限步驟来表示我們已經知道的一些函数.

最常遇到的有以下一些·

$$\int e^{-x^2} dx, \int \sin x^2 dx, \int \cos x^2 dx,$$

$$\int \frac{\sin x}{x} dx, \int \frac{\cos x}{x} dx, \int \frac{dx}{\log x},$$

$$\int \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k^2\sin^2\varphi}}, \int \sqrt{1 - k^2\sin^2\varphi}\, d\varphi,$$

$$\int \frac{d\varphi}{(1 + k\sin^2\varphi)\sqrt{1 - k^2\sin^2\varphi}}.$$

如果遇到这样的积分，不要枉費心机地去寻找用我們現在所知道的函数来表达他們，但是这并不是說，我們不能用无穷形式来表达.

例如，我們常有

$$\int e^{-x^2} dx = \int \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-x^2)^n}{n!} dx = C + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{n!(2n+1)}.$$

又如

$$\int \sin x^2 dx = \int \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{4n+2}}{(2n+1)!} dx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{4n+3}}{(2n+1)!(4n+3)} + C,$$

等等.

§ 10. 微分方程. 分离变量法

已往我們所研究的問題，实际上就是求 x 的函数 y，使

$$y' = f(x).$$

更一般的問題就是求 x 的函数 y，使

$$F(x, y, y') = 0,$$

这称为一級微分方程. 如果可以解出 y'，則得

$$y' = f(x, y),$$

其中 $f(x, y)$ 是 x 与 y 的已知函数.

我們現在介紹几个簡单情况.

如果

$$f(x, y) = \frac{\varphi(x)}{\psi(y)},$$

則微分方程可以写成为

$$\psi(y)dy = \varphi(x)dx,$$

因而得出

$$\int \psi(y)dy = \int \varphi(x)dx + C.$$

例 1. 假定某物質原来的質量是 a，在时刻 t 到 $t + dt$ 这时間內起反应的物質的量 dx 可以算作与 dt 及在时刻 t 尙未起反应的物質量的积成正比例：

$$dx = c(a - x)dt,$$

即

$$\frac{dx}{a - x} = c\,dt,$$

因而得出

$$-\log(a-x)=ct+C_1,$$

即

$$a-x=e^{-ct-C_1}=Ce^{-ct},\quad C=e^{-C_1}.$$

如果 $t=0$ 就是开始起反应的时刻，即当 $t=0$ 时，$x=0$，則得出

$$a=C,$$

所以我們的公式就是

$$x=a(1-e^{-ct}).$$

例 2. 設一种溶液中有两种物質，在反应开始时，两种物質的量，各用克分子 a、b 来表达. 再設在时刻 t 时，两种物質已起反应的量相等，記之为 x，于是剩余的量各是 $a-x$，$b-x$. 如果反应速率与这些剩余的量的乘积成正比，即

$$\frac{dx}{dt}=k(a-x)(b-x),$$

这种化学反应称为二級反应. 方程可以改写为

$$\frac{dx}{(a-x)(b-x)}=kdt,$$

即

$$\int\frac{dx}{(a-x)(b-x)}=\int kdt+C_1.$$

如果 $b>a$，則得

$$\frac{1}{b-a}\log\frac{b-x}{a-x}=kt+C_1,$$

$$\frac{b-x}{a-x}=Ce^{(b-a)kt},\quad C=e^{(b-a)C_1}.$$

又如果取刚起反应的时刻是 $t=0$，則 $x=0$，因而得 $C=b/a$，即

$$\frac{b-x}{a-x}=\frac{b}{a}e^{(b-a)kt}.$$

讀者試自己研究 $b=a$ 的情況.

例 3. 設一桶中盛水，在距水面 h 的地方、水从一个直徑为 1 吋（1 呎 = 12 吋）的小孔射出. 若无摩擦等原因，則水从孔中流出的速度，等于自由落体下落 h 距离所产生的速度，即 $\sqrt{2gh}$，但实际速度要小一些，約为

$$v=0.6\sqrt{2gh}=4.8\sqrt{h}\ \text{呎/秒},$$

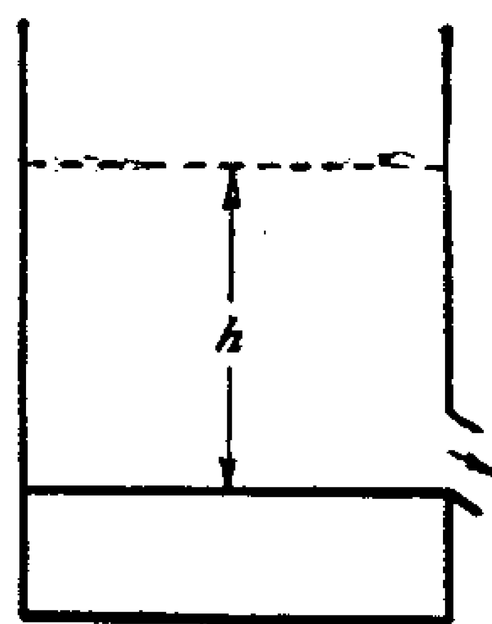


图 165

故在 dt 时間內流出的水量是 $v\,dt$ 乘孔的面积，即

$$\pi\left(\frac{1}{24}\right)^2 v\,dt.$$

設这个桶的横截面为16平方呎，高为 6 呎，又設在 dt 时間內失去的高度为 dh，故有

$$-16dh=\pi\left(\frac{1}{24}\right)^2 v\,dt=\pi\left(\frac{1}{24}\right)^2 4.8\sqrt{h}\,dt.$$

分离变数得

$$dt = -611\frac{dh}{\sqrt{h}},\ t = -1222\sqrt{h} + C.$$

当 $t = 0$ 时，$h = 6$，故

$$C = 1222\sqrt{6}.$$

故当 $h = 0$ 时

$$t = 1222\sqrt{6}\ \text{秒} = 49.9\ \text{分鐘}.$$

因而約 50 分鐘流完.

§11. 换变数法

有些方程虽然不是 §10 的形式，但經过变换之后就变为 §10 的形式.

齐次方程. 解方程

$$y' = f\left(\frac{y}{x}\right).$$

由 $y = xu$ 引进新变量，則

$$y' = u + xu',$$

由此得

$$u + xu' = f(u),$$

因而得出

$$\frac{dx}{x} + \frac{du}{u - f(u)} = 0.$$

由此可解得

$$\log x + \int\frac{du}{u - f(u)} = C_1,$$

从而

$$x = Ce^{-\int\psi_1(u)du},$$

此处

$$C = e^{C_1},\ \psi_1(u) = \frac{1}{u - f(u)}.$$

代回原来的 y，則得

$$x = C\Phi\left(\frac{y}{x}\right)$$

的形式.

例 1. 求曲綫，使 x 軸上点与这曲綫的切綫距离，等于这点到原点的距离.

切綫的方程是

$$Y - y = y'(X - x),$$

此处 (X, Y) 是切綫上的动点的坐标，这切綫与 X 軸的交点是

$$\left(x - \frac{y}{y'}, 0\right);$$

另一方面，切点与这交点的距离的平方是

$$\left(x-\left(x-\frac{y}{y'}\right)\right)^2+(y-0)^2=\frac{y^2}{y'^2}+y^2.$$

由条件可知

$$\frac{y^2}{y'^2}+y^2=\left(x-\frac{y}{y'}\right)^2,$$

即得

$$y'=\frac{2xy}{x^2-y^2}.$$

这就是齐次方程.

命 $y=xu$，则得

$$\frac{dx}{x}-\frac{1-u^2}{u+u^3}du=0,$$

即

$$\frac{dx}{x}-\left(\frac{1}{u}-\frac{2u}{u^2+1}\right)du=0,$$

所以

$$\log x-\log u+\log(u^2+1)=\log C,$$

$$\frac{x(u^2+1)}{u}=C.$$

代回原来的变量得

$$x^2+y^2-Cy=0,$$

这是在原点与 x 軸相切的圓.

在变化方程时，我們曾經以 $(u+u^3)$ 除等式两边，这可能失去一个解 $u=0$，也就是 $y=0$，代进原方程中这确是一个解，但这个解可以說是对应于 $C=\infty$ 的解.

以下我們介紹一些可变为齐次方程的例子，例如

$$\frac{dy}{dx}=f\left(\frac{ax+by+c}{a_1x+b_1y+c_1}\right).$$

若直綫 $ax+by+c=0$ 与 $a_1x+b_1y+c_1=0$ 有公共交点 (α,β)，則由代換

$$x=\xi+\alpha,\quad y=\eta+\beta$$

得

$$\frac{d\xi}{d\eta}=f\left(\frac{a\xi+b\eta}{a_1\xi+b_1\eta}\right),$$

此为 (ξ,η) 的齐次方程.

若直綫 $ax+by+c=0$ 与 $a_1x+b_1y+c_1=0$ 平行而不重合，此时 $a_1x+b_1y+c_1\equiv k(ax+by+c_2)(c_2\neq c_1)$. 由代換 $ax+by=z$ 得

$$\frac{dy}{dx}=f\left(\frac{z+c}{k(z+c_2)}\right),$$

a 与 b 中至少有一个非零. 不妨假定 $b\neq 0$，則

$$y = \frac{1}{b}(z - ax),$$

故

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{b}\left(\frac{dz}{dx} - a\right).$$

因此

$$\frac{dz}{dx} = bf\left(\frac{z + c}{k(z + c_2)}\right) + a.$$

所以可以由分离变数求解.

若直綫 $ax + by + c = 0$ 与 $a_1x + b_1y + c_1 = 0$ 重合,则方程化为簡单形状:

$$\frac{dy}{dx} = f(k).$$

§12. 积分因子法

微分方程

$$d(f(x, y)) = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy = 0$$

显然有一解

$$f(x, y) = C. \tag{1}$$

如果一个微分方程

$$M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0, \tag{2}$$

其中 $M(x, y)$ 及 $N(x, y)$ 恰好是一个函数 $f(x, y)$ 对 x 及 y 的偏微分,则这个方程显然有解(1). 称这种方程为全微分方程(或恰当方程).

显然可分离变数的微分方程都是全微分方程.

定理 1. 若 $\frac{\partial M}{\partial y}$, $\frac{\partial N}{\partial x}$ 存在且連續,则方程(2)为全微分方程的充要条件是

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}.$$

証. 1) 若方程是全微分方程,则有 $F(x,y)$ 使 $dF(x,y)=M(x,y)dx+N(x,y)dy=0$;另一方面,

$$dF(x, y) = \frac{\partial F(x, y)}{\partial x}dx + \frac{\partial F(x, y)}{\partial y}dy,$$

故

$$M(x, y) = \frac{\partial F(x, y)}{\partial x}, \quad N(x, y) = \frac{\partial F(x, y)}{\partial y},$$

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial^2 F}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}.$$

2) 若 $\frac{\partial N}{\partial x} = \frac{\partial M}{\partial y}$, 命

$$F_1(x, y) = \int M(x, y)dx,$$

则

$$\frac{\partial F_1(x, y)}{\partial x} = M(x, y),$$

$$\frac{\partial^2 F_1(x, y)}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 F_1(x, y)}{\partial y \partial x} = \frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x},$$

即

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(N(x, y) - \frac{\partial F_1(x, y)}{\partial y}\right) = 0.$$

因此 $N - \frac{\partial F_1}{\partial y}$ 仅为 y 的函数,命之为 $\varphi(y)$, 即

$$N(x, y) - \frac{\partial F_1(x, y)}{\partial y} = \varphi(y).$$

取

$$F(x, y) = F_1(x, y) + \int \varphi(y) dy,$$

则

$$\frac{\partial F(x, y)}{\partial y} = \frac{\partial F_1(x, y)}{\partial y} + \varphi(y) = N(x, y),$$

而

$$M(x, y) = \frac{\partial}{\partial x} F_1(x, y) = \frac{\partial}{\partial x}\left(F_1(x, y) + \int \varphi(y) dy\right) = \frac{\partial}{\partial x} F(x,y).$$

因此

$$dF(x, y) = M(x, y)dx + N(x, y)dy,$$

故方程(2)为全微分方程.

例 1. $(3x^2 + 6xy^2)dx + (6x^2y + 4y^3)dy = 0.$

由于

$$\frac{\partial(3x^2 + 6xy^2)}{\partial y} = \frac{\partial(6x^2y + 4y^3)}{\partial x} = 12xy,$$

故为全微分方程. 用定理 1 的記号

$$F_1(x,y) = \int (3x^2 + 6xy^2)dx = x^3 + 3x^2y^2,$$

$$\varphi(y) = 6x^2y + 4y^3 - \frac{\partial F_1}{\partial y} = 4y^3,$$

$$\int \varphi(y) dy = y^4,$$

故解答为 $x^3 + 3x^2y^2 + y^4 = C.$

例 2. $(\sec x \operatorname{tg} x \operatorname{tg} y - e^x)dx + (\sec x \sec^2 y)dy = 0.$

由于

$$\frac{\partial(\sec x \operatorname{tg} x \operatorname{tg} y - e^x)}{\partial y} = \frac{\partial \sec x \sec^2 y}{\partial x} = \sec x \operatorname{tg} x \sec^2 y,$$

故为全微分方程. 其解答为

$$\sec x \operatorname{tg} y - e^x = C.$$

有时，方程(1)不是全微分方程，如果有这样的函数 $\mu(x, y)$ 使

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \mu(x, y)M(x, y), \quad \frac{\partial f}{\partial y} = \mu(x, y)N(x, y),$$

则方程(2)也有(1)为其解．这样的函数 $\mu(x, y)$ 称为积分因子．

如果(2)有解，则显然有积分因子．从理論上說，如果方程(2)是可以由初等函数解出的，我們一定可以找到一个合适的积分因子，来用积分因子法解出它．但实际上，求积分因子并不容易．

由定理 1 及积分因子的定义可知

$$\frac{\partial(\mu M)}{\partial y} = \frac{\partial(\mu N)}{\partial x}$$

或

$$N\frac{\partial \mu}{\partial x} - M\frac{\partial \mu}{\partial y} = \left(\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}\right)\mu. \tag{3}$$

以 μ 除之得

$$N\frac{\partial \log \mu}{\partial x} - M\frac{\partial \log \mu}{\partial y} = \frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}. \tag{4}$$

故积分因子满足(3)或(4)．

解(3)或(4)并不容易（虽然我們只要求出一个特解卽可）．但特别当 $\frac{\partial \mu}{\partial y} = 0$ 时，则

$$\frac{\partial \log \mu}{\partial x} = \frac{\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}}{N}. \tag{5}$$

由此可知，(5) 式右端仅为 x 的函数是存在仅依赖于 x 的积分因子的充要条件．倘(5)式右端为仅依赖于 x 的函数，则

$$\log \mu = \int \frac{\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}}{N} dx. \tag{6}$$

例 3. $\left(2xy + x^2y + \frac{y^3}{3}\right)dx + (x^2 + y^2)dy = 0.$

由于

$$\frac{\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}}{N} = \frac{2x + x^2 + y^2 - 2x}{x^2 + y^2} = 1,$$

因此

$$\frac{d \log \mu}{dx} = 1,$$

$$\mu = e^x$$

方程

$$e^x\left(2xy + x^2y + \frac{y^3}{3}\right)dx + e^x(x^2 + y^2)dy = 0$$

是全微分方程，其解为

$$ye^x\left(x^2+\frac{y^2}{3}\right)=C.$$

如果方程(2)有积分因子 $\mu(x,y)$，其通解是 $f(x,y)=C$，则 $\mu(x,y)\varphi(f(x,y))$ 显然都是积分因子. 在实际求解时，有时将微分方程分成两組，每一組都很容易求出积分因子，然后写各积分因子的普遍形式. 最后求出一个共同的积分因子来.

例 4. $(x-y^2)dx+2xydy=0.$

把方程分成两組

$$(xdx)+(-y^2dx+2xydy)=0.$$

第一个括弧的积分因子是 $\mu_1=\varphi(x)$，第二个括弧有积分因子 $\frac{1}{xy^2}$，其通解为

$$\frac{y^2}{x}=C.$$

故其积分因子的一般表达式为

$$\mu_2=\frac{1}{xy^2}\psi\left(\frac{y^2}{x}\right).$$

现在只要选取 ψ，使 μ_2 仅为 x 的函数即可. 因此取 $\psi(t)=t$，故得原来方程的积分因子

$$\mu=\frac{1}{x^2}.$$

方程

$$\frac{dx}{x}+\frac{2xydy-y^2dx}{x^2}=0$$

为全微分方程，其解为

$$\log x+\frac{y^2}{x}=C.$$

例 5. $\frac{dy}{dx}=-\frac{2}{x^2}+\frac{2y}{x}-y^2.$

命 $y=\frac{c}{x}$，则

$$-\frac{c}{x^2}=-\frac{2}{x^2}+\frac{2c}{x^2}-\frac{c^2}{x^2}$$

或

$$c^2-3c+2=0.$$

由此得出 $c=1$ 是一个解，因此原方程有一个特解

$$y_1=\frac{1}{x}.$$

用变换

$$y=\frac{1}{x}+\frac{1}{W}$$

代入方程后得

$$\frac{dW}{dx}=1,$$

故

$$W=x+C.$$

因此方程的解为

$$yx(x+C)=2x+C.$$

§ 13. 一阶綫性方程

形狀为

$$a_n(x)\frac{d^ny}{dx^n}+a_{n-1}(x)\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}+\cdots+a_1(x)\frac{dy}{dx}+a_0(x)y=a(x) \tag{1}$$

的微分方程,称之为 n 阶綫性方程.

我們现在来解一阶綫性方程

$$y'+P(x)y+Q(x)=0. \tag{2}$$

先研究方程

$$y'+P(x)y=0, \tag{3}$$

这是一个可分离变量的方程

$$\frac{dy}{y}+P(x)dx=0,$$

积分得

$$\log y+\int P(x)dx=\log C,$$

即得

$$y=Ce^{-\int P(x)dx}.$$

从这个解答,我們可以知道方程(3)有一个积分因子

$$e^{\int P(x)dx},$$

即

$$e^{\int P(x)dx}(dy+P(x)ydx)=0$$

及

$$d(e^{\int P(x)dx}y)=0.$$

把这积分因子乘(2)可知

$$e^{\int P(x)dx}(dy+P(x)ydx+Q(x)ax)=0,$$

$$d(e^{\int P(x)dx}y)+e^{\int P(x)dx}Q(x)dx=0,$$

即得

$$e^{\int P(x)dx}y+\int e^{\int P(x)dx}Q(x)dx=C,$$

即

$$y=e^{-\int P(x)dx}\left(-\int e^{\int P(x)dx}Q(x)dx+C\right). \tag{4}$$

注意. 在求积分

$$\int P(x)dx$$

时,我們不一定要添上积分常数,因为由

$$y = e^{-\left(\int P(x)dx + C_1\right)}\left(-\int e^{\int P(x)dx + C_1} Q(x)dx + C\right) =$$

$$= e^{-\int P(x)dx}\left(-\int e^{\int P(x)dx} Q(x)dx + e^{-C_1}C\right)$$

可以看出,添 C_1 是不必要的.

例 1. 設 i 为电流强度,R 为电路的电阻,L 为自感系数,v 为电压,且 R, L, v 是常数,求有自感的电路中,变动电流的暫态过程.

我們有关系式

$$v = Ri + L\frac{di}{dt},$$

即

$$\frac{di}{dt} + \frac{R}{L}i - \frac{v}{L} = 0.$$

用公式(4),由

$$\int P\,dt = \int \frac{R}{L}\,dt = \frac{R}{L}t + C_1$$

及

$$\int Qe^{\int Pdt}dt = -\frac{v}{L}\int e^{\frac{R}{L}t}\,dt = -\frac{v}{R}e^{\frac{R}{L}t} + C_2$$

得到

$$i = e^{-\frac{R}{L}t}\left(C + \frac{v}{R}e^{\frac{R}{L}t}\right).$$

如果当 $t = 0$ 时, $i = i_0$, 則得 $C = i_0 - \frac{v}{R}$, 所以

$$i = \left(i_0 - \frac{v}{R}\right)e^{-\frac{R}{L}t} + \frac{v}{R}.$$

因为 t 增加时, $e^{-\frac{R}{L}t}$ 很快趋于零,所以电流强度可以由 Elm 定律 $i = \frac{v}{R}$来計算.

当 $v = 0$ 时,就得到断开电路时,电流消失的公式

$$i = i_0e^{-\frac{R}{L}t},$$

其中 $\frac{L}{R}$ 称为电路的时間常数.

例 2. 考虑电压是正弦函数的情形,即 $v = A\sin\omega t$. 用与上例相同的方法,得到

$$i = e^{-Rt/L}\left(C + \frac{A}{L}\int e^{Rt/L}\sin\omega t\,dt\right)$$

$$= e^{-Rt/L}\left[C + \frac{A}{L}e^{\frac{R}{L}t}\left(\frac{RL}{\omega^2L^2 + R^2}\sin\omega t - \frac{\omega L^2}{\omega^2L^2 + R^2}\cos\omega t\right)\right].$$

假定开始时的电流強度等于 i_0, 即当 $t = 0$ 时 $i = i_0$, 則得

$$i_0 = C - \frac{A}{L}\frac{\omega L^2}{\omega^2L^2 + R^2}.$$

因此得出公式

$$i = \left(i_0 + \frac{\omega LA}{\omega^2L^2 + R^2}\right)e^{-Rt/L} + \frac{RA}{\omega^2L^2 + R^2}\sin\omega t - \frac{\omega LA}{\omega^2L^2 + R^2}\cos\omega t =$$

$$= \left(i_0 + \frac{\omega LA}{\omega^2L^2 + R^2}\right)e^{-Rt/L} + A\sin(\omega t - \theta),$$

此处 $\theta = \mathrm{tg}^{-1}\frac{\omega L}{R}$.

当 t 較大时，$e^{-\frac{R}{L}t}$ 很快趋近于零，所以电流强度亦由一个正弦量来表示，且頻率与 v 相同.

例 3. 当电路断开时，有火花发生，这时电阻 R 不能看作常量，对断路的一刹那間 τ 来說，电阻由 R_0 增加到 $+\infty$. 这时我們可以設 R 依賴于时間 t 的关系是

$$R = \frac{R_0}{1 - \frac{t}{\tau}} = \frac{R_0\tau}{\tau - t}.$$

因此得到微分方程

$$\frac{di}{dt} + \frac{R_0\tau}{L(\tau - t)}i - \frac{v}{L} = 0.$$

命

$$t = \tau x,$$

則

$$\frac{di}{dx} + \frac{R_0\tau}{L(1 - x)}i - \frac{v\tau}{L} = 0.$$

用公式(4)，由于

$$\int P\,dx = \int\frac{R_0\tau}{L(1 - x)}dx = -\frac{R_0\tau}{L}\log(1 - x) + C_1,$$

故得

$$i = (1 - x)^{\frac{R_0\tau}{L}}\left[\frac{v\tau}{L}\int(1 - x)^{-\frac{R_0\tau}{L}}dx + C\right].$$

当 $\frac{L}{R_0} \neq \tau$ 时

$$i = \frac{v\tau}{R_0\tau - L}(1 - x) + C(1 - x)^{\frac{R_0\tau}{L}}.$$

当 $x = 0$ 时，$i = i_0$，故

$$C = i_0 - \frac{v\tau}{R_0\tau - L}.$$

故得

$$i = \frac{v\tau}{R_0\tau - L}(1 - x) + \left(i_0 - \frac{v\tau}{R_0\tau - L}\right)(1 - x)^{\frac{R_0\tau}{L}}.$$

同样的方法可以求出当 $\frac{L}{R_0}=\tau$ 时

$$i=(1-x)\left[i_0-\frac{v\tau}{L}\log(1-x)\right].$$

現在介紹可以化为一阶綫性方程的 Bernoulli 方程:

$$\frac{dy}{dx}+P(x)y=Q(x)y^n \qquad n\neq 0,1. \tag{5}$$

用 y^n 除之,得

$$y^{-n}\frac{dy}{dx}+P(x)y^{-n+1}=Q(x).$$

命

$$z=y^{-n+1},$$

则得

$$\frac{dz}{dx}+(-n+1)P(x)z=(-n+1)Q(x).$$

这样一来,就化为綫性方程了

例 4. $\frac{dy}{dx}-xy=-e^{-x^2}y^3.$

命

$$u=y^{-2},$$

则得

$$\frac{1}{2}\frac{du}{dx}+xu=e^{-x^2}.$$

此为綫性方程,解之得

$$u=e^{-x^2}(2x+c).$$

将 u 换为 y^{-2}, 即得原方程的解.

例 5. $\frac{dy}{dx}-\frac{4}{x}y=x\sqrt{y}.$

命 $z=\sqrt{y}$, 则得

$$\frac{dz}{dx}-\frac{2z}{x}=\frac{x}{2},$$

故得

$$z=e^{\int\frac{2}{x}dx}\left(\int e^{-\int\frac{2}{x}dx}\frac{x}{2}dx+C\right)=x^2\left(\frac{1}{2}\log x+C\right).$$

将 z 换为 $\sqrt{y}$, 即得原方程的解.

下面我們介紹 Riccati 方程:

$$\frac{dy}{dx}=P(x)+Q(x)y+R(x)y^2. \tag{6}$$

这类方程一般不能用求积法以求出它的解,但如果知道它的任何一个特解,就可以把它化

为 Bernoulli 方程.

若 $y_1(x)$ 是(6)的特解,作变换

$$y(x) = y_1(x) + Z(x),$$

则得

$$\frac{dy_1}{dx} + \frac{dZ}{dx} = P + Q(y_1 + Z) + R(y_1 + Z)^2$$

$$= P + Qy_1 + Ry_1^2 + QZ + 2y_1ZR + RZ^2,$$

$$\frac{dZ}{dx} = (Q + 2y_1R)Z + RZ^2.$$

此为 Bernoulli 方程.

再用代换 $Z = \frac{1}{w}$, 即化为 w 的一阶綫性方程.

§ 14. 二阶綫性方程

解二阶綫性方程:

$$u(x)y'' + v(x)y' + w(x)y = 0. \tag{1}$$

比起解一阶綫性方程来要难得多. 在应用数学中不少特殊函数都是某一二阶綫性微分方程的解,例如

$$x(1-x)y'' + (c - (a+b+1)x)y' - aby = 0 \text{ (超越几何函数)},$$

$$y'' + \left(n + \frac{1}{2} - \frac{1}{4}x^2\right)y = 0 \quad \text{(Weber 函数)},$$

$$x^2y'' + xy' + (x^2 - n^2)y = 0 \text{ (Bessel 函数)},$$

$$(1-x^2)y'' - 2xy' + \left(n(n+1) - \frac{m^2}{1-x^2}\right)y = 0 \text{ (Legendre 函数)},$$

$$y'' + (a + (6q\cos 2x))y = 0 \quad \text{(Mathieu 函数)},$$

$$y'' + \left(\sum_{r=1}^{3} \frac{\frac{1}{2}}{x - a_r}\right)y' - \frac{n(n+1)x + h}{4\prod_{r=1}^{3}(x - a_r)}y = 0 \text{ (Lamé 函数)}.$$

这些函数性質的討論都成为专門著作,本书将择要介紹一、二. 因此,并无希望可以有一个象解一阶綫性方程那样的办法. 本章中仅举些最簡单的与二級方程有关的結果.

1) 如果微分算子

$$u(x)\frac{d^2}{dx^2} + v(x)\frac{d}{dx} + w(x)$$

刚好可以分解为

$$\left(p\frac{d}{dx} + q\right)\left(r\frac{d}{dx} + s\right), \tag{2}$$

即

$$\left(p\frac{d}{dx}+q\right)\left(r\frac{d}{dx}+s\right)y=\left(p\frac{d}{dx}+q\right)\left(r\frac{dy}{dx}+sy\right)=$$

$$=pr\frac{d^2y}{dx^2}+\left(qr+ps+p\frac{dr}{dx}\right)\frac{dy}{dx}+\left(p\frac{ds}{dx}+qs\right)y,$$

亦即

$$pr=u,\ qr+ps+p\frac{dr}{dx}=v,\ p\frac{ds}{dx}+qs=w. \tag{3}$$

在这样的情况下，解方程(1)就等于解两个一阶方程：

$$p\frac{dz}{dx}+qz=0,\ r\frac{dy}{dx}+sy=z. \tag{4}$$

前一式的解是

$$z=Ae^{-\int q/p\,dx},$$

因而求解

$$r\frac{dy}{dx}+sy=Ae^{-\int q/p\,dx},$$

这是一个一阶方程了.

例 1. 解

$$(x^2+x-2)y''+(x^2-x)y'-(6x^2+7x)y=0.$$

由

$$pr=x^2+x-2$$

可假定

$$p=x+2,\quad r=x-1.$$

如果

$$q=Ex+F,\quad s=E'x+F',$$

则得

$$\left.\begin{aligned}E+E'&=1\\-E+F+2E'+F'&=-2\\F-2F'&=2\end{aligned}\right\},\quad\left.\begin{aligned}EE'&=-6\\E'F+EF'+E'&=-7\\FF'+2F'&=0,\end{aligned}\right\},$$

求出 $E=3,\ E'=-2;\ F=4,\ F'=1$. 因此原方程是

$$\left((x+2)\frac{d}{dx}+3x+4\right)\left((x-1)\frac{d}{dx}-(2x-1)\right)y=0.$$

方程

$$(x+2)\frac{dz}{dx}+(3x+4)z=0$$

的解是 $A(x+2)^2e^{-3x}$，而

$$(x-1)\frac{dy}{dx}-(2x-1)y=A(x+2)^2e^{-3x}$$

的解是

$$y=(x-1)e^{2x}\left\{B+A\int\left(\frac{x+2}{x-1}\right)^2e^{-5x}dx\right\}.$$

附記. 1) 可以换变数把(1)中的 $v(x)$ 消去. 命 $y=p'z$，则

$$u(x)(p''z+2p'z'+pz'')+v(x)(p'z+pz')+w(x)pz=0.$$

如能取 p 使

$$2p'u + vp = 0,$$

则 z' 的系数等于 0. 这方程的解是

$$p = e^{-\frac{1}{2}\int v/u dx}.$$

即得所求.

2) 方程組(3)似乎不难解,实则大不然! 先由第一式定 p, r, 再由

$$rq + ps = v - p\frac{dr}{dx}$$

$$p\frac{ds}{dx} + qs = w$$

解出 q, s 来. 由前式

$$q = \frac{1}{r}\left(v - p\frac{dr}{dx} - ps\right),$$

代入后式得

$$p\frac{ds}{dx} + \frac{1}{r}\left(v - p\frac{dr}{dx} - ps\right)s = w.$$

这是一个 s 的 Riccati 方程,并不簡单. 虽无所得,但建立起一个二阶方程与 Riccati 方程的关系.

3) 綫性方程的解也有綫性性質,即如果 y_1, y_2 是解,则 $\lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2$ 也是解. 二阶方程的解有两个任意常数,因此二阶綫性方程有两个解 y_1, y_2, 使其他的解一定可以表成为 $\lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2$. 如果 y_1^*, y_2^* 是另两个有这样性質的解,则有常数 α, β, γ, δ 使

$$y_1^* = \alpha y_1 + \beta y_2, \quad y_2^* = \gamma y_1 + \delta y_2,$$

而 $\alpha\delta - \beta\gamma \neq 0$. 命 $y_1/y_2 = s$, $y_1^*/y_2^* = s^*$ 则

$$\frac{s'''}{s'} - \frac{3}{2}\left(\frac{s''}{s'}\right)^2 = \frac{s^{*'''}}{s^{*'}} - \frac{3}{2}\left(\frac{s^{*''}}{s^{*'}}\right)^2.$$

这不变量称为 Schwarzian.

習題. 解

(i) $axy'' + (3a + bx)y' + 3by = 0.$

(ii) $(x - 1)(x - 2)y'' - (2x - 3)y' + 2y = 0.$

(iii) $(2x - 1)y'' - (3x - 4)y' + (x - 3)y = 0.$

(iv) $(x^2 + 3x + 2)y'' + \left(5x^2 + \frac{21}{2}x + 4\right)y' + \left(6x^2 + \frac{17}{2}x + 4\right)y = 0.$

(v) $(x^2 - 1)y'' - (3x + 1)y' - (x^2 - x)y = 0.$

(vi) $x^2(a - bx)y'' - 2x(2a - bx)y' + 2(3a - bx)y = 6a^2.$

§ 15. 常系数綫性方程

从上节中求解方程組(14.3)来解二阶微分方程虽然没有多大价值,但对处理常系数方程还是十分有用的,即如果 u, v, w 是常数时,我們假定 p, q, r, s 是常数,则

$$pr = u, \quad qr + ps = v, \quad qs = w.$$

并且不失去普遍性,我們假定 $u = 1$, 并設 $p = r = 1$, 于是問題变为求

$$q + s = v, \quad qs = w$$

的解,即 q, s 是方程

$$\lambda^2 - v\lambda + w = 0$$

的解,命 λ_1, λ_2 是其二解,則

$$\frac{d^2y}{dx^2} + v\frac{dy}{dx} + wy = \left(\frac{d}{dx} - \lambda_1\right)\left(\frac{d}{dx} - \lambda_2\right)y$$

我們現在分三种情况来討論: (i)二实根, (ii)重根, (iii)二虚根。

例 1. 命 λ_1 与 λ_2 是二不相等的实数,解

$$\frac{d^2y}{dx^2} - (\lambda_1 + \lambda_2)\frac{dy}{dx} + \lambda_1\lambda_2 y = f(x).$$

由

$$\frac{dz}{dx} - \lambda_1 z = f(x)$$

解得

$$z = e^{\lambda_1 x}\left(\int^x e^{-\lambda_1 t} f(t)dt + c_1\right),$$

再由

$$\frac{dy}{dx} - \lambda_2 y = e^{\lambda_1 x}\left(\int^x e^{-\lambda_1 t} f(t)dt + c_1\right)$$

解得

$$y = e^{\lambda_2 x}\left(\int^x e^{(\lambda_1-\lambda_2)u}du\int^u e^{-\lambda_1 t} f(t)dt + c_1\frac{e^{(\lambda_1-\lambda_2)x}}{\lambda_1 - \lambda_2} + c_2\right).$$

$$= \frac{e^{\lambda_1 x}\int^x e^{-\lambda_1 t} f(t)dt - e^{\lambda_2 x}\int^x e^{-\lambda_2 t} f(t)dt}{\lambda_1 - \lambda_2} + ae^{\lambda_1 x} + be^{\lambda_2 x}.$$

例 2. 解

$$\frac{d^2y}{dx^2} - 2\lambda\frac{dy}{dx} + \lambda^2 y = f(x).$$

同法得

$$\frac{dy}{dx} - \lambda y = e^{\lambda x}\left(\int^x e^{-\lambda t} f(t)dt + c_1\right),$$

即得

$$\frac{d}{dx}(e^{-\lambda x}y) = \int^x e^{-\lambda t} f(t)dt + c_1,$$

$$y = e^{\lambda x}\int^x (x - t)e^{-\lambda t} f(t)dt + c_1 xe^{-\lambda x} + c_2 e^{-\lambda x}.$$

例 3. 假定 $p^2 - q < 0$, 求解

$$y'' + 2py' + qy = f(x).$$

仍用例 1 来推导,其中

$$\lambda_1 = -p + \sqrt{p^2 - q}, \quad \lambda_2 = -p - \sqrt{p^2 - q}.$$

命 $\lambda_1 - \lambda_2 = 2\sqrt{p^2 - q} = i\Delta$, 而

$$\Im\int^x e^{\lambda_1(x-t)} f(t)dt = \int^x e^{-p(x-t)}\sin\Delta(x - t)f(t)dt,$$

因此例 3 的解答是

$$y=\int^{x}e^{-p(x-t)}\sin\Delta(x-t)f(t)dt+c_1e^{-px}\cos\Delta x+c_2e^{-px}\sin\Delta x.$$

現在我們会解一切的常系数綫性方程了. 命

$$y^{(n)}+a_1y^{(n-1)}+\cdots+a_{n-1}y'+a_ny=f(x). \tag{1}$$

把方程

$$\lambda^n+a_1\lambda^{n-1}+\cdots+a_{n-1}\lambda+a_n=0$$

左端的多項式分解为

$$(\lambda-\alpha_1)\cdots(\lambda-\alpha_r)(\lambda^2-p_1\lambda+q_1)\cdots=0,$$

此处 $\alpha_1, \cdots, \alpha_r, p_1, q_1\cdots$ 为实数. 解方程(1)的問題一变而为解方程

$$\left(\frac{d}{dx}-\alpha_1\right)\cdots\left(\frac{d}{dx}-\alpha_r\right)\left(\frac{d^2}{dx^2}-p_1\frac{d}{dx}+q_1\right)\cdots y=f(x)$$

的問題,也就变为陆續解出

$$\frac{dy_1}{dx}-\alpha_1y_1=f(x),$$

$$\frac{dy_2}{dx}-\alpha_2y_2=y_1,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\frac{dy_r}{dx}-\alpha_ry_r=y_{r-1},$$

$$\frac{d^2y_{r+1}}{dx^2}-p_1\frac{dy_{r+1}}{dx}+q_1y_{r+1}=y_r$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

的問題了. 而每一步都是我們所确知的.

習題 1. 解出

(i) $y'''-by''+ay'-by=\sin x,$

(ii) $y'''+2y''+y=x^2\cos ax,$

(iii) $\dfrac{d^6y}{dx^6}+y=\sin\dfrac{3}{2}x\sin\dfrac{1}{2}x.$

習題 2. 方程

$$\frac{d^2y}{dx^2}-2a\frac{dy}{dx}+by=ce^{px}\sin(qx+\alpha)$$

(此处 a, b, c, p, q, α 是常数)在动力学上是很重要的,試分各种情况来分析其解答.

習題 3. 試解

$$x\frac{dy}{dx}+\lambda y=f(x)$$

及

$$x^2\frac{d^2y}{dx^2}+px\frac{dy}{dx}+qy=g(x).$$

看能不能推广!

第十章 定 积 分

§1. 求 面 积

假定 $c < a < b$，求在 $x = a$, $x = b$ 之間，x 軸与曲綫

$$y = f(x) \tag{c}$$

之間的面积．为方便起見，我們暫时假定曲綫 (C) 在 x 軸的上方．

命 $F(x)$ 表 c, x 之間及 x 軸与曲綫 (C) 之間的面积，

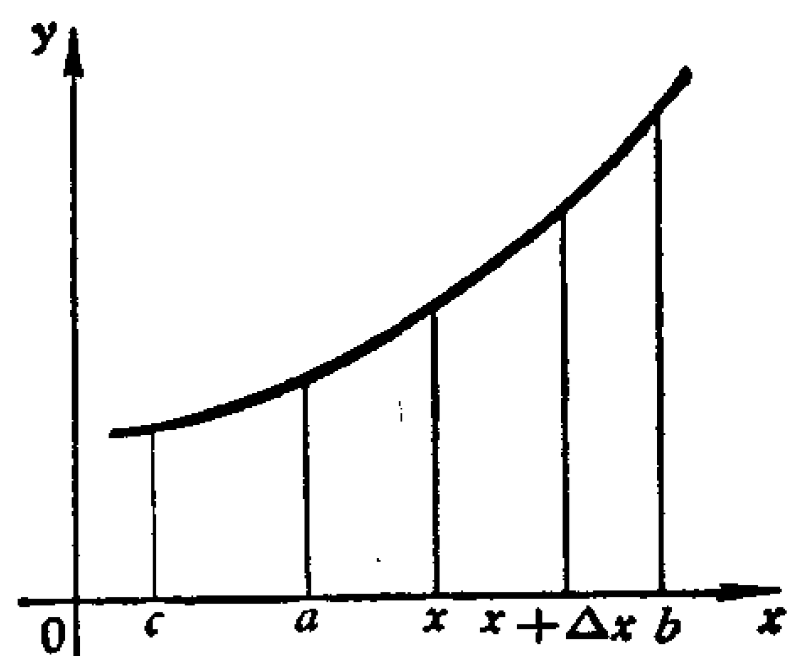


图 166

命

$$M = \max_{x \leqslant t \leqslant x+\Delta x} f(t), \quad m = \min_{x \leqslant t \leqslant x+\Delta x} f(t), \tag{1}$$

考虑面积大小显然有

$$m\Delta x \leqslant F(x + \Delta x) - F(x) \leqslant M\Delta x, \tag{2}$$

也就是

$$m \leqslant \frac{F(x + \Delta x) - F(x)}{\Delta x} \leqslant M. \tag{2'}$$

假定 $f(x)$ 是連續的，由 $(2')$，当 $\Delta x \to 0$，可知 $F'(x)$ 存在，且

$$F'(x) = f(x),$$

也就是

$$F(x) = \int f(x)dx + C,$$

这个 C 是待定常数．

在 $x = a$, $x = b$ 之間的面积等于

$$F(b) - F(a).$$

我們就記之为

$$F(b) - F(a) = \int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b,$$

这称为函数 $f(x)$ 的定积分，a, b 各称为定积分的下限与上限．

例如，$f(x) = \lambda x^2$，則在 $(0, x)$ 之間，并在抛物綫与 x 軸之間的面积等于

$$\int_0^x \lambda t^2 dt = \frac{\lambda x^3}{3}.$$

如果曲綫在 x 軸的下方，这方法所求出的数值是面积的負值；如果有一部分在 x 軸的上方，一部分在 x 軸的下方，我們所得出的积分值是在 x 軸上部的面积与 x 軸下部的面积的差．

例如，$f(x) = x^3$．在 $(-a, a)$ 之間的定积分等于

$$\int_{-a}^{a} x^3dx = \frac{x^4}{4}\bigg]_{-a}^{a} = \frac{a^4}{4} - \frac{a^4}{4} = 0.$$

这并不是說面积等于 0. 因为从 0 到 a 积分

$$\int_0^a x^3dx = \frac{a^4}{4}.$$

而从 $-a$ 到 0，积分等于

$$\int_{-a}^0 x^3 = -\frac{a^4}{4}.$$

如果要求的是 x 軸与曲綫 $y = x^3$ 之間在 $-a$ 与 a 間的面积的絕对值，应当是$\frac{1}{2}a^4$.

如果曲綫是由若干个連續曲綫所組成的，我們也可以算出面积. 例如

$$f(x) = \begin{cases} x^2, & 0 \leqslant x \leqslant 1, \\ x^3, & 1 \leqslant x \leqslant 2, \end{cases}$$

則

$$\int_0^2 f(x)dx = \int_0^1 x^2dx + \int_1^2 x^3dx = \frac{1}{3} + \frac{1}{4}(2^4 - 1) = \frac{1}{3} + \frac{15}{4} = 4\frac{1}{12}.$$

例 1. 求界于拋物綫

$$y = ax^2 + bx + c$$

与 x 軸之間，及距离是 h 的两个縱坐标之間的面积等于

$$\frac{h}{6}(y_1 + y_2 + 4y_0),$$

此处 y_1, y_2 是两端的縱坐标，y_0 是中点的縱坐标.

命左端的横坐标是 x_1，面积等于

$$\begin{aligned}
&\int_{x_1}^{x_1+h}(ax^2 + bx + c)dx \\
&= \frac{a}{3}((x_1 + h)^3 - x_1^3) + \frac{1}{2}b((x_1 + h)^2 - x_1^2) + ch \\
&= \frac{1}{3}ah(3x_1^2 + 3x_1h + h^2) + \frac{1}{2}bh(2x_1 + h) + ch \\
&= \frac{h}{6}\bigg[a(x_1 + h)^2 + b(x_1 + h) + c + ax_1^2 + bx_1 + c + \\
&\quad + 4a\left(x_1 + \frac{h}{2}\right)^2 + 4b\left(x_1 + \frac{h}{2}\right) + 4c\bigg].
\end{aligned}$$

明所欲証.

例 2. 求橢圓面积，橢圓的方程是

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

橢圓的总面积等于第一象限內面积的四倍，即

$$\begin{aligned}
S &= 4\int_0^a ydx = 4b\int_0^a \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}dx \\
&= 4ab\int_0^1 \sqrt{1 - t^2}\,dt = 2ab\left(t\sqrt{1 - t^2} + \sin^{-1}t\right)\Big|_0^1 = \pi ab.
\end{aligned}$$

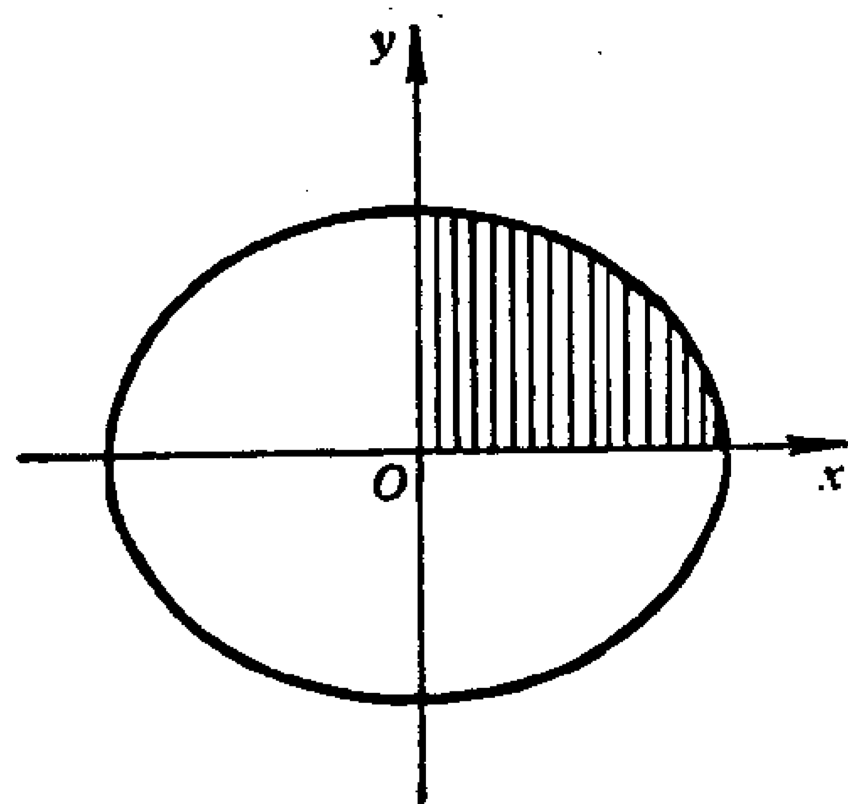


图 167

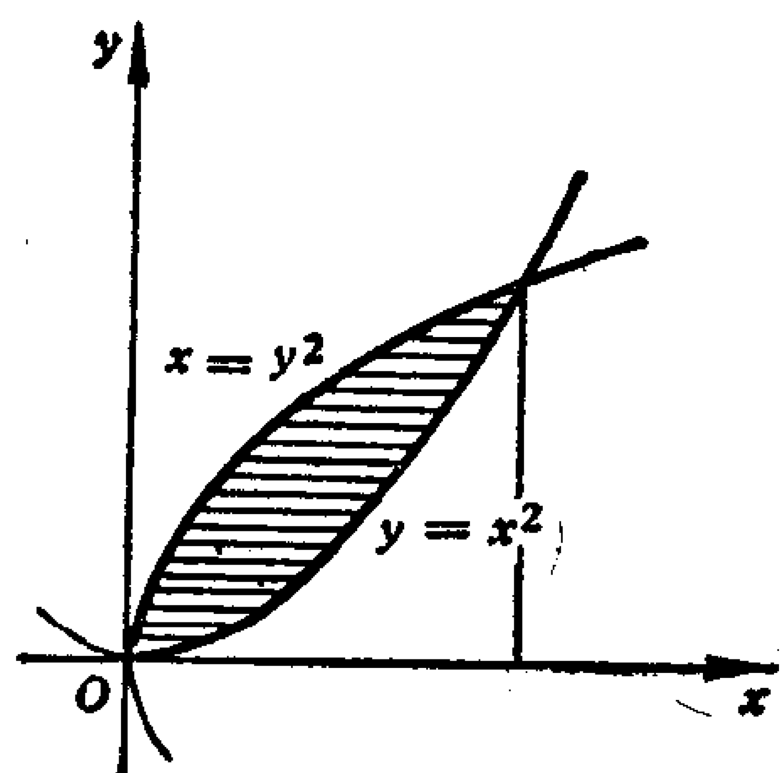


图 168

例 3. 計算在两条曲綫

$$y = x^2, \quad x = y^2$$

間的面积.

解这两个方程得交点(0,0),(1,1),因为在区間(0,1)上

$$\sqrt{x} \geqslant x^2.$$

由此所求的面积等于

$$\int_0^1 \sqrt{x}\,dx - \int_0^1 x^2 dx = \left[\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} - \frac{x^3}{3}\right]_0^1 = \frac{1}{3}.$$

§ 2. 定积分的概念

現在我們可以把定积分的概念抽象化. 如果

$$\frac{d}{dx}F(x) = f(x),$$

我們就定义

$$F(b) - F(a) = \int_a^b f(x)dx$$

为 $f(x)$ 由 a 到 b 的定积分.

我們假定 $a < b$, 并且假定在 a, b 中添上一批分点

$$a = x_0 < x_1 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b,$$

則由 Lagrange 公式得出

$$F(b) - F(a) = \sum_{\nu=1}^{n}(F(x_\nu) - F(x_{\nu-1})) = \sum_{\nu=1}^{n}(x_\nu - x_{\nu-1})f(x'_\nu),$$

这儿 $x_\nu > x'_\nu > x_{\nu-1}$.

我們現在从任意的 $f(x)$ 出发,考虑更一般的和

$$\sigma_n = \sum_{\nu=1}^{n}(x_\nu - x_{\nu-1})f(\xi_\nu), \tag{1}$$

这儿 ξ_ν 是区間 $(x_{\nu-1}, x_\nu)$ 中的任意一点. 我們的問題是当添入任意分点 x_ν, 使

$$\lambda = \max_{\nu=1,2,\cdots,n}(x_\nu - x_{\nu-1}) \to 0$$

时，对任意的 $\xi_v(x_{v-1}\leqslant\xi_v\leqslant x_v)$ 是否 σ_n 皆有相同的极限存在. 如果存在，我們称之为 $f(x)$ 由 a 到 b 的定积分，或称为 Riemann 定积分，而 $f(x)$ 称为 Riemann 可积函数.

如果 $f(x)$ 不是有界的，在和 (1) 中至少有一次沒有意义. 因此現在我們所討論的函数常假定它們适合于

$$m<f(x)<M,$$

即有有限的上下界.

命

$$M_v=\overline{Bd}_{x_{v-1}\leqslant x\leqslant x_v} f(x),\quad m_v=\underline{Bd}_{x_{v-1}\leqslant x\leqslant x_v} f(x)$$

分别表示 $f(x)$ 在区間 $[x_{v-1}, x_v]$ 中的确上界与确下界，并以

$$S_n=\sum_{v=1}^{n} M_v(x_v-x_{v-1}) \tag{2}$$

与

$$s_n=\sum_{v=1}^{n} m_v(x_v-x_{v-1}) \tag{3}$$

分别表示上和数与下和数.

由于和 (2) 恆大于 $m(b-a)$，和 (3) 恆小于 $M(b-a)$，故对于一切可能的分点 $x_0<x_1<\cdots<x_n$，和(2)的确下界与和(3)的确上界是存在的，分别記之为 I^* 与 I_*.

定理 1. 对于任何 $\varepsilon>0$，皆存在 $\delta>0$，当 $\lambda=\max\limits_{1\leqslant v\leqslant m}(y_v-y_{v-1})<\delta$ 时

$$\left|\sum_{v=1}^{m}\overline{M}_v(y_v-y_{v-1})-I^*\right|<\varepsilon,$$

此处 $\overline{M}_v=\overline{Bd}_{y_{v-1}\leqslant y\leqslant y_v} f(y)$，$y_0=a$，$y_n=b$.

証. 对于任何 $\varepsilon>0$，存在一种分点 $D(x_0,\cdots,x_n)$ 使

$$\sum_{v=1}^{n} M_v(x_v-x_{v-1})<I^*+\frac{\varepsilon}{2}.$$

取 δ 满足 $2\delta nM<\frac{\varepsilon}{2}$. 当分点 $D'(y_0,y_1,\cdots,y_m)$ 的相邻分点間最大距离为 λ，而 $\lambda<\delta$ 时，D' 的点所成的小区間 $[y_i, y_{i+1}]$ 有两种，一种包有 D 的点，另一种則不含有 D 的点. 前一种区間最多 $2n$ 个，其全体記之为 I_1，其余都是后一种，其全体記之为 I_2. 則

$$\sum_{[y_{i-1},y_i]\in I_1}\overline{M}_i(y_i-y_{i-1})<2\delta nM<\frac{\varepsilon}{2},$$

$$\sum_{[y_{i-1},y_i]\in I_2}\overline{M}_i(y_i-y_{i-1})\leqslant\sum_{v=1}^{n} M_v(x_v-x_{v-1})<I^*+\frac{\varepsilon}{2}.$$

因此

$$\sum_{i=1}^{m}\overline{M}_i(y_i-y_{i-1})<I^*+\varepsilon;$$

另一方面

$$\sum_{i=1}^{m}\overline{M}_i(y_i-y_{i-1})\geqslant I^*,$$

故明所欲証.

同法可証

定理 2. 对于 $\varepsilon>0$, 皆存在 $\delta>0$, 当 $\lambda=\max\limits_{1\leqslant v\leqslant m}(y_v-y_{v-1})<\delta$ 时

$$\left|\sum_{v=1}^{m}\overline{m}_v(y_v-y_{v-1})-I_*\right|<\varepsilon,$$

此处 $\overline{m}_v=\underset{y_{v-1}\leqslant y\leqslant y_v}{\underline{Bd}}f(y)$.

由于当 $\xi\in[x_{v-1},x_v]$ 时,

$$m_v\leqslant f(\xi)\leqslant M_v,$$

故

$$s_n\leqslant\sigma_n\leqslant S_n.$$

因此 σ_n 有极限的充要条件是

$$\lim_{\lambda\to 0}s_n=\lim_{\lambda\to 0}S_n.$$

命 $\omega_v=M_v-m_v$, 称 ω_v 为 $f(x)$ 在区間 $[x_{v-1},x_v]$ 上的振幅, 因此 $f(x)$ 可积的充要条件又可以写为 $\lim\limits_{\lambda\to 0}\sum\limits_{v=1}^{n}\omega_v(x_v-x_{v-1})=0$.

我們先看一看哪些函数有此性質:

1) 在閉区間 $[a,b]$ 中連續的函数, 因为連續函数是一致連續的, 所以在給了 $\varepsilon>0$ 之后, 我們可以找到 δ 使

$$|x_v-x_{v-1}|<\delta$$

时,

$$|f(x_v)-f(x_{v-1})|<\varepsilon.$$

因此得出

$$M_v-m_v<\varepsilon.$$

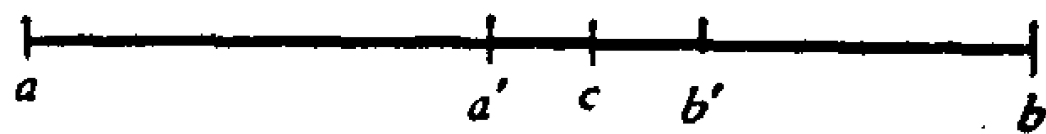
卽得

$$\sum_{v=1}^{n}(M_v-m_v)(x_v-x_{v-1})$$

$$<\varepsilon\sum_{v=1}^{n}(x_v-x_{v-1})=\varepsilon(b-a).$$

卽合所求.

2) 任何一个有有限个間断点的有界函数是可积的. 假定 $|f(x)|\leqslant P$. 为了明确起見, 我們考虑仅有一个間断点的情况, $a<c<b$. 其他情况可以同样考虑. 在某一次分法中小于 c 的最大的分点, 命之为 a', 大于 c 的最小分点命之为 b'. 当分点增加, 使所有相邻分点的距离趋于 0 时,



$$|(b'-a')f(\xi)|\leqslant(b'-a')P\to 0.$$

所以并不影响我們的和，由 a 到 a'，由 b' 到 b 的求和部分与 1）的情况一样.

3）任一单調有界函数都是可积的. 为明确起見，我們假定函数 $f(x)$ 是不下降的，就是

$$f(x_{v-1}) \leqslant f(x_v),$$

即

$$M_v = f(x_v), \quad m_v = f(x_{v-1}).$$

和(2)就是

$$0 \leqslant \sum_{v=1}^{n} [f(x_v) - f(x_{v-1})][x_v - x_{v-1}]$$

$$\leqslant \sum_{v=1}^{n} (f(x_v) - f(x_{v-1})) \max_{v=1,\cdots,n} (x_v - x_{v-1})$$

$$= (f(b) - f(a)) \max_{v=1,\cdots,n} (x_v - x_{v-1}).$$

即得所証.

例 1. 定义函数

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{当 } 0 \leqslant x \leqslant \frac{1}{2}, \\ 1 + \frac{1}{n-1}, & \text{当} 1 - \frac{1}{n} \leqslant x \leqslant 1 - \frac{1}{n+1}, n = 2, 3, 4, \cdots. \end{cases}$$

这是一个有无数个間断点的单調函数，它的由 0 到 1 的积分是

$$\int_0^1 f(x)\,dx = \sum_{n=2}^{\infty} \int_{1-\frac{1}{n}}^{1-\frac{1}{n+1}} \left(1 + \frac{1}{n-1}\right) dx$$

$$= \sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right)\left(1 + \frac{1}{n-1}\right) = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(n+1)(n-1)}$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n+1}\right) = \frac{3}{4}.$$

例 2. Dirichlet 函数

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{若 } x \text{ 为有理数} \\ 0, & \text{若 } x \text{ 为无理数} \end{cases}$$

不是可积的，原因是对任一区間皆有 $M - m = 1$，即得和(2)等于

$$\sum_{v=1}^{n} (x_v - x_{v-1}) = b - a.$$

不趋于 0.

§3. 可积函数的性質

1）如果函数 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上可积，則 $|f(x)|$ 也在这区間上可积.

对函数 $|f(x)|$ 加以証明，在区間 $[a, b]$ 上任何两点 x', x''，我們有

$$\left| |f(x'')| - |f(x')| \right| \leqslant |f(x'') - f(x')|,$$

所以函数 $|f(x)|$ 在任一区間的振幅 ω_i^* 不超过 $f(x)$ 的振幅 ω_i. 因此

$$\sum_{i=1}^{n}\omega_i^*(x_i-x_{i-1})\leqslant\sum_{i=1}^{n}\omega_i(x_i-x_{i-1}).$$

后面的和当 $\lambda\to 0$ 时趋于 0，所以第一个和也必定趋于0，这就説明了 $|f(x)|$ 的可积性.

2）如果 $f(x)$ 与 $g(x)$ 在 $[a, b]$ 上可积，則它們的和、差与乘积都是可积的.

我們仅討論乘积的情形：假定 $|f(x)|\leqslant K$, $|g(x)|\leqslant L$, 在区間 $[x_{v-1}, x_v]$ 上任取二点 x', x'', 考虑差数

$$f(x'')g(x'')-f(x')g(x')=(f(x'')-f(x'))g(x'')+(g(x'')-g(x'))f(x').$$

如果 ω_v, ω_v' 分别是 $f(x)$, $g(x)$ 在 $[x_{v-1}, x_v]$ 上的振幅，則

$$|f(x'')g(x'')-f(x')g(x')|\leqslant L\omega_v+K\omega_v',$$

即 $f(x)g(x)$ 在 $[x_{v-1}, x_v]$ 上的振幅 ω_v'' 适合于

$$\omega_v''\leqslant L\omega_v+K\omega_v',$$

即

$$\Sigma\omega_v''(x_v-x_{v-1})\leqslant L\Sigma\omega_v(x_v-x_{v-1})+K\Sigma\omega_v'(x_v-x_{v-1}).$$

当 $\lambda\to 0$ 时，后二項都趋于 0，所以第一項也趋于 0.

3）如果 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上是可积的，則在它的任一部分区間 $[\alpha, \beta]$ 上也是可积的，又如果把 $[a, b]$ 分割为若干个部分区間，并且在每一部分区間上 $f(x)$ 是可积的，那末在区間 $[a, b]$ 上，$f(x)$ 也是可积的.

証. 先作 $\Sigma\omega_v(x_v-x_{v-1})$，并假定分点中包括 α 与 β，則在这和中略去一些正項，就是 $f(x)$ 在 $[\alpha, \beta]$ 上的和数. 如果第一个和数趋于 0，則这个和数也趋于 0.

假定 $[a, b]$ 分成为 $[a, c]$ 与 $[c, b]$ $(a<c<b)$，取 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上的和数 $\Sigma\omega_v(x_v-x_{v-1})$. 如果 c 在这些分点中，則所举出的和数是由区間 $[a, c]$ 与 $[c, b]$ 的两个和数所組成的，并且这两个和数都趋于 0. 如果 c 不是分点，这結論仍然正确. 因为添上这一分点之后，仅改变了一項，且这一項显然趋于 0.

4）如果改变可积函数在有限个（数目 $=k$）点上的数值，它的可积性并不会被破坏.

証. 和数 $\sum_{v=1}^{?}\omega_v(x_v-x_{v-1})$ 受影响的項数不超过 k，而每項都趋于 0，明所欲証.

§4. 定积分的基本性質

已往我們总是假定了 $a<b$，把定积分

$$\int_a^b f(x)dx$$

看成为形如

$$\sum_{v=1}^{n}f(\xi_v)(x_v-x_{v-1})\quad(x_{v-1}\leqslant\xi_v\leqslant x_v)$$

的和的极限. 实质上，如果 $a>b$，我們可以用下面的方法来定义积分. 插入分点：

$$a=x_0>x_1>x_2>\cdots x_{v-1}>x_v>\cdots>x_n=b,$$

而积分的和数就是

$$\sigma = \sum_{\nu=1}^{n} f(\xi_\nu)(x_\nu - x_{\nu-1}), \quad x_{\nu-1} \geqslant \xi_\nu \geqslant x_\nu.$$

这样所引出来的积分,比以往的积分仅差一个符号. 切实些說,我們有性質:

1) $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx.$

我們还有

$$\int_a^b dx = b - a.$$

在式中当 $a = b$ 时,可知

$$\int_a^a f(x)dx = 0.$$

現在可以不管次序,我們常有下述性質.

2) $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx.$

証. 首先考慮 $a < c < b$ 的情况. 函数在区間 $[a, c]$ 与 $[c, b]$ 上是可积的, 因而得出以上的等式. 又如 $a < b < c$, 且 $f(x)$ 在 $[a, c]$ 上可积,則

$$\int_a^c f(x)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dx.$$

移項并改变积分方向,即得所要求的关系式.

3) 显然可以推广为:若有一列数 $a, b, \cdots, k, l$ 依任何順序排列,則

$$\int_a^l f(x)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dx + \cdots + \int_k^l f(x)dx.$$

4) 积分的綫性关系.

定理 1. 对任意的实数 α, β 及 $f(x)$ 与 $g(x)$ 是在 $[a, b]$ 上可积的函数,可得

$$\int_a^b (\alpha f(x) + \beta g(x))dx = \alpha \int_a^b f(x)dx + \beta \int_a^b g(x)dx.$$

証. 任意分割区間 $[a, b]$, 各作积分和数得

$$\sum_{\nu=1}^{n} (\alpha f(\xi_\nu) + \beta g(\xi_\nu))(x_\nu - x_{\nu-1})$$

$$= \alpha \sum_{\nu=1}^{n} f(\xi_\nu)(x_\nu - x_{\nu-1}) + \beta \sum_{\nu=1}^{n} g(\xi_\nu)(x_\nu - x_{\nu-1}).$$

命 $\lambda \to 0$, 求极限即得所求.

这定理有两个重要特例:

$$\int_a^b \alpha f(x)dx = \alpha \int_a^b f(x)dx$$

及

$$\int_a^b (f(x) \pm g(x))dx = \int_a^b f(x)dx \pm \int_a^b g(x)dx.$$

由这两特例显然也能推出定理 1.

5）正函数的积分取正值.

定理 2. 如果 $f(x)$, $g(x)$ 在 $[a, b]$ 上是可积的，并且 $f(x) \leqslant g(x)$ [或 $f(x) < g(x)$]，则当 $a < b$ 时，

$$\int_a^b f(x)dx \leqslant \int_a^b g(x)\,dx \left[\text{或} \int_a^b f(x)dx < \int_a^b g(x)dx\right].$$

証. 1）先研究 $f(x)=0$ 的情况. 由 $g(x) \geqslant 0$，可知对 $g(x)$ 的积分和都是 $\geqslant 0$，所以得到

$$\int_a^b g(x)dx \geqslant 0.$$

較难証明的是：当 $g(x) > 0$ 时，

$$\int_a^b g(x)dx > 0.$$

用反証法，假如

$$\int_a^b g(x)dx = 0.$$

于是当 $\lambda \to 0$ 时

$$\sum_{\nu=1}^{n} M_\nu(x_\nu - x_{\nu-1}) \to 0.$$

卽取任意 $\varepsilon_1 > 0$，可使这和数比 $\varepsilon_1(b-a)$ 小，卽至少有一个 M_ν 比 ε_1 小，卽在 $[a, b]$ 上可以找到一个分区間 $[a_1, b_1]$，在这区間上 $g(x) < \varepsilon_1$.

又因为

$$\int_{a_1}^{b_1} g(x)dx \leqslant \int_a^b g(x)dx = 0,$$

卽

$$\int_{a_1}^{b_1} g(x)dx = 0,$$

所以 $[a_1, b_1]$ 中有一部分区間 $[a_2, b_2]$，在其上 $g(x) < \varepsilon_2$，这 $\varepsilon_2 < \varepsilon_1$.

取一正数列 $\varepsilon_h \to 0$，这样便得出一串区間，前者套有后者，使

$$0 < g(x) < \varepsilon_h, \quad a_h \leqslant x \leqslant b_h.$$

所以存在这些区間的一个公共点 c，使

$$0 < g(c) < \varepsilon_h, \quad h = 1, 2, 3, \cdots.$$

因为 $\varepsilon_h \to 0$，这是不可能的，故得定理.

2）把 1）用到

$$\int_a^b (g(x) - f(x))dx,$$

卽得定理.

特别可以推得

定理 3. 在区間 $[a, b]$ 上，如有

$$|f(x)| \leqslant \varphi(x) \leqslant M,$$

則

$$\left|\int_a^b f(x)dx\right| \leqslant \int_a^b \varphi(x)dx \leqslant M(b-a), \ (b > a).$$

証. 由定理的条件可知

$$-M \leqslant -\varphi(x) \leqslant f(x) \leqslant \varphi(x) \leqslant M.$$

由上定理2得

$$-M(b-a) \leqslant -\int_a^b \varphi(x)dx \leqslant \int_a^b f(x)dx \leqslant \int_a^b \varphi(x)dx \leqslant M(b-a).$$

这就是所要証明的不等式.

定理3有一个重要的特例

$$\left|\int_a^b f(x)dx\right| \leqslant \int_a^b |f(x)|dx.$$

且仅当 $f(x)$ 不变号时取等号.

附記. 若 $f(x)$ 是 $[a, b]$ 上的复值函数，又若 $f(x) = u(x) + iv(x)$，此处 $u(x)$ 与 $v(x)$ 都是实值可积函数，則定义

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b u(x)dx + i\int_a^b v(x)dx.$$

以上不少性質在此仍对，例如当 $f(x)$ 与 $|f(x)|$ 皆可积时，有

$$\left|\int_a^b f(x)dx\right| \leqslant \int_a^b |f(x)|dx.$$

証. 引进分点

$$a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b.$$

命 ξ_v 为 $[x_v, x_{v+1}]$ 中的一点，則

$$\left|\sum_{v=0}^{n-1} f(\xi_v)(x_{v+1} - x_v)\right| \leqslant \sum_{v=0}^{n-1} |f(\xi_v)|(x_{v+1} - x_v).$$

命 $\max\limits_{0\leqslant v\leqslant n-1}(x_{v+1} - x_v) \to 0$，卽明所欲証.

§5. 中値公式及积分基本定理

定理1（中値定理）. 假定 $f(x)$ 是区間 $[a, b]$ 上的連續函数. 如果函数 $\varphi(x)$ 在区間 $[a, b]$ 上不变号且可积，則在 $[a, b]$ 中有一点 ξ，使

$$\int_a^b f(x)\varphi(x)dx = f(\xi)\int_a^b \varphi(x)dx.$$

証. 我們不妨假定 $\varphi(x) \geqslant 0$ 及 $a < b$，用 m 与 M 分别代表 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上的最小値与最大値，于是

$$m \leqslant f(x) \leqslant M.$$

可得

$$m\int_a^b \varphi(x)dx \leqslant \int_a^b f(x)\varphi(x)dx \leqslant M\int_a^b \varphi(x)dx.$$

因为 $f(x)$ 是連續函数，所以在 $[a, b]$ 上 $f(x)$ 取 m 与 M 之間的所有値，当然也取

$$f(\xi) = \int_a^b f(x)\varphi(x)dx \Big/ \int_a^b \varphi(x)dx.$$

即得定理(但須特别考慮 $\int_a^b \varphi(x)dx = 0$ 的情况,在这种情况下,定理显然成立). 重要的特例是 $\varphi(x) = 1$, 即

定理 2. 在 $[a, b]$ 中有一点 ξ, 使

$$\int_a^b f(x)dx = f(\xi)(b-a).$$

命

$$F(x) = \int_a^x f(x)dx,$$

則

$$\int_a^x f(x)dx = f(\xi)(x-a),\ a \leqslant \xi \leqslant x.$$

这就是上限的一个函数.

定理 3. 若 $f(x)$ 連續, 則

$$\frac{d}{dx}F(x) = f(x).$$

証. 由微商的定义

$$\frac{dF(x)}{dx} = \lim_{h\to 0}\frac{F(x+h)-F(x)}{h}.$$

我們由定理 2 可知

$$F(x+h) - F(x) = \int_a^{x+h} f(t)dt - \int_a^x f(t)dt =$$

$$= \int_x^{x+h} f(t)dt = hf(\xi),\ x \leqslant \xi \leqslant x+h.$$

命 $h \to 0$, 則得

$$\frac{dF(x)}{dx} = f(x).$$

注意当 $x = a$ 时,我們可以限制 h 只取正值.

由此也显然可見 $F(x)$ 是一个連續函数,这也是我們定义 $F(a) = 0$ 的道理. 并可見任意一个連續函数 $f(x)$ 一定有一个原函数 $F(x)$. 又如果 $F_1(x)$ 是 $f(x)$ 的任意一个原函数,則由

$$F_1(x) = F(x) + C$$

可知

$$\int_a^b f(t)dt = F_1(b) - F_1(a).$$

以上所得出的公式称为积分学基本公式. 更一般些,我們可以叙述为

定理 4. 假定 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上可积,及在 $[a, b]$ 上的連續函数 $F(x)$, 它在 (a, b) 上处处有微商 $f(x)$:

$$F'(x) = f(x)$$

(甚至于可以允許有有限个点例外), 則得

$$F(b) - F(a) = \int_a^b f(x)dx.$$

証. 把 $[a, b]$ 用点

$$x_0 = a < x_1 < x_2 < \cdots < x_{v-1} < x_v < \cdots < x_n = b$$

分为若干部分,显然有

$$F(b) - F(a) = \sum_{v=1}^{n} (F(x_v) - F(x_{v-1}))$$

$$= \sum_{v=1}^{n} F'(\xi_v)(x_v - x_{v-1}),$$

此处 ξ_v 在 x_v 与 x_{v-1} 之間. 把 $F'(\xi_v)$ 写成为 $f(\xi_v)$, 則得

$$F(b) - F(a) = \sum_{v=1}^{n} f(\xi_v)(x_v - x_{v-1}).$$

右端就是函数 $f(x)$ 的积分和数 σ, 我們已經假定对和数 σ, 当 $\lambda \to 0$ 时,不依賴于 ξ_i 的选取,存在唯一的极限,因此得出

$$F(b) - F(a) = \int_a^b f(x)dx.$$

如果我們用 x 代 b, 以 $F'(x)$ 代 $f(x)$, 則得

$$F(x) = F(a) + \int_a^x F'(t)dt.$$

这是还原公式.

§6. 第二中值公式

定理 1 (Abel). 命 $\varepsilon_0, \varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_p$ 表一递減的正数列, $u_0, u_1, \cdots, u_p$ 表实数. 如果 $s_0 = u_0, s_1 = u_0 + u_1, \cdots, s_p = u_0 + \cdots + u_p$ 都在 A 与 B 之間,則和

$$S = \varepsilon_0 u_0 + \varepsilon_1 u_1 + \cdots + \varepsilon_p u_p$$

在 $A\varepsilon_0$ 与 $B\varepsilon_0$ 之間.

証. 把 S 改写为

$$S = \varepsilon_0 s_0 + \varepsilon_1(s_1 - s_0) + \varepsilon_2(s_2 - s_1) + \cdots + \varepsilon_p(s_p - s_{p-1}) =$$
$$= s_0(\varepsilon_0 - \varepsilon_1) + s_1(\varepsilon_1 - \varepsilon_2) + \cdots + s_{p-1}(\varepsilon_{p-1} - \varepsilon_p) + s_p\varepsilon_p.$$

由于 ε_v 的递減性,所以 $\varepsilon_{v-1} - \varepsilon_v$ 都是正的,因此

$$S > A(\varepsilon_0 - \varepsilon_1 + \varepsilon_1 - \varepsilon_2 + \cdots + \varepsilon_{p-1} - \varepsilon_p + \varepsilon_p) = A\varepsilon_0,$$

同法可証 $S < B\varepsilon_0$.

定理 2 (第二中值公式). 在区間 $[a, b]$ $(a < b)$上, 如果 $f(x)$ 是单調递減非負函数, $g(x)$ 在 $[a, b]$ 上是可积的,則有一数 ξ, $a \leqslant \xi \leqslant b$, 使

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = f(a)\int_a^\xi g(x)dx.$$

証. 左边的积分就是和

$$I = f(a)g(a)(x_1 - a) + f(x_1)g(x_1)(x_2 - x_1) + \cdots$$

的极限,这和在二和

$$I' = \sum_v M_v f(x_{v-1})(x_v - x_{v-1}), \quad I'' = \sum_v m_v f(x_{v-1})(x_v - x_{v-1})$$

之間，此处 M_v 与 m_v 分别表示 $g(x)$ 在 $[x_{v-1}, x_v]$ 上的上、下界．差数 $I' - I''$ 小于

$$f(a)\sum_v (M_v - m_v)(x_v - x_{v-1}) \to 0,$$

所以对任意在 $m_i \leqslant \mu_i \leqslant M_i$ 之間的 μ_i，和 $I_1 = \Sigma \mu_v f(x_{v-1})(x_v - x_{v-1})$ 的极限都是 $\int_a^b f(x)g(x)dx$.

由上节的中值公式，我們可以选得 μ_v 使

$$\mu_v(x_v - x_{v-1}) = \int_{x_{v-1}}^{x_v} g(x)dx.$$

由于 $f(x)$ 是单調递减非負的，所以由引理$\left(S_v = \int_a^{x_v} g(x)dx\right)$可知 I_1 之值在

$$Af(a) \text{ 与 } Bf(a)$$

之間，此处

$$A = \min_{a\leqslant c\leqslant b}\int_a^c g(x)dx,\ B = \max_{a\leqslant c\leqslant b}\int_a^c g(x)dx.$$

I_1 的极限 $\int_a^b f(x)g(x)dx$ 也在 $Af(a)$ 与 $Bf(a)$ 之間，因为 $\int_a^c g(x)dx$ 是 c 的連續函数，所以有 ξ 存在使

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = f(a)\int_a^\xi g(x)dx \quad a \leqslant \xi \leqslant b.$$

类似地，如果 $f(x)$ 是单調递增非負的函数，则有公式

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = f(b)\int_\xi^b g(x)dx, \quad a \leqslant \xi \leqslant b.$$

如果保留 $f(x)$ 的单調性，而不假定它的非負性，则有

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = f(a)\int_a^\xi g(x)dx + f(b)\int_\xi^b g(x)dx,$$

此处 $a \leqslant \xi \leqslant b$.

証．假定 $f(x)$ 是递减的，我們考虑 $f(x) - f(b)$ 是非負递减的，因此

$$\int_a^b (f(x) - f(b))g(x)dx = (f(a) - f(b))\int_a^\xi g(x)dx,$$

即得

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = f(a)\int_a^\xi g(x)dx + f(b)\int_\xi^b g(x)dx.$$

同法，考虑 $f(x)$ 是递增的情况．

以后我們可以看到，在研究非絕对收斂的积分中，第二中值公式有很重要的用处．

§7. 例　子

例 1. $\int_a^b x^\mu dx = \left.\frac{x^{\mu+1}}{\mu+1}\right|_a^b = \frac{b^{\mu+1} - a^{\mu+1}}{\mu+1} \quad (\mu \neq -1),$

而

$$\int_a^b x^{-1}dx = \log x\Big|_a^b = \log b - \log a \quad (a>0, b>0).$$

習題. 考慮 $a<0$, $b<0$ 的情况.

例 2. $\int_a^b \sin x dx = -\cos x\Big|_a^b = \cos a - \cos b$

$$\int_a^b \cos x dx = \sin x\Big|_a^b = \sin b - \sin a.$$

例 3. $\int_{-\pi}^{\pi} \sin mx \sin nx dx = \frac{1}{2}\left[\frac{\sin(m-n)x}{m-n} - \frac{\sin(m+n)x}{m+n}\right]_{-\pi}^{\pi} = 0$

(如果 $n \neq m$);

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin^2 mx dx = \frac{1}{2}\left[x - \frac{\sin 2mx}{2m}\right]_{-\pi}^{\pi} = \pi;$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin mx \cos nx dx = 0;$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos mx \cos nx\, dx = \begin{cases} 0, & \text{若 } n \neq m, \\ \pi, & \text{若 } n = m. \end{cases}$$

例 4. 对自然数 m, n 有

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(2m-1)x}{\sin x} dx = \frac{\pi}{2} \quad \text{(Dirichlet)};$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{\sin nx}{\sin x}\right)^2 dx = \frac{n\pi}{2} \quad \text{(Fejér)}.$$

因为

$$\frac{1}{2} + \sum_{l=1}^{m-1} \cos 2lx = \frac{\sin(2m-1)x}{2\sin x}.$$

逐項求积分,卽得所示.

又

$$\sum_{m=1}^{n} \sin(2m-1)x = \frac{1-\cos 2nx}{2\sin x} = \frac{\sin^2 nx}{\sin x},$$

再利用 Dirichlet 公式卽得 Fejér 公式.

如果对任一 x, $a<x<b$. 在 (a, x) 中 $f(x)$ 可以求积,則我們用以下的定义:

$$\lim_{x\to b} \int_a^x f(x)dx = \int_a^b f(x)dx.$$

例 5. $\int_{-a}^{a} \sqrt{a^2-x^2}dx = \lim_{\varepsilon\to 0}\left[\frac{1}{2}x\sqrt{a^2-x^2} + \frac{a^2}{2}\sin^{-1}\frac{x}{a}\right]_{-a+\varepsilon}^{a-\varepsilon} = \frac{\pi a^2}{2}.$

例 6. $\int_{-\pi}^{\pi} \frac{1-r^2}{1-2r\cos x + r^2} dx \quad (0<r<1).$

这积分函数的原函数等于

$$F(x)=2\mathrm{tg}^{-1}\left(\frac{1+r}{1-r}\mathrm{tg}\frac{x}{2}\right),$$

但在 $x=\pm\pi$ 时这函数没有意义. 可是,极限

$$\lim_{x\to-\pi+0}F(x)=-\pi,\quad \lim_{x\to\pi-0}F(x)=\pi$$

显然存在,因而得

$$\int_{-\pi}^{\pi}\frac{1-r^2}{1-2r\cos x+r^2}dx=\lim_{\varepsilon\to 0}F(x)\Big|_{-\pi+\varepsilon}^{\pi-\varepsilon}=2\pi.$$

例 7. 在計算积分

$$\int_0^1\frac{x^4+1}{x^6+1}dx$$

时,如果在算出来的原函数

$$F(x)=-\frac{1}{3}\mathrm{tg}^{-1}\frac{3x(x^2-1)}{x^4-4x^2+1}$$

中以 $x=0$ 与 $x=1$ 代入,則积分之値为 0. 这是不可能的,因为一个正函数的积分不可能为 0.

錯誤在于原函数有一个間断点 $x_0=\sqrt{2-\sqrt{3}}$,如果将原函数画下图来,很明显当 $0<x<\sqrt{2-\sqrt{3}}$ 时,这原函数所給的値是代表积分

$$\int_0^x\frac{t^4+1}{t^6+1}dt$$

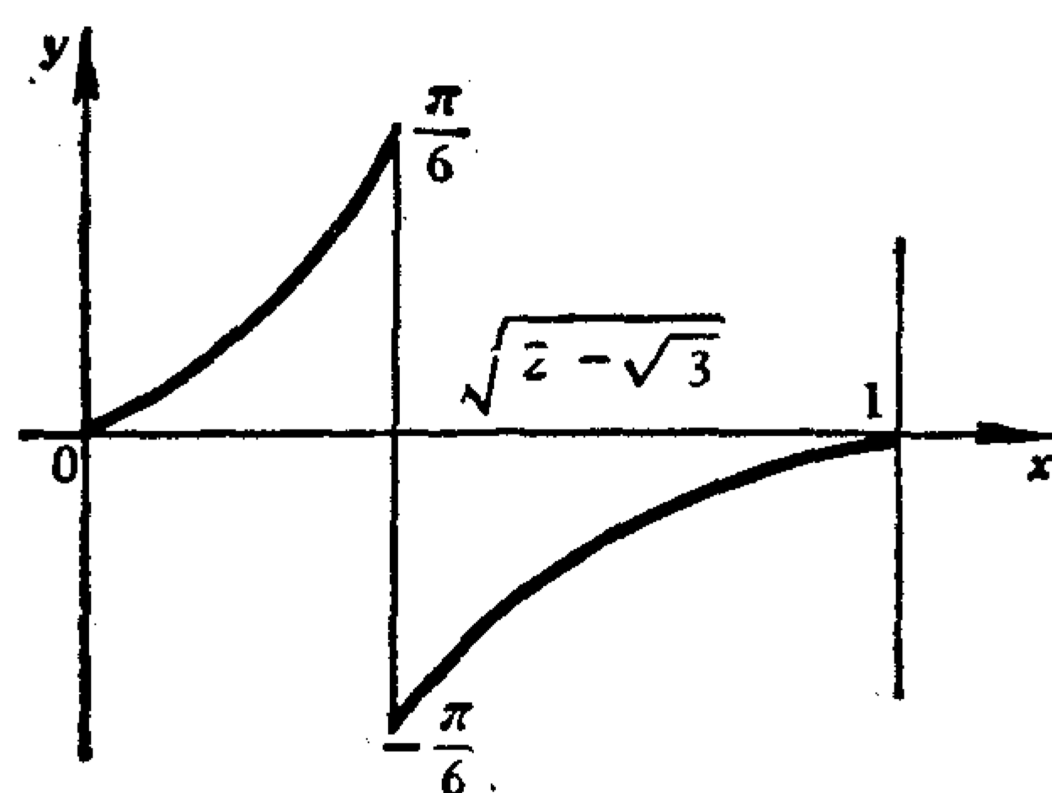


图 169

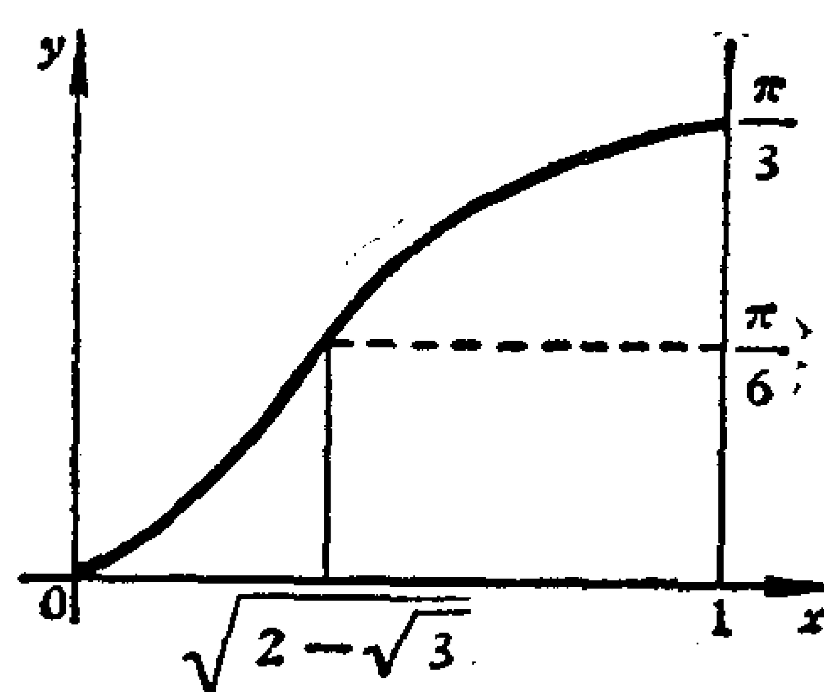


图 170

的,但是当 $x>\sqrt{2-\sqrt{3}}$,显然 $F(x)$ 是不能代表这积分値的. 正确地說,我們的原函数应当是

$$F(x)=\begin{cases}-\dfrac{1}{3}\mathrm{tg}^{-1}\dfrac{3x(x^2-1)}{x^4-4x^2+1}, & 若\ 0\leqslant x\leqslant\sqrt{2-\sqrt{3}},\\ -\dfrac{1}{3}\mathrm{tg}^{-1}\dfrac{3x(x^2-1)}{x^4-4x^2+1}+\dfrac{\pi}{3}, & 若\ \sqrt{2-\sqrt{3}}\leqslant x\leqslant 1.\end{cases}$$

它的图形如图 170.

在实际計算时,我們用

$$\int_0^1 = \lim_{\varepsilon\to 0}\left[\int_0^{x_0-\varepsilon} + \int_{x_0+\varepsilon}^1\right] = \frac{\pi}{3}.$$

例 8. 命 $P(x)$ 与 $Q(x)$ 为 $[a,b]$ 上的两个連續函数,且有連續微商及 $f(x) = P/Q$. 我們現在考虑

$$\int_a^b \frac{f'(x)}{1+f^2(x)}dx = \int_a^b \frac{P'Q - PQ'}{P^2+Q^2}dx.$$

这积分的原函数是 $\operatorname{tg}^{-1}f(x)$. 如果 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 中不变为无穷,則原函数是連續的. 因而得出

$$\int_a^b \frac{f'(x)}{1+f^2(x)}dx = \operatorname{tg}^{-1}f(b) - \operatorname{tg}^{-1}f(a).$$

如果 $f(x)$ 在 (a,b) 中变为无穷了,命 c 为这样的一点,如果經过这一点 $f(x)$ 由 $+\infty$ 变为 $-\infty$,則我們有

$$F(c-0) - F(c+0) = \frac{\pi}{2} - \left(-\frac{\pi}{2}\right) = \pi.$$

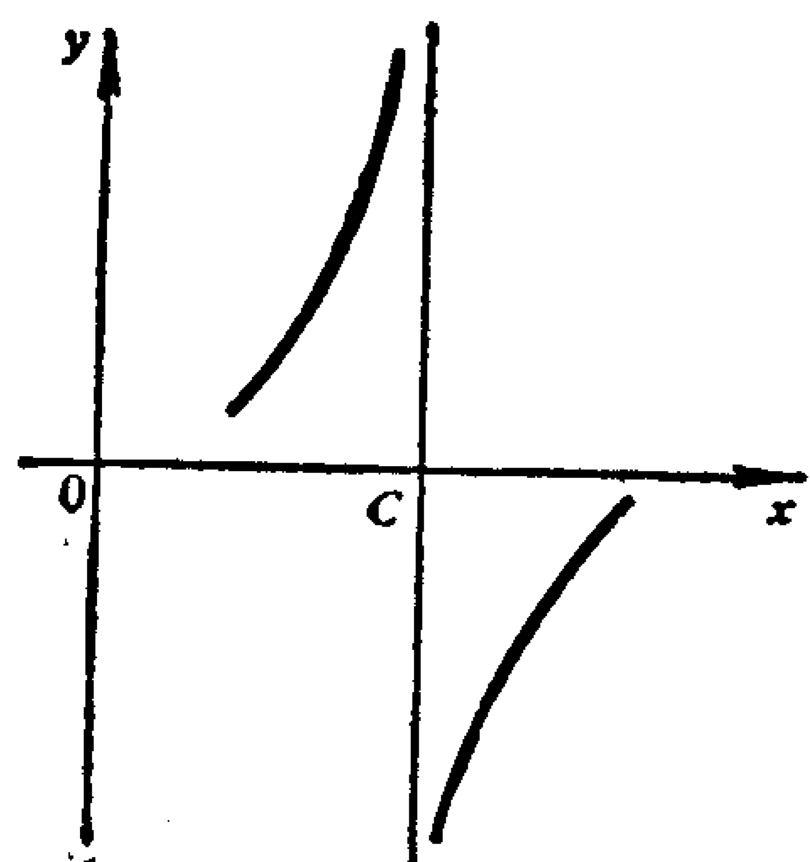


图 171

如果 $f(x)$ 由 $-\infty$ 变为 $+\infty$,則我們有

$$F(c-0) - F(c+0) = -\frac{\pi}{2} - \left(\frac{\pi}{2}\right) = -\pi.$$

如果 $f(x)$ 虽然变为无穷而不变号,則

$$F(c-0) - F(c+0) = 0.$$

假定在 a, b 中 $f(x)$ 有 k 次由 $+\infty$ 变为 $-\infty$,有 k' 次 $f(x)$ 由 $-\infty$ 变为 $+\infty$,則得

$$\int_a^b \frac{f'(x)dx}{1+f^2(x)} = \operatorname{tg}^{-1}f(b) - \operatorname{tg}^{-1}f(a) + \pi(k-k').$$

習題 1. 求积分

$$\int_{-1}^1 \frac{dx}{\sqrt{(1-2\alpha x+\alpha^2)(1-2\beta x+\beta^2)}},\quad 0<\alpha,\beta<1.$$

習題 2. 若 $A>0$, $AC-B^2>0$, 則

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{A\cos^2x + 2B\cos x\sin x + C\sin^2 x} = \frac{\pi}{\sqrt{AC-B^2}}.$$

§8. 换变数公式

命 $\varphi(t)$ 是一个函数,适合于

$$\varphi(\alpha) = a,\quad \varphi(\beta) = b.$$

我們現在的問題是,在怎样的条件下,有等式

$$\int_a^b f(x)dx = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)dt. \tag{1}$$

定理 1. 在以下的一組条件下,(1)式成立:

1) 在 $[a,b]$ 上 $f(x)$ 是連續的;

2) $\varphi(t)$ 在 $[\alpha,\beta]$ 上是連續的，而且当 t 在 $[\alpha,\beta]$ 上时，$\varphi(t)$ 的数值不超出 $[a,b]$ 的范围；

3) 在 $[\alpha,\beta]$ 上 $\varphi(t)$ 有連續微商.

証. 命 $F(x)$ 表 $f(x)$ 的原函数，則函数

$$\Phi(t)=F(\varphi(t))$$

的微分等于

$$\Phi'(t)=F'(\varphi(t))\varphi'(t)=f(\varphi(t))\varphi'(t).$$

因此同时有

$$\int_a^b f(x)dx=F(b)-F(a)$$

及

$$\int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)dt=\Phi(\beta)-\Phi(\alpha)=$$
$$=F(\varphi(\beta))-F(\varphi(\alpha))=F(b)-F(a).$$

这就是我們所要証明的等式.

定理 2. 在以下的一組条件下，(1)式成立：

1) $f(x)$ 是可积的；

2) 当 t 从 α 变到 β 时，$\varphi(t)$ 从 $a=\varphi(\alpha)$ 单調地变到 $b=\varphi(\beta)$；

3) $\varphi'(t)$ 是連續的.

証. 我們不妨假定 $a<b$ 及 $\alpha<\beta$. 函数 $\varphi(t)$ 現在是单調增加. 与分点

$$t_0=\alpha<t_1<t_2<\cdots<t_{\nu-1}<t_\nu<\cdots<t_n=\beta$$

对应的有 $x_\nu=\varphi(t_\nu)(\nu=0,1,2,\cdots n)$，这些点分区間 $[a,b]$ 为

$$x_0=a<x_1<x_2<\cdots<x_{\nu-1}<x_\nu<\cdots<x_n=b.$$

命

$$\lambda=\max_{1\leqslant\nu\leqslant n}|t_\nu-t_{\nu-1}|.$$

由于 $x=\varphi(t)$ 的(一致)連續性，当 $\lambda\to 0$ 时

$$\max_{1\leqslant\nu\leqslant n}|x_\nu-x_{\nu-1}|=\max_{1\leqslant\nu\leqslant n}|\varphi(t_\nu)-\varphi(t_{\nu-1})|$$

也趋于 0.

在 $[t_{\nu-1},t_\nu]$ 中任取一点 τ_ν，作对应于(1)式右边的和数

$$\sigma=\sum_{\nu=1}^n f(\varphi(\tau_\nu))\varphi'(\tau_\nu)(t_\nu-t_{\nu-1}).$$

命 $\xi_\nu=\varphi(\tau_\nu)$，于是 $x_{\nu-1}\leqslant\xi_\nu\leqslant x_\nu$. 用 Lagrange 公式

$$x_\nu-x_{\nu-1}=\varphi(t_\nu)-\varphi(t_{\nu-1})=\varphi'(\bar\tau_\nu)(t_\nu-t_{\nu-1}),$$

此处 $t_{\nu-1}<\bar\tau_\nu<t_\nu$. 但現在的 $\bar\tau_\nu$ 可能与 τ_ν 是不同的，作对应于(1)式左边的积分和数

$$\sigma_1=\sum_{\nu=1}^n f(\xi_\nu)(x_\nu-x_{\nu-1})=$$
$$=\sum_{\nu=1}^n f(\varphi(\tau_\nu))\varphi'(\bar\tau_\nu)(t_\nu-t_{\nu-1}),$$

当 $\lambda\to 0$ 时，这和数的极限就是积分 $\int_a^b f(x)dx$. 为了要証明 σ 也要趋于这一极限，我們只要証明 $\sigma-\sigma_1\to 0$ 就够了.

給任一 $\varepsilon>0$，由于 $\varphi'(t)$ 的(一致)連續性，可以找到 $\delta>0$ 使 $\lambda<\delta$ 时

$$|\varphi'(\tau_\nu)-\varphi'(\bar{\tau}_\nu)|<\varepsilon.$$

于是

$$|\sigma-\sigma_1|\leqslant\sum_\nu|f(\varphi((\tau_\nu))||\varphi'(\tau_\nu)-\varphi'(\bar{\tau}_\nu)|(t_\nu-t_{\nu-1})<L(\beta-\alpha)\varepsilon,$$

此处 L 表示 $|f(x)|$ 的上界，$\beta-\alpha=\Sigma(t_\nu-t_{\nu-1})$.

这就說明 σ 趋于 $\int_a^b f(x)dx$，定理就完全証明了.

例 1. 在求积分 $\int_0^a\sqrt{a^2-x^2}dx$ 时，用变换 $x=a\sin t$，这儿当 t 由 0 变为 $\frac{1}{2}\pi$ 时，x 由 0 变为 a，所以

$$\int_0^a\sqrt{a^2-x^2}dx=a^2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2 t dt=\frac{a^2}{2}\left(t+\frac{1}{2}\sin 2t\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{\pi a^2}{4}.$$

例 2. $\int_0^\pi\frac{x\sin x}{1+\cos^2 x}dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}+\int_{\frac{\pi}{2}}^\pi.$

替换 $x=\pi-t$ 把最后的积分变为

$$-\int_{\frac{\pi}{2}}^0\frac{(\pi-t)\sin t}{1+\cos^2 t}dt=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{(\pi-t)\sin t}{1+\cos^2 t}dt.$$

因此所求的积分

$$\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin t}{1+\cos^2 t}dt=-\pi\operatorname{tg}^{-1}(\cos t)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{\pi^2}{4}.$$

例 3. 計算积分 $J=\int_0^1\frac{\log(1+x)}{1+x^2}dx.$

作变换 $x=\frac{1-t}{1+t}$，則得

$$J=\int_1^0\frac{\log\frac{2}{1+t}}{1+\left(\frac{1-t}{1+t}\right)^2}\cdot\frac{-2dt}{(1+t)^2}=\int_0^1\frac{\log 2-\log(1+t)}{1+t^2}dt=\log 2\int_0^1\frac{dt}{1+t^2}-J.$$

所以

$$J=\frac{\log 2}{2}\int_0^1\frac{dt}{1+t^2}=\frac{\log 2}{2}\operatorname{tg}^{-1}t\Big|_0^1=\frac{\pi\log 2}{8}.$$

例 4. 求 $I(r)=\int_0^\pi\log(1-2r\cos x+r^2)dx\quad(|r|\neq 1).$

由不等式

$$(1-|r|)^2\leqslant 1-2r\cos x+r^2\leqslant(1+|r|)^2$$

得

$$2\pi\log(1-|r|)\leqslant I(r)\leqslant 2\pi\log(1+|r|).$$

因此

$$\lim_{r\to 0}I(r)=0.$$

命 $x=\pi-t$，则

$$\begin{aligned}I(-r)&=\int_0^\pi \log(1+2r\cos x+r^2)dx\\&=\int_\pi^0 \log(1+2r\cos(\pi-t)+r^2)d(\pi-t)\\&=\int_0^\pi \log(1-2r\cos t+r^2)dt=I(r).\end{aligned}$$

故

$$\begin{aligned}2I(r)&=I(r)+I(-r)=\\&=\int_0^\pi \log[(1-2r\cos x+r^2)(1+2r\cos x+r^2)]dx=\\&=\int_0^\pi \log(1-2r^2\cos 2x+r^4)dx.\end{aligned}$$

命 $2x=t$，则

$$2I(r)=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\log(1-2r^2\cos t+r^4)\,dt=\frac{1}{2}\int_0^\pi+\frac{1}{2}\int_\pi^{2\pi}.$$

在后一积分中命 $t=2\pi-u$，则得

$$I(r)=\frac{1}{2}I(r^2).$$

因此，一步步用上式可知

$$I(r)=\frac{1}{2}I(r^2)=\frac{1}{4}I(r^4)=\cdots=\frac{1}{2^n}I(r^{2^n}).$$

故当 $|r|<1$ 时，由

$$\lim_{n\to\infty}r^{2^n}=0$$

得

$$I(r)=0.$$

当 $|r|>1$ 时，由

$$\log(1-2r\cos x+r^2)=\log r^2\left(1-\frac{2}{r}\cos x+\frac{1}{r^2}\right)$$

得

$$I(r)=2\pi\log|r|+I\left(\frac{1}{r}\right)=2\pi\log|r|.$$

习题 1. 算出 $\int_0^1\frac{\operatorname{tg}^{-1}x}{1+x}dx.$

习题 2. 若 $f(x)$ 是 $[0,a]$ 上的連續函数，则

$$\int_0^a f(x)dx=\int_0^a f(a-t)dt.$$

习题 3. 若 $f(x)$ 是 $[-a,a]$ 內的連續函数，则

$$\int_{-a}^a f(x)dx=\begin{cases}2\int_0^a f(t)dt & \text{若 } f(x) \text{ 为偶函数,}\\ 0 & \text{若 } f(x) \text{ 为奇函数.}\end{cases}$$

習題 4. 若 $f(x)$ 是周期为 ω 的連續函数，卽

$$f(x+\omega)=f(x),$$

則

$$\int_a^{a+\omega} f(x)\,dx=\int_0^{\omega} f(x)\,dx.$$

習題 5. 若 $f(x)$ 是 $[0,1]$ 上的連續函数，則

$$\int_0^{\pi} x f(\sin x)\,dx=\frac{\pi}{2}\int_0^{\pi} f(\sin x)\,dx.$$

習題 6. 若 $\varphi(u)$ 是 $[-\sqrt{a^2+b^2},\ \sqrt{a^2+b^2}]$ 上的連續函数，則

$$\int_0^{2\pi}\varphi(a\cos\theta+b\sin\theta)\,d\theta=2\int_0^{\pi}\varphi\left(\sqrt{a^2+b^2}\cos\lambda\right)d\lambda.$$

習題 7. 若 $g(u)$ 是 $[0,1]$ 上的連續函数，則

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} g(\sin 2u)\cos u\,du=\int_0^{\frac{\pi}{2}} g(\cos^2 v)\cos v\,dv.$$

§9. 分 部 积 分

我們运用公式

$$\int_a^b u\,dv=uv\Big|_a^b-\int_a^b v\,du$$

或推广公式

$$\int_a^b uv^{(u+1)}\,dx=[uv^{(n)}-u'v^{(n-1)}+\cdots+$$

$$+(-1)^n u^{(n)}v]_a^b+(-1)^{n+1}\int_a^b u^{(n+1)}v\,dx,$$

当然必須假定所有出現的各級微商都是連續的.

例 1. 命 m 为自然数，及

$$J_m=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^m x\,dx,\quad J'_m=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^m x\,dx.$$

分部积分得

$$J_m=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{m-1}x\,d(-\cos x)$$

$$=-\sin^{m-1}x\cos x\Big|_0^{\frac{1}{2}\pi}+(m-1)\int_0^{\frac{1}{2}\pi}\sin^{m-2}x\cos^2 x\,dx.$$

以 $1-\sin^2 x$ 代 $\cos^2 x$，卽得

$$J_m=(m-1)J_{m-2}-(m-1)J_m,$$

因得递推公式

$$J_m=\frac{m-1}{m}J_{m-2}.$$

因得

$$J_{2n}=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{2n}x\,dx=\frac{(2n-1)(2n-3)\cdots3\cdot1}{2n(2n-2)\cdots4\cdot2}\cdot\frac{\pi}{2}$$

及

$$J_{2n+1}=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{2n+1}xdx=\frac{2n(2n-2)\cdots4\cdot2}{(2n+1)(2n-1)\cdots3\cdot1}.$$

命 $x=\frac{\pi}{2}-y$，立得

$$J_m=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^m xdx=-\int_{\frac{\pi}{2}}^0\cos^m ydy=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^m ydy=J'_m.$$

例 2. 命m表整数,则

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^m x\cos(m+2)xdx=0,$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^m x\sin(m+2)xdx=\frac{1}{m+1},$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^m x\cos(m+2)xdx=-\frac{\sin\frac{m\pi}{2}}{m+1},$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^m x\sin(m+2)xdx=\frac{\cos\frac{m\pi}{2}}{m+1}.$$

以第一积分为例,分部积分两次,得

$$\int_0^{\frac{1}{2}\pi}\cos^{m+2}x\cos(m+2)xdx=$$

$$=\frac{1}{m+2}\Big(\cos^{m+2}x\sin(m+2)x-\cos^{m+1}x\sin x\sin(m+2)x\Big)_0^{\frac{\pi}{2}}+$$

$$+\frac{1}{m+2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(-(m+1)\cos^m x\sin^2x+\cos^{m+2}x)\cos(m+2)xdx.$$

已經积出的部分經代入 $\frac{\pi}{2}$ 及 0 都等于 0，在后一积分中以 $1-\cos^2x$ 代 $\sin^2x$，卽得

$$\int_0^{\frac{1}{2}\pi}\cos^{m+2}x\cos(m+2)xdx=-\frac{m+1}{m+2}\int_0^{\frac{1}{2}\pi}\cos^m x\cos(m+2)xdx+$$

$$+\int_0^{\frac{1}{2}\pi}\cos^{m+2}x\cos(m+2)xdx.$$

因此推出第一式.

其他各式可用同法証明.

例 3. 命 n 表任一自然数，积分

$$K_n=\int_0^{\frac{1}{2}\pi}\cos^n x\sin nxdx,\quad L_n=\int_0^{\frac{1}{2}\pi}\cos^n x\cos nxdx.$$

由分部积分得

$$K_n = \frac{1}{n} - \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \cos^{n-1} x \sin x \cos nx dx.$$

两端各加以 K_n，并注意

$$\sin(n-1)x = \cos x \sin nx - \sin x \cos nx.$$

可得

$$2K_n = \frac{1}{n} + K_{n-1},$$

即

$$K_n = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{n} + K_{n-1}\right).$$

用此递推公式得

$$K_n = \frac{1}{2^{n+1}}\left(\frac{2}{1} + \frac{2^2}{2} + \frac{2^3}{3} + \cdots + \frac{2^n}{n}\right).$$

类似地可以求出

$$L_n = \frac{\pi}{2^{n+1}}.$$

例 4. 命 $k > 0$ 及 m 为自然数，则

$$H_{k,m} = \int_0^1 x^k \log^m x dx = (-1)^m \frac{m!}{(k+1)^{m+1}}.$$

分部积分得

$$H_{k,m} = \frac{1}{k+1} x^{k+1} \log^m x \Big|_0^1 - \frac{m}{k+1} \int_0^1 x^k \log^{m-1} x dx = -\frac{m}{k+1} H_{k,m-1}.$$

因此推出欲求的数值.

例 5. 如果 p 与 q 是自然数，则

$$\int_0^1 (1-x)^p x^q dx = \frac{p!q!}{(p+q+1)!}.$$

用分部积分得

$$\int_0^1 (1-x)^p x^q dx = -\frac{x^q(1-x)^{p+1}}{p+1}\Big|_0^1 + \frac{q}{p+1}\int_0^1 (1-x)^{p+1} x^{q-1} dx =$$

$$= \frac{q}{p+1}\int_0^1 (1-x)^p x^{q-1} dx - \frac{q}{p+1}\int_0^1 (1-x)^p x^q dx,$$

即得

$$\int_0^1 (1-x)^p x^q dx = \frac{q}{p+q+1}\int_0^1 (1-x)^p x^{q-1} dx.$$

續用此式，可得

$$\int_0^1 (1-x)^p x^q dx = \frac{q(q-1)\cdots 1}{(p+q+1)(p+q)\cdots(p+2)}\int_0^1 (1-x)^p dx$$

$$= \frac{p!q!}{(p+q+1)!}.$$

例 6. 在上例中取 $x = \sin^2\theta$，则得 $dx = 2\sin\theta\cos\theta d\theta$.

因此得

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^{2p+1}\theta\sin^{2q+1}\theta d\theta=\frac{1}{2}\frac{p!q!}{(p+q+1)!}$$

§10. 瑕 积 分

假定 $a<b$.

虽然函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 中是不可以求积分的，但是对任一适合于 $a<\xi<b$ 的 ξ，函数 $f(x)$ 在 $[a,\xi]$ 中是可以求积分的，而且极限

$$\lim_{\xi\to b}\int_a^\xi f(x)dx=F(b-0)-F(a)$$

是存在的．我們称这极限是函数 $f(x)$ 在区間 $[a,b]$ 上的瑕积分，就用

$$\int_a^b f(x)dx$$

来表它，而点 b 称为瑕点．

例如

$$\int_0^1\frac{dx}{(1-x)^{1/2}}=\lim_{\xi\to 1}\int_0^\xi\frac{dx}{(1-x)^{1/2}}=\lim_{\xi\to 1}2(1-(1-\xi)^{\frac{1}{2}})=2,$$

不但上下限可能是瑕点，并且 a,b 間的点 c 也可能是瑕点，即对任意 ε 与 η，$f(x)$ 在 $[a,c-\varepsilon]$ 与 $[c+\eta,b]$ 为可积，我們定义

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x)dx&=\lim_{\varepsilon\to 0}\left(\int_a^{c-\varepsilon}f(x)\,dx\right)+\lim_{\eta\to 0}\left(\int_{c+\eta}^b f(x)dx\right)\\&=F(b)-F(c+0)+F(c-0)-F(a).\end{aligned}$$

例如

$$\int_{-1}^1 x^{-\frac{2}{3}}dx=\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{-1}^{-\varepsilon}x^{-\frac{2}{3}}dx+\lim_{\eta\to 0}\int_\varepsilon^1 x^{-\frac{2}{3}}dx=6.$$

还有一种情况，对任一有限数 b，$f(x)$ 在 $[a,b]$ 上是可积的．如果极限存在，我們定义

$$\int_a^\infty f(x)dx=\lim_{b\to\infty}\int_a^b f(x)dx=F(\infty)-F(a).$$

同法定义

$$\int_{-\infty}^b f(x)dx=\lim_{a\to-\infty}\int_a^b f(x)dx$$

与

$$\int_{-\infty}^\infty f(x)dx=\int_{-\infty}^a f(x)dx+\int_a^\infty f(x)dx.$$

例如

$$\int_{-\infty}^\infty\frac{dx}{1+x^2}=\operatorname{tg}^{-1}x\Big|_{-\infty}^\infty=\frac{\pi}{2}-\left(-\frac{\pi}{2}\right)=\pi.$$

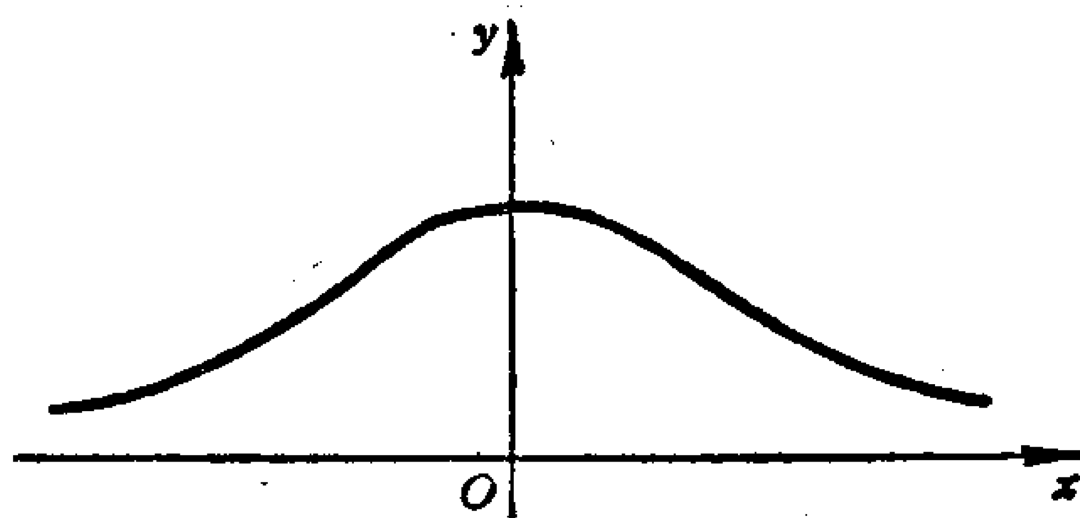


图 172

注意．$\operatorname{tg}^{-1}x$ 不能随意取多值函数的值，我們只取在 $-\frac{\pi}{2}$ 与 $\frac{\pi}{2}$ 之間的唯一值．关于无穷积分有些与无穷級数相仿的性質，我們現在不加証明地叙述

于下：

现在假定对任一 $\xi > a$，$f(x)$ 在 $[a, \xi]$ 中是可积的。

定理 1. 如果 $f(x) \geqslant 0$，而且

$$\int_a^\xi f(t)dt \leqslant M,$$

则积分

$$\int_a^\infty f(t)dt$$

是收斂的。

定理 2. 积分 $\int_a^\infty f(t)dt$ 收斂的必要且充分条件是：給与任一 $\varepsilon > 0$，我們有一数 X 存在，使 x 与 $x' > X$ 时

$$\left|\int_x^{x'} f(t)dt\right| < \varepsilon.$$

定义. 如果

$$\int_a^\infty |f(t)|dt < \infty,$$

则 $\int_a^\infty f(t)dt$ 称为絕对收斂.

定理 3. 絕对收斂的积分一定收斂。

例 1. (Dirichlet) 积分

$$\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}dx$$

非絕对收斂，但是它是收斂的$\left(我們将在 § 13.3 中进一步証明积分值为 \frac{\pi}{2}\right)$.

先証明

$$\int_1^\infty \frac{|\sin x|}{x}dx$$

不收斂，取一批区間 $\left[n\pi + \frac{1}{4}\pi, n\pi + \frac{3}{4}\pi\right]$，在这些区間中

$$|\sin x| \geqslant \sin\frac{1}{4}\pi = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

由

$$\int_1^\infty \frac{|\sin x|}{x}dx \geqslant \sum_{n=1}^\infty \int_{\left(n+\frac{1}{4}\right)\pi}^{\left(n+\frac{3}{4}\right)\pi} \frac{|\sin x|}{x}dx \geqslant \sum_{n=1}^\infty \frac{\frac{1}{\sqrt{2}}}{(n+1)\pi} \to \infty$$

可知，原来的积分不絕对收斂.

另一方面，由第二中值定理

$$\int_x^{x'} \frac{\sin t}{t}dt = \frac{1}{x}\int_x^\xi \sin t\,dt = \frac{-1}{x}(\cos\xi - \cos x), \quad x < \xi < x',$$

即

$$\left|\int_x^{x'}\frac{\sin t}{t}dt\right|\leqslant\frac{2}{x}.$$

此趋于 0，所以原积分是收斂的.

定理 4. 命 $f(x)$ 与 $g(x)$ 为 $x\geqslant a$ 时的非負函数，且 $f(x)\leqslant g(x)$. 若 $\int_a^\infty g(x)dx$ 收斂，则 $\int_a^\infty f(x)dx$ 亦收斂；若 $\int_a^\infty f(x)dx$ 发散，则 $\int_a^\infty g(x)dx$ 亦发散.

应用第二中值公式与定理 2 可得下面二定理.

定理 5. 命 $f(x)$ 与 $g(x)$ 为当 $x\geqslant a$ 时定义的函数. 若对任一常数 A，积分

$$F(A)=\int_a^A f(x)dx$$

皆存在，且 $|F(A)|<M$，此处 M 为一絕对常数，又 $g(x)$ 为 x 的递减函数，且当 $x\to\infty$ 时趋于零，则积分

$$\int_a^\infty f(x)g(x)dx$$

收斂.

定理 6. 若 $f(x)$ 与 $g(x)$ 为当 $x\geqslant a$ 时定义的函数，又若 $\int_a^\infty f(x)dx$ 收斂，$g(x)$ 单調有界，则积分

$$\int_a^\infty f(x)g(x)dx$$

收斂.

§11. 定积分的一些应用

1) Taylor 展开式.

在推广的分部积分中，命 $v=(b-x)^n$，则

$$v'=-n(b-x)^{n-1},\quad v''=n(n-1)(b-x)^{n-2},\cdots,$$
$$v^{(n)}=(-1)^n n!,\quad v^{(n+1)}=0.$$

当 $x=b$ 时，所有的 $v, v', v'', \cdots, v^{(n-1)}$ 都等于零. 把 $u, u', u'', \cdots$ 写成 $f(x), f'(x), f''(x), \cdots$，则得

$$0=(-1)^n[n!f(b)-n!f(a)-n!\,f'(a)(b-a)-\frac{n!}{2!}f''(a)(b-a)^2-\cdots$$
$$-f^{(n)}(a)(b-a)^n]+(-1)^{n+1}\int_a^b f^{(n+1)}(x)(b-x)^n dx,$$

即得

$$f(b)=f(a)+\frac{f'(a)}{1!}(b-a)+\frac{f''(a)}{2!}(b-a)^2+\cdots+$$
$$+\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(b-a)^n+\frac{1}{n!}\int_a^b f^{(n+1)}(x)(b-x)^n dx.$$

換記号得

$$f(x)=f(x_0)+\frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\cdots+$$

$$+\frac{f^n(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+\frac{1}{n!}\int_{x_0}^{x}f^{(n+1)}(t)(x-t)^n dt.$$

这个 Taylor 展开式的余項与以往的有所不同,其中不含有任何未知数. 利用这样的余項,可以推导出我們以往所知道的一些余項. 例如由第一中值公式可知

$$\frac{1}{n!}\int_{x_0}^{x}f^{(n+1)}(t)(x-t)^n dt=\frac{1}{n!}f^{(n+1)}(c)\int_{x_0}^{x}(x-t)^n dt=\frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1},$$

此处 c 在 $[x_0, x]$ 之內.

2) Wallis 公式.

当 $0<x<\frac{\pi}{2}$, n 为自然数时,

$$\sin^{2n+1}x<\sin^{2n}x<\sin^{2n-1}x,$$

則

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{2n+1}x dx<\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{2n}x dx<\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{2n-1}x dx.$$

由例9.1可知

$$\frac{2n(2n-2)\cdots4\cdot2}{(2n+1)(2n-1)\cdots3\cdot1}<\frac{(2n-1)(2n-3)\cdots3\cdot1}{(2n)(2n-2)\cdots4\cdot2}\cdot\frac{\pi}{2}<$$

$$<\frac{(2n-2)(2n-4)\cdots4\cdot2}{(2n-1)(2n-3)\cdots3\cdot1},$$

卽

$$\left[\frac{2n(2n-2)\cdots4\cdot2}{(2n-1)(2n-3)\cdots3\cdot1}\right]^2\frac{1}{2n+1}<\frac{\pi}{2}<\left[\frac{2n(2n-2)\cdots4\cdot2}{(2n-1)(2n-3)\cdots3\cdot1}\right]^2\frac{1}{2n}.$$

由

$$\left[\frac{2n(2n-2)\cdots4\cdot2}{(2n-1)(2n-3)\cdots3\cdot1}\right]^2\left(\frac{1}{2n}-\frac{1}{2n+1}\right)<\frac{1}{2n}\cdot\frac{\pi}{2}\to0,$$

故得

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2\cdot2\cdot4\cdot4\cdots(2n)(2n)}{1\cdot3\cdot3\cdot5\cdots(2n-1)(2n+1)}=\frac{\pi}{2}.$$

这就是 Wallis 公式.

§ 12. 求定积分的特殊方法

以往的方法都是用求原函数法来算出定积分(包括有瑕点和无瑕定的情况). 我們現在介紹几个虽然无法算出原函数,但仍能計算积分值的方法. 但这些都是特殊的方法,无法系統叙述,所以我們只能用例題的形式来叙述.

1°. Euler 积分

$$I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\log\sin x dx.$$

用分部积分

$$u=\log\sin x \quad dv=dx$$

可知

$$du = \frac{\cos x}{\sin x} dx, \ v = x.$$

因而

$$I = x \log \sin x \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} x \frac{\cos x}{\sin x} dx.$$

原来的积分在 $x = 0$ 有瑕点，但是經过分部积分之后，第一項当 $x \to 0$ 时有数值，而第二項就是一个普通积分，并无瑕点了。所以积分 I 是存在的，但是

$$\int x \frac{\cos x}{\sin x} dx$$

也是不能用普通方法积分得出来的。

計算出这一积分主要是利用变数替换，命 $x = 2t$，即

$$I = 2\int_0^{\frac{\pi}{4}} \log \sin 2t\, dt = 2\int_0^{\frac{\pi}{4}} \log (2 \sin t \cos t) dt$$

$$= \frac{\pi}{2} \log 2 + 2\int_0^{\frac{\pi}{4}} \log \sin t\, dt + 2\int_0^{\frac{\pi}{4}} \log \cos t\, dt.$$

在后一积分中换变数 $t = \frac{\pi}{2} - u$，即得

$$2\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \log \sin u du.$$

因此得出

$$I = \frac{\pi}{2} \log 2 + 2I,$$

即

$$I = -\frac{\pi}{2} \log 2.$$

同时，我們也得出了

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{x}{\mathrm{tg}\, x} dx = \frac{\pi}{2} \log 2, \quad \int_0^1 \frac{\sin^{-1} x}{x} dx = \frac{\pi}{2} \log 2.$$

又用替换 $x = \pi - t$ 我們可以算出

$$\int_0^{\pi} x \log \sin x dx = \pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \log \sin t\, dt = -\frac{\pi^2}{2} \log 2.$$

習題 1. 算出

$$\int_0^1 \frac{\log x}{\sqrt{1 - x^2}} dx, \quad \int_0^{\infty} \frac{x dx}{\sqrt{e^{2x} - 1}}.$$

$\left(\text{提示，用替换 } x = \sin t \text{ 与 } x = \log \frac{1}{\sin t}\right).$

習題 2. 求証当 $a^2 \leqslant 1$ 时积分

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \log\ |\sin^2\theta - a^2|\,d\theta = -\pi\log 2.$$

2°. Euler-Poisson 积分

$$K = \int_0^\infty e^{-x^2}\,dx$$

这是概率論中常用的积分。

假定 $x \neq 0$。由

$$1 + x^2 < 1 + x^2 + \frac{x^4}{2!} + \frac{x^6}{3!} + \cdots = e^{x^2} < 1 + x^2 + x^4 + \cdots = \frac{1}{1 - x^2}$$

可知

$$1 - x^2 < e^{-x^2} < \frac{1}{1 + x^2}.$$

注意。前者仅对 $0 < x < 1$ 正确，而后者对任一 $x > 0$ 都对。由此立得

$$(1 - x^2)^n < e^{-nx^2} \quad (0 < x < 1),$$

$$e^{-nx^2} < \frac{1}{(1 + x^2)^n} \quad (x > 0).$$

取积分

$$\int_0^1 (1 - x^2)^n\,dx < \int_0^1 e^{-nx^2}dx < \int_0^\infty e^{-nx^2}dx < \int_0^\infty \frac{dx}{(1 + x^2)^n}.$$

但用替换 $u = \sqrt{n}\,x$ 可得

$$\int_0^\infty e^{-nx^2}dx = \frac{1}{\sqrt{n}}K.$$

又

$$\int_0^1 (1 - x^2)^n\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n+1}t\,dt = \frac{2\cdot 4\cdot 6\cdots(2n-2)(2n)}{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n+1)}$$

及

$$\int_0^\infty \frac{dx}{(1 + x^2)^n} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n-2}t\,dt = \frac{1\cdot 3\cdots(2n-3)}{2\cdot 4\cdots(2n-2)}\,\frac{\pi}{2},$$

所以

$$\sqrt{n}\,\frac{2\cdot 4\cdot 6\cdots(2n-2)(2n)}{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n+1)} < K < \sqrt{n}\,\frac{1\cdot 3\cdots(2n-3)}{2\cdot 4\cdots(2n-2)}\,\frac{\pi}{2}.$$

平方之，即得

$$\frac{n}{2n+1}\cdot\frac{(2\cdot 4\cdots(2n-2)(2n))^2}{(1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1))^2(2n+1)} < K^2 < \frac{n}{2n-1}\times$$

$$\times\frac{(1\cdot 3\cdots(2n-3))^2(2n-1)}{(2\cdot 4\cdots(2n-2))^2}\left(\frac{\pi}{2}\right)^2.$$

由 Wallis 公式

$$\lim_{n\to\infty}\frac{(2\cdot 4\cdots(2n-2)(2n))^2}{(1\cdot 3\cdots(2n-1))^2(2n+1)} = \frac{\pi}{2}$$

可知，当 $n \to \infty$ 时

$$\frac{1}{2}\frac{\pi}{2} \leqslant K^2 \leqslant \frac{1}{2}\frac{\pi}{2},$$

即

$$K^2 = \frac{\pi}{4}.$$

因此

$$\int_0^\infty e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

習題. 求当 $a>0$、$b>0$ 时

$$\int_0^\infty e^{-ax^2-\frac{b}{x^2}} dx = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{a}}\, e^{-2\sqrt{ab}}$$

提示. 在証明这結果之前,先証明一个一般性的結果:

$$\int_0^\infty f\left[\left(Ax - \frac{B}{x}\right)^2\right] dx = \frac{1}{A}\int_0^\infty f(y^2) dy, \quad A>0, \quad B>0,$$

这等式在右边积分存在的条件下成立.

由替換 $y = Ax - \dfrac{B}{x}$ 得出

$$\int_{-\infty}^\infty f(y^2)\, dy = \int_0^\infty f\left[\left(Ax - \frac{B}{x}\right)^2\right]\left(A + \frac{B}{x^2}\right) dx$$

$$= A\int_0^\infty f\left[\left(Ax - \frac{B}{x}\right)^2\right] dx + B\int_0^\infty f\left[\left(Ax - \frac{B}{x}\right)^2\right]\frac{dx}{x^2}.$$

后一积分中用 $x = -\dfrac{B}{At}$, 即可推出以上的等式.

这等式把习題中的积分变为积分 K.

3°. Froullani 积分

$$\int_0^\infty \frac{f(ax) - f(bx)}{x} dx, \quad a>0, \quad b>0.$$

首先,我們假定 $f(x)$ 当 $x \geqslant 0$ 时定义且連續,并假定当 $x \to +\infty$ 时 $f(x)$ 有有限的极限.

当 $0<\delta<\Delta<\infty$ 时

$$\int_\delta^\Delta \frac{f(ax) - f(bx)}{x} dx = \int_\delta^\Delta \frac{f(ax)}{x} dx - \int_\delta^\Delta \frac{f(bx)}{x} dx$$

$$= \int_{a\delta}^{a\Delta} \frac{f(z)}{z} dz - \int_{b\delta}^{b\Delta} \frac{f(z)}{z} dz$$

$$= \int_{a\delta}^{b\delta} \frac{f(z)}{z} dz - \int_{a\Delta}^{b\Delta} \frac{f(z)}{z} dz.$$

因此得

$$\int_0^\infty \frac{f(ax) - f(bx)}{x} dx = \lim_{\delta\to 0}\int_{a\delta}^{b\delta} \frac{f(z)}{z} dz - \lim_{\Delta\to\infty}\int_{a\Delta}^{b\Delta} \frac{f(z)}{z} dz.$$

由中值公式

$$\int_{a\delta}^{b\delta}\frac{f(z)}{z}dz=f(\xi)\int_{a\delta}^{b\delta}\frac{dz}{z}=f(\xi)\log\frac{b}{a}\quad a\delta\leqslant\xi\leqslant b\delta,$$

$$\int_{a\Delta}^{b\Delta}\frac{f(z)}{z}dz=f(\eta)\int_{a\Delta}^{b\Delta}\frac{dz}{z}=f(\eta)\log\frac{b}{a},\quad a\Delta\leqslant\eta\leqslant b\Delta.$$

显然当 $\delta\to0$ 时 $\xi\to0$，当 $\Delta\to\infty$ 时，$\eta\to\infty$ 所以

$$\int_0^\infty\frac{f(ax)-f(bx)}{x}dx=[f(0)-f(+\infty)]\log\frac{b}{a}.$$

例 1. $\displaystyle\int_0^\infty\frac{e^{-ax}-e^{-bx}}{x}dx=\log\frac{b}{a}.$

例 2. $\displaystyle\int_0^\infty\log\frac{p+qe^{-ax}}{p+qe^{-bx}}\frac{dx}{x}=\log\left(1+\frac{q}{p}\right)\log\frac{b}{a}.$

例 3. $\displaystyle\int_0^\infty\frac{\operatorname{tg}^{-1}ax-\operatorname{tg}^{-1}bx}{x}dx=-\frac{\pi}{2}\log\frac{b}{a}.$

其次，有时虽然当 $x\to\infty$ 时 $f(x)$ 沒有有穷极限，但积分

$$\int_A^\infty\frac{f(z)}{z}dz$$

却存在．如是我們直接知道

$$\lim_{\Delta\to\infty}\int_{a\Delta}^{b\Delta}\frac{f(z)}{z}dz=0,$$

所以

$$\int_0^\infty\frac{f(ax)-f(bx)}{x}dx=f(0)\log\frac{b}{a}.$$

例 4. $\displaystyle\int_0^\infty\frac{\cos ax-\cos bx}{x}dx=\log\frac{b}{a}.$

同理，如果当 $x\to0$ 时 $f(x)$ 沒有有限极限，但

$$\int_0^A\frac{f(z)}{z}dz,\quad A<\infty$$

却存在，则

$$\int_0^\infty\frac{f(ax)-f(bx)}{x}dx=f(+\infty)\log\frac{a}{b}.$$

習題 1. 計算积分 $(a,b>0)$

$$(a)\int_0^\infty\frac{\sin ax\sin bx}{x}dx,\quad(b)\int_0^\infty\frac{1-\cos ax}{x}\cos bx\,dx,$$

$$(c)\int_0^1\frac{x^{a-1}-x^{b-1}}{\log x}dx$$

$\left(\text{答数}:(a)\log\sqrt{\dfrac{a+b}{|a-b|}},\ (b)\log\dfrac{\sqrt{|a^2-b^2|}}{b},\ (c)\log\dfrac{a}{b}\right).$

習題 2. 計算积分 $(a,b>0)$

$$(a)\int_0^\infty \frac{b\sin ax - a\sin bx}{x^2}dx,$$

$$(b)\int_0^\infty \frac{b\log(1+ax) - a\log(1+bx)}{x^2}dx$$

(用分部积分法).

習題 3. 求积分

$$\int_0^\infty \left(\frac{x}{e^x - e^{-x}} - \frac{1}{2}\right)\frac{dx}{x^2} \quad \left(\text{答数} - \frac{1}{2}\log 2\right)$$

(提示:用恆等式

$$\frac{1}{x^2}\left(\frac{x}{e^x - e^{-x}} - \frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{2x}(e^{-x} - e^{-2x})$$

$$+\frac{1}{x}\left(\frac{1}{e^x - 1} - \frac{1}{x} + \frac{1}{2}e^{-x}\right) - \frac{1}{x}\left(\frac{1}{e^{2x} - 1} - \frac{1}{2x} + \frac{1}{2}e^{-2x}\right)\Bigg).$$

習題 4. 求积分 $(a, b > 0)$

$$\int_0^\infty \frac{e^{-ax} - e^{-bx} + x(a-b)e^{-bx}}{x^2}dx$$

(提示:从証明对任一 $\eta > 0$,

$$\int_\eta^\infty \frac{e^{-ax} - e^{-bx} + x(a-b)e^{-bx}}{x^2}dx =$$

$$= \frac{e^{-a\eta} - e^{-b\eta}}{\eta} + a\int_\eta^\infty \frac{e^{-bx} - e^{-ax}}{x}dx$$

入手).

計算定积分的方法,以上不过举例而已,将来再介紹其他方法. 如利用积分号下求微分,利用微分方程,利用重积分等. 較有普遍性的是利用复变数函数求留数法及利用 Fourier 变换的方法等.

§ 13. 面积原理的应用

定理 1. 若 $x \geqslant a$, $f(x)$ 是一个非負递增函数,則当 $\xi \geqslant a$ 时有

$$\left|\sum_{a \leqslant n \leqslant \xi} f(n) - \int_a^\xi f(x)dx\right| \leqslant f(\xi).$$

証. 取 $[\xi] = b$, 則

$$\int_a^b f(x)dx = \sum_{i=a}^{b-1}\int_i^{i+1} f(x)dx \begin{cases} \geqslant \sum\limits_{i=a}^{b-1} f(i) \\ \leqslant \sum\limits_{i=a}^{b-1} f(i+1), \end{cases}$$

卽

$$f(a) + \cdots + f(b-1) \leqslant \int_a^b f(x)dx \leqslant$$
$$\leqslant f(a+1) + \cdots + f(b).$$

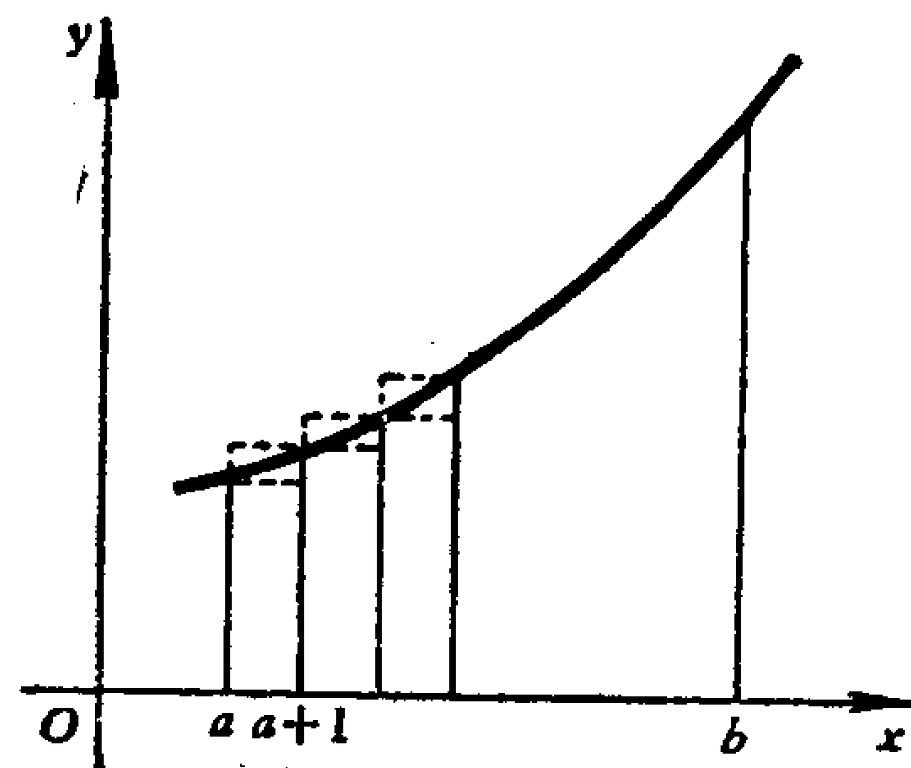


图 173

又

$$0 \leqslant \int_b^\xi f(x)dx \leqslant f(\xi),$$

并起来即得定理.

例 1. 命 $\lambda \geqslant 0, f(x) = x^\lambda$, 则

$$\left| \sum_{a<n\leqslant\xi} n^\lambda - \frac{\xi^{\lambda+1} - a^{\lambda+1}}{\lambda+1} \right| \leqslant \xi^\lambda,$$

即

$$\sum_{a<n\leqslant\xi} n^\lambda = \frac{\xi^{\lambda+1} - a^{\lambda+1}}{\lambda+1} + O(\xi^\lambda).$$

例 2. 命 $f(x) = \log x$, $\xi \geqslant 1$, 及 $T(\xi) = \sum\limits_{n\leqslant\xi} \log n$,

则得

$$\left| T(\xi) - \int_1^\xi \log x dx \right| \leqslant \log \xi,$$

即

$$|T(\xi) - \xi\log\xi + \xi - 1| \leqslant \log\xi.$$

特别当 ξ 是整数时,则

$$n\log n - n + 1 - \log n \leqslant \log n! \leqslant n\log n - n + 1 + \log n,$$

即

$$n^{n-1}e^{-n+1} \leqslant n! \leqslant n^{n+1}e^{-n+1}.$$

定理 2. 若 $x \geqslant a$, $f(x)$ 是一个非负递减函数,则极限

$$\lim_{N\to\infty} \left[\sum_{n=a}^N f(n) - \int_a^N f(x)dx \right] = \alpha$$

存在,且 $0 \leqslant \alpha \leqslant f(a)$. 进而言之,当 $x \to \infty$ 时,若 $f(x) \to 0$, 则

$$\left| \sum_{a\leqslant n\leqslant\xi} f(n) - \int_a^\xi f(x)dx - \alpha \right| \leqslant f(\xi - 1) \quad (\text{若 } \xi \geqslant a + 1).$$

证. 命

$$g(\xi) = \sum_{a\leqslant n\leqslant\xi} f(n) - \int_a^\xi f(x)dx,$$

则

$$g(n) - g(n+1) = -f(n+1) + \int_n^{n+1} f(x)dx \geqslant$$
$$\geqslant -f(n+1) + f(n+1) = 0.$$

又

$$g(N) = \sum_{n=a}^{N-1} \left(f(n) - \int_n^{n+1} f(x)dx \right) + f(N) \geqslant$$
$$\geqslant \sum_{n=a}^{N-1} (f(n) - f(n)) + f(N) = f(N) \geqslant 0,$$

故 $g(n)$ 为一个非负递减函数,且

$$0 \leqslant g(n) \leqslant g(a) = f(a).$$

故 $g(n)$ 之极限存在，命之为 α，且 $0 \leqslant \alpha \leqslant f(a)$。

今更假定当 $x \to \infty$ 时，$f(x) \to 0$，则

$$g(\xi) - \alpha = \sum_{a \leqslant n \leqslant \xi} f(n) - \int_a^\xi f(x)dx - \lim_{N\to\infty}\left(\sum_{n=a}^{N} f(n) - \int_a^N f(x)dx\right)$$

$$= \sum_{n=a}^{[\xi]} f(n) - \int_a^{[\xi]} f(x)dx - \int_{[\xi]}^{\xi} f(x)dx - \lim_{N\to\infty}\left(\sum_{n=a}^{N} f(n) - \int_a^N f(x)dx\right)$$

$$= -\int_{[\xi]}^{\xi} f(x)dx - \lim_{N\to\infty}\left(\sum_{n=[\xi]+1}^{N} f(n) - \int_{[\xi]}^N f(x)dx\right)$$

$$= -\int_{[\xi]}^{\xi} f(x)dx + \lim_{N\to\infty}\sum_{n=[\xi]+1}^{N}\int_{n-1}^{n}(f(x) - f(n))dx$$

$$\begin{cases} \leqslant \lim\limits_{N\to\infty}\sum\limits_{n=[\xi]+1}^{N}\int_{n-1}^{n}(f(n-1) - f(n))dx = f([\xi]) \leqslant f(\xi - 1), \\ \geqslant -\int_{[\xi]}^{\xi} f(x)dx \geqslant -(\xi - [\xi])f([\xi]) \geqslant -f(\xi - 1). \end{cases}$$

故得定理.

由定理 2 可以立得某种級数收斂与发散的判别条件.

假定給了一个級数

$$u_1 + u_2 + \cdots + u_n + \cdots$$

是正項的，且为递降的，即

$$u_1 \geqslant u_2 \cdots \geqslant u_n \geqslant \cdots \geqslant 0.$$

如果有一个函数 $f(x)$，有以下的性質：1) $f(x)$是一个在 $(1, \infty)$ 中連續的非負递降函数，2) $f(n) = u_n$，則由定理 2 立刻得知，如果

$$\lim_{n\to\infty}\int_1^n f(x)dx$$

存在，則級数

$$u_1 + u_2 + \cdots + u_n + \cdots$$

收斂，不然則級数发散.

不但如此，級数的和在

$$\int_1^\infty f(x)dx \text{ 与 } u_1 + \int_1^\infty f(x)dx$$

之間.

例 1. 由于

$$\int_1^x t^{-\alpha}dt = \begin{cases} \dfrac{1}{1-\alpha}(x^{1-\alpha} - 1), & (\alpha \neq 1); \\ \log x, & (\alpha = 1). \end{cases}$$

所以当 $\alpha > 1$ 时，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^\alpha}$ 收斂，当 $\alpha \leqslant 1$ 时，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^\alpha}$发散.

又由于

$$\int_2^x \frac{dt}{t(\log t)^\alpha} = \begin{cases} \frac{1}{1-\alpha}(\log x)^{1-\alpha} - \frac{1}{1-\alpha}(\log 2)^{1-\alpha} & (\alpha \neq 1); \\ \log\log x - \log\log 2 & (\alpha = 1). \end{cases}$$

所以当 $\alpha > 1$ 时，級数 $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(\log n)^\alpha}$ 收斂，当 $\alpha \leqslant 1$ 时，这級数发散.

例 2. 取 $a = 1$, $f(x) = \frac{1}{x}$, 則由定理 2 可知

$$\sum_{1 \leqslant n \leqslant \xi} \frac{1}{n} = \log \xi + \gamma + O\left(\frac{1}{\xi}\right),$$

此处之 γ 名为 Euler 常数.

由此得出

$$\sum_{n \leqslant \alpha N} \frac{1}{2n} = \frac{1}{2} \sum_{n \leqslant \alpha N} \frac{1}{n} = \frac{1}{2} \log \alpha N + \frac{1}{2}\gamma + O\left(\frac{1}{N}\right),$$

$$\sum_{n \leqslant \beta N} \frac{1}{2n+1} = \frac{1}{2} \log \beta N + \frac{1}{2}\gamma + \log 2 + O\left(\frac{1}{N}\right).$$

例 3. 求級数

$$1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{3} - \frac{1}{6} - \frac{1}{8} + \frac{1}{5} - \cdots$$

之和.

記上面級数的一般項为 u_m, 則

$$\sum_{m \leqslant n} u_m = \sum_{m \leqslant \frac{n}{3}} \frac{1}{2m+1} - \sum_{m \leqslant \frac{2n}{3}} \frac{1}{2m} + O\left(\frac{1}{n}\right)$$

$$= \left(\frac{1}{2}\log\frac{n}{3} + \frac{\gamma}{2} + \log 2\right) - \left(\frac{1}{2}\log\frac{2n}{3} + \frac{\gamma}{2}\right) + O\left(\frac{1}{n}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\log 2 + O\left(\frac{1}{n}\right).$$

故得級数之和为 $\frac{1}{2}\log 2$.

習題 1. 設 ξ 是整数，求証当 $\lambda \geqslant 1$ 时，存在 c，使

$$\sum_{1 \leqslant n \leqslant \xi} n^\lambda = \frac{\xi^{\lambda+1}}{\lambda+1} + c\xi^\lambda + O(\xi^{\lambda-1}).$$

習題 2. 研究和

$$\sum_{3 \leqslant n \leqslant \xi} \log\log n.$$

習題 3. 研究級数

$$\sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{n \log n (\log\log n)^\alpha}$$

收斂何时发散.

習題 4. A 为一个給定常数,試改变級数

$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}-\frac{1}{5}-\cdots$$

之次序,使之收斂于 A.

§ 14. Euler 求和公式及 Euler 函数

定理 1 (Euler). 命 $\varphi(x)$ 是有限閉区間 $[a, b]$ 內有連續微商的函数,則

$$\sum_{a<n\leqslant b}\varphi(n)=\int_a^b\varphi(x)dx+\int_a^b\left(x-[x]-\frac{1}{2}\right)\varphi'(x)dx+$$
$$+\left(a-[a]-\frac{1}{2}\right)\varphi(a)-\left(b-[b]-\frac{1}{2}\right)\varphi(b),$$

此处$[\xi]$代表实数ξ的整数部分.

証. 1)如果$[a]+1>[b]$,則$[a]=[b]$,这公式变为

$$0=\int_a^b\varphi(x)dx+\int_a^b\left(x-[a]-\frac{1}{2}\right)\varphi'(x)dx+$$
$$+\left(a-[a]-\frac{1}{2}\right)\varphi(a)-\left(b-[a]-\frac{1}{2}\right)\varphi(b),$$

卽

$$\int_a^b\left(x-[a]-\frac{1}{2}\right)\varphi'(x)dx=-\left(a-[a]-\frac{1}{2}\right)\varphi(a)+$$
$$+\left(b-[a]-\frac{1}{2}\right)\varphi(b)-\int_a^b\varphi(x)dx.$$

这就是分部积分公式的直接推理.

2) 假定 $[a]+1\leqslant[b]$, 則

$$\int_a^b[x]\varphi'(x)\,dx=\int_{[a]+1}^{[b]}[x]\varphi'(x)\,dx+\int_a^{[a]+1}[x]\varphi'(x)\,dx+\int_{[b]}^b[x]\varphi'(x)dx=$$
$$=\sum_{n=[a]+1}^{[b]-1}n\int_n^{n+1}\varphi'(x)dx+\int_a^{[a]+1}[a]\varphi'(x)dx+\int_{[b]}^b[b]\varphi'(x)dx=$$
$$=\sum_{n=[a]+1}^{[b]-1}n(\varphi(n+1)-\varphi(n))+[a](\varphi([a]+1)-\varphi(a))+$$
$$+[b](\varphi(b)-\varphi([b]))=$$
$$=-\sum_{n=[a]+1}^{[b]}\varphi(n)-[a]\varphi(a)+[b]\varphi(b).$$

又由分部积分可知

$$\int_a^b\left(x-\frac{1}{2}\right)\varphi'(x)dx=\left(b-\frac{1}{2}\right)\varphi(b)-\left(a-\frac{1}{2}\right)\varphi(a)-\int_a^b\varphi(x)dx,$$

因此

$$\int_a^b \left(x-[x]-\frac{1}{2}\right)\varphi'(x)dx = \sum_{n=[a]+1}^{[b]} \varphi(n) - \int_a^b \varphi(x)dx -$$
$$-\left(a-[a]-\frac{1}{2}\right)\varphi(a) + \left(b-[b]-\frac{1}{2}\right)\varphi(b).$$

即明所欲証。

我們現在用 Euler 求和公式来研究，当 n 充分大时，$n!$ 的漸近情況。

1) 命 $\varphi(x) = \log x$, $a = 1$, $b = n$ (整数)，則得

$$\sum_{1\leqslant m\leqslant n} \log m = \int_1^n \log x dx + \int_1^n \left(x-[x]-\frac{1}{2}\right)\frac{dx}{x} + \frac{1}{2}\log n. \tag{1}$$

由于

$$\left|x-[x]-\frac{1}{2}\right| \leqslant \frac{1}{2}$$

及

$$\int_\xi^{\xi+1}\left(x-[x]-\frac{1}{2}\right)dx = 0 \quad (\xi\text{ 为实数}),$$

故由第二中值公式可知积分

$$\int_1^\infty \left(x-[x]-\frac{1}{2}\right)\frac{dx}{x}$$

收斂，因此由(1)可知

$$\log n! = \left(n+\frac{1}{2}\right)\log n - n + C + \gamma_n,$$

此处

$$C = 1 + \int_1^\infty \left(x-[x]-\frac{1}{2}\right)\frac{dx}{x},$$

$$\gamma_n = -\int_n^\infty \left(x-[x]-\frac{1}{2}\right)\frac{dx}{x},$$

所以

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n!}{e^{-n}n^{n+1/2}} = e^C = C_1. \tag{2}$$

我們称公式(2)为 Stirling 公式。

2) 現在我們来进一步定出 C. 由 Wallis 公式

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2\cdot 2\cdot 4\cdot 4\cdots(2n)\cdot(2n)}{1\cdot 3\cdot 3\cdot 5\cdot 5\cdots(2n-1)\cdot(2n+1)} = \frac{\pi}{2}$$

可知

$$\frac{(2^n n!)^4}{(2n)!^2(2n+1)}(1+o(1)) = \frac{\pi}{2}.$$

以(2)式代入得

$$\frac{C_1^4(2^n n^{n+1/2}e^{-n})^4}{C_1^2((2n)^{2n+1/2}e^{-2n})^2(2n+1)}(1+o(1)) = \frac{\pi}{2},$$

$$\frac{C_1^2 n}{2(2n+1)}(1+o(1)) = \frac{\pi}{2}.$$

命 $n\to\infty$ 得

$$C_1=\sqrt{2\pi}.$$

同时我們也算出了

$$\int_1^\infty\left(x-[x]-\frac{1}{2}\right)\frac{dx}{x}=\frac{1}{2}\log 2\pi-1.$$

因为經常用到，我們引进符号

$$b_1(x)=x-[x]-\frac{1}{2},$$

并且用归納法来定义 Euler 函数 $b_l(l=1,2,\cdots)$.

定义. (i) $b_l(x)$ 是以 1 为周期的函数，也就是

$$b_l(x+1)=b_l(x).$$

(ii) $\int_0^x b_l(y)dy=b_{l+1}(x)-b_{l+1}(0).$

由周期性显然得出

$$\int_0^1 b_l(y)dy=0.$$

我們得先說明一下，这样，函数 $b_l(x)$ 就完全定义了. 由(ii)可知，如果 $b_l(x)$ 完全定义了，$b_{l+1}(x)$ 仅差一常数，这一常数可由 $b_{l+2}(x)$ 的周期性来决定. 因之 $b_l(x)$ 也就完全定义了.

我們現在算出前几个 $b_l(x)$ 来. 周期旣然是 1，我們不妨假定 $0<x<1$，由

$$b_2(x)-b_2(0)=\int_0^x\left(t-\frac{1}{2}\right)dt=\frac{x^2}{2}-\frac{x}{2},$$

即

$$b_2(x)=\frac{x^2}{2}-\frac{x}{2}+b_2(0).$$

由

$$0=\int_0^1 b_2(x)dx=\left(\frac{x^3}{6}-\frac{x^2}{4}+b_2(0)x\right)\Big|_0^1=-\frac{1}{12}+b_2(0),$$

即当 $0<x<1$ 时，

$$b_2(x)=\frac{x^2}{2}-\frac{x}{2}+\frac{1}{12}.$$

由于 $b_2(x)$ 的周期性，可一般地有

$$b_2(x)=\frac{(x-[x])^2}{2}-\frac{x-[x]}{2}+\frac{1}{12}.$$

同法可以推得

$$b_3(x)=\frac{1}{6}(x-[x])^3-\frac{1}{4}(x-[x])^2+\frac{1}{12}(x-[x]),$$

$$b_4(x)=\frac{1}{24}(x-[x])^4-\frac{1}{12}(x-[x])^3+\frac{1}{24}(x-[x])^2-\frac{1}{720}.$$

讀者可以再算一两个例子以資熟練.

§ 15. 梯形法，矩形法与 Simpson 法

假定 $f(x)$ 是一个在 $[\alpha,\beta]$ 內定义了的函数，以后如果用到几次微商，便假定 $f(x)$ 有几次微商. 我們用 Euler 求和公式来推出普通数值积分的梯形法、矩形法与 Simpson 法。

1. 梯形法

在 Euler 求和公式中取

$$\varphi(x)=f\left(\alpha+x\frac{\beta-\alpha}{n}\right),\ a=0,\ b=n\ (n\ \text{是自然数}).$$

如此則得

$$\sum_{0<l\leqslant n} f\left(\alpha+l\frac{\beta-\alpha}{n}\right)=\int_0^n f\left(\alpha+x\frac{\beta-\alpha}{n}\right)dx+\frac{1}{2}f(\beta)-$$

$$-\frac{1}{2}f(\alpha)+\frac{\beta-\alpha}{n}\int_0^n\left(x-[x]-\frac{1}{2}\right)f'\left(\alpha+x\frac{\beta-\alpha}{n}\right)dx.$$

換变数 $\alpha+x\dfrac{\beta-\alpha}{n}=t$，記 $y_l=f\left(\alpha+l\dfrac{\beta-\alpha}{n}\right)$，則得

$$\sum_{l=1}^{n-1} y_l+\frac{1}{2}(y_0+y_n)=\frac{n}{\beta-\alpha}\int_\alpha^\beta f(t)\,dt+$$

$$+\frac{\beta-\alpha}{n}\int_0^n b_1(x)f'\left(\alpha+x\frac{\beta-\alpha}{n}\right)dx,$$

也就是

$$\int_\alpha^\beta f(t)\,dt-\frac{\beta-\alpha}{n}\left(\sum_{l=1}^{n-1}y_l+\frac{1}{2}(y_0+y_n)\right)=$$

$$=-\left(\frac{\beta-\alpha}{n}\right)^2\int_0^n b_1(x)f'\left(\alpha+x\frac{\beta-\alpha}{n}\right)dx. \tag{1}$$

这个式子說明，求积分的梯形法的誤差是可以用积分形式表出来的，現在把誤差表达得更清楚些，用分部积分可知

$$\int_0^n b_1(x)f'\left(\alpha+x\frac{\beta-\alpha}{n}\right)dx=b_2(x)f'\left(\alpha+x\frac{\beta-\alpha}{n}\right)\Big|_0^n-$$

$$-\frac{\beta-\alpha}{n}\int_0^n b_2(x)f''\left(\alpha+x\frac{\beta-\alpha}{n}\right)dx=$$

$$=\frac{1}{12}(f'(\beta)-f'(\alpha))-\frac{\beta-\alpha}{n}\int_0^n b_2(x)f''\left(\alpha+x\frac{\beta-\alpha}{n}\right)dx=$$

$$=\frac{1}{12}\frac{\beta-\alpha}{n}\int_0^n f''\left(\alpha+x\frac{\beta-\alpha}{n}\right)dx-$$

$$-\frac{\beta-\alpha}{n}\int_0^n b_2(x)f''\left(\alpha+x\frac{\beta-\alpha}{n}\right)dx=$$

$$=-\frac{\beta-\alpha}{n}\int_0^n\left(b_2(x)-\frac{1}{12}\right)f''\left(\alpha+x\frac{\beta-\alpha}{n}\right)dx,$$

因此得出

$$\int_\alpha^\beta f(t)\,dt-\frac{\beta-\alpha}{n}\left(\sum_{l=1}^{n-1}y_l+\frac{1}{2}(y_0+y_n)\right)=$$

$$=\left(\frac{\beta-\alpha}{n}\right)^3\int_0^n\left(b_2(x)-\frac{1}{12}\right)f''\left(\alpha+x\frac{\beta-\alpha}{n}\right)dx. \tag{2}$$

梯形法余項(1)須假定 $f(x)$ 有一次微商，而(2)假定了 $f(x)$ 有二次微商，梯形法余項我們用

$$R_t=\int_\alpha^\beta f(t)\,dt-\frac{\beta-\alpha}{n}\left(\sum_{l=1}^{n-1}y_l+\frac{1}{2}(y_0+y_n)\right)$$

来表它.

定理 1. 如果 $|f''(x)|\leqslant M\quad(\alpha\leqslant x\leqslant\beta)$，則

$$|R_t|\leqslant\frac{(\beta-\alpha)^3M}{12n^2}.$$

証. 由(2)可知

$$|R_t|\leqslant\left(\frac{\beta-\alpha}{n}\right)^3\int_0^n\left|b_2(x)-\frac{1}{12}\right|\left|f''\left(\alpha+x\frac{\beta-\alpha}{n}\right)\right|dx\leqslant$$

$$\leqslant\left(\frac{\beta-\alpha}{n}\right)^3M\int_0^n\left|b_2(x)-\frac{1}{12}\right|dx=$$

$$=\frac{(\beta-\alpha)^3}{n^2}M\int_0^1\left(\frac{x}{2}-\frac{x^2}{2}\right)dx=\frac{(\beta-\alpha)^3M}{12n^2}.$$

定理 2. 如果 $f'(x)$ 是单調递减非負函数，則

$$|R_t|\leqslant\frac{(\beta-\alpha)^2}{8n^2}f'(\alpha).$$

証. 由(1)及第二中値公式可知

$$|R_t|=\left|\left(\frac{\beta-\alpha}{n}\right)^2\int_0^n b_1(x)f'\left(\alpha+x\frac{\beta-\alpha}{n}\right)dx\right|=$$

$$=\left(\frac{\beta-\alpha}{n}\right)^2f'(\alpha)\left|\int_0^\xi b_1(x)\,dx\right|.$$

由

$$\left|\int_0^\xi b_1(x)\,dx\right|\leqslant\frac{1}{8}$$

可得定理.

如果积分的区間較长，这估計比以前的好些.

2. 矩形法

取

$$\varphi(x)=f\left(\alpha+\left(x+\frac{1}{2}\right)\frac{\beta-\alpha}{n}\right),$$

$$a=-\frac{1}{2},\ b=n-\frac{1}{2},$$

则得

$$\sum_{-\frac{1}{2}<l\leqslant n-\frac{1}{2}} f\left(\alpha+\left(l+\frac{1}{2}\right)\frac{\beta-\alpha}{n}\right)=$$

$$=\int_{-\frac{1}{2}}^{n-\frac{1}{2}} f\left(\alpha+\left(x+\frac{1}{2}\right)\frac{\beta-\alpha}{n}\right)dx+$$

$$+\frac{\beta-\alpha}{n}\int_{-\frac{1}{2}}^{n-\frac{1}{2}} b_1(x)f'\left(\alpha+\left(x+\frac{1}{2}\right)\frac{\beta-\alpha}{n}\right)dx.$$

换变数

$$\alpha+\left(x+\frac{1}{2}\right)\frac{\beta-\alpha}{n}=t,$$

并記

$$y_{l+\frac{1}{2}}=f\left(\alpha+\left(l+\frac{1}{2}\right)\frac{\beta-\alpha}{n}\right),$$

则得

$$\sum_{l=0}^{n-1} y_{l+\frac{1}{2}}=\frac{n}{\beta-\alpha}\int_{\alpha}^{\beta} f(t)\,dt+\frac{\beta-\alpha}{n}\int_{-\frac{1}{2}}^{n-\frac{1}{2}} b_1(x)\times$$

$$\times f'\left(\alpha+\left(x+\frac{1}{2}\right)\frac{\beta-\alpha}{n}\right)dx.$$

命

$$R_r=\int_{\alpha}^{\beta} f(t)\,dt-\frac{\beta-\alpha}{n}\sum_{l=0}^{n-1} y_{l+\frac{1}{2}}$$

代表矩形法的余項，则

$$R_r=-\left(\frac{\beta-\alpha}{n}\right)^2\int_{-\frac{1}{2}}^{n-\frac{1}{2}} b_1(x)f'\left(\alpha+\left(x+\frac{1}{2}\right)\frac{\beta-\alpha}{n}\right)dx. \tag{3}$$

分部积分得

$$\int_{-\frac{1}{2}}^{n-\frac{1}{2}} b_1(x)f'\left(\alpha+\left(x+\frac{1}{2}\right)\frac{\beta-\alpha}{n}\right)dx=$$

$$=b_2(x)f'\left(\alpha+\left(x+\frac{1}{2}\right)\frac{\beta-\alpha}{n}\right)\Bigg|_{-\frac{1}{2}}^{n-\frac{1}{2}}-$$

$$-\frac{\beta-\alpha}{n}\int_{-\frac{1}{2}}^{n-\frac{1}{2}} b_2(x)f''\left(\alpha+\left(x+\frac{1}{2}\right)\frac{\beta-\alpha}{n}\right)dx=$$

$$=-\frac{1}{24}(f'(\beta)-f'(\alpha))-\frac{\beta-\alpha}{n}\int_{-\frac{1}{2}}^{n-\frac{1}{2}} b_2(x)\times$$

$$\times f''\left(\alpha+\left(x+\frac{1}{2}\right)\frac{\beta-\alpha}{n}\right)dx=$$

$$=-\frac{\beta-\alpha}{n}\int_{-\frac{1}{2}}^{n-\frac{1}{2}}\left(b_2(x)+\frac{1}{24}\right)f''\left(\alpha+\left(x+\frac{1}{2}\right)\frac{\beta-\alpha}{n}\right)dx,$$

即

$$R_r=\left(\frac{\beta-\alpha}{n}\right)^3\int_{-\frac{1}{2}}^{n-\frac{1}{2}}\left(b_2(x)+\frac{1}{24}\right)\times$$

$$\times f''\left(\alpha+\left(x+\frac{1}{2}\right)\frac{\beta-\alpha}{n}\right)dx. \tag{4}$$

定理 3. 如果 $|f''(x)|\leqslant M \quad (\alpha\leqslant x\leqslant\beta)$，则

$$|R_r|\leqslant\frac{(\beta-\alpha)^3M}{24n^2}.$$

証. 由(4)可知

$$|R_r|\leqslant\left(\frac{\beta-\alpha}{n}\right)^3M\int_{-\frac{1}{2}}^{n-\frac{1}{2}}\left|b_2(x)+\frac{1}{24}\right|dx\leqslant$$

$$\leqslant\left(\frac{\beta-\alpha}{n}\right)^3Mn\int_0^1\left|b_2(x)+\frac{1}{24}\right|dx=$$

$$=\frac{(\beta-\alpha)^3}{n^2}M\int_0^1\left(\frac{x^2}{2}-\frac{x}{2}+\frac{1}{8}\right)dx=\frac{(\beta-\alpha)^3}{24n^2}M.$$

定理 4. 如果 $f'(x)$ 是单調递减非負函数，則

$$|R_r|\leqslant\frac{(\beta-\alpha)^2f'(\alpha)}{8n^2}.$$

証. 于(3)上用第二中值公式可知

$$|R_r|=\frac{(\beta-\alpha)^2f'(\alpha)}{n^2}\left|\int_{-\frac{1}{2}}^{\xi}b_1(x)\,dx\right|\leqslant\frac{(\beta-\alpha)^2f'(\alpha)}{8n^2}.$$

3. Simpson 法

命

$$R_s=\frac{1}{3}R_t+\frac{2}{3}R_r,$$

則得

$$R_s=\int_\alpha^\beta f(t)\,dt-\frac{\beta-\alpha}{6n}\left(y_0+y_n+2\sum_{i=1}^{n-1}y_i+4\sum_{i=0}^{n-1}y_{i+\frac{1}{2}}\right),$$

而且 Simpson 公式的余項[由(2)与(4)]为

$$R_s=\left(\frac{\beta-\alpha}{n}\right)^3\int_0^n\left(\frac{b_2(x)}{3}-\frac{1}{36}+\frac{2b_2(x-\frac{1}{2})}{3}+\frac{1}{36}\right)\times f''\left(\alpha+x\frac{\beta-\alpha}{n}\right)dx=$$

$$=\frac{1}{3}\left(\frac{\beta-\alpha}{n}\right)^3\int_0^n\left(b_2(x)+2b_2\left(x-\frac{1}{2}\right)\right)f''\left(\alpha+x\frac{\beta-\alpha}{n}\right)dx.$$

如果 $f^{(\mathrm{IV})}(x) \quad (\alpha\leqslant x\leqslant\beta)$ 存在，由分部积分可得

$$\int_0^n\left(b_2(x)+2b_2\left(x-\frac{1}{2}\right)\right)f''\left(\alpha+x\frac{\beta-\alpha}{n}\right)dx=$$

$$=-\frac{\beta-\alpha}{n}\int_0^n\left(b_3(x)+2b_3\left(x-\frac{1}{2}\right)\right)f'''\left(\alpha+x\frac{\beta-\alpha}{n}\right)dx$$

$\left(\text{此处用了 } b_3(0)=0,\ b_3\left(\frac{1}{2}\right)=0\right)$

$$=-\frac{\beta-\alpha}{n}\left(b_4(x)+2b_4\left(x-\frac{1}{2}\right)\right)f'''\left(\alpha+x\frac{\beta-\alpha}{n}\right)\Big|_0^n+$$

$$+\left(\frac{\beta-\alpha}{n}\right)^2\int_0^n\left(b_4(x)+2b_4\left(x-\frac{1}{2}\right)\right)f^{(\mathrm{IV})}\left(\alpha+x\frac{\beta-\alpha}{n}\right)dx=$$

$$=\frac{\beta-\alpha}{n}\frac{1}{960}(f'''(\alpha)-f'''(\beta))+$$

$$+\left(\frac{\beta-\alpha}{n}\right)^2\int_0^n\left(b_4(x)+2b_4\left(x-\frac{1}{2}\right)\right)f^{(\mathrm{IV})}\left(\alpha+x\frac{\beta-\alpha}{n}\right)dx=$$

$$=\left(\frac{\beta-\alpha}{n}\right)^2\int_0^n\left(b_4(x)+2b_4\left(x-\frac{1}{2}\right)-\frac{1}{960}\right)f^{(\mathrm{IV})}\left(\alpha+x\frac{\beta-\alpha}{n}\right)dx,$$

即

$$R_s=\frac{1}{3}\left(\frac{\beta-\alpha}{n}\right)^5\int_0^n\left(b_4(x)+2b_4\left(x-\frac{1}{2}\right)-\frac{1}{960}\right)\times$$

$$\times f^{(\mathrm{IV})}\left(\alpha+x\frac{\beta-\alpha}{n}\right)dx.$$

定理 5. 如果$|f^{(\mathrm{IV})}(x)|\leqslant M\quad(\alpha\leqslant x\leqslant\beta)$，则

$$|R_s|\leqslant\frac{(\beta-\alpha)^5M}{180\cdot 2^4\cdot n^4}.$$

証. 由于

$$\int_0^n\left|b_4(x)+2b_4\left(x-\frac{1}{2}\right)-\frac{1}{960}\right|dx=$$

$$=n\left(\int_0^{\frac{1}{2}}\left(-\frac{x^4}{24}+\frac{x^3}{12}-\frac{x^2}{24}+\frac{1}{720}-\frac{(x+\frac{1}{2})^4}{12}+\frac{(x+\frac{1}{2})^3}{6}-\right.\right.$$

$$\left.-\frac{(x+\frac{1}{2})^2}{12}+\frac{1}{360}+\frac{1}{960}\right)dx+$$

$$+\int_{\frac{1}{2}}^1\left(-\frac{x^4}{24}+\frac{x^3}{12}-\frac{x^2}{24}+\frac{1}{720}-\frac{(x-\frac{1}{2})^4}{12}+\frac{(x-\frac{1}{2})^3}{6}-\right.$$

$$\left.\left.-\frac{(x-\frac{1}{2})^2}{12}+\frac{1}{360}+\frac{1}{960}\right)dx\right)=n\left(\frac{6}{180\cdot 2^6}+\frac{6}{180\cdot 2^6}\right)=\frac{3n}{180\cdot 2^4},$$

故得定理.

定理 6. 如果$f''(x)$是单調非負递減函数，则

$$|R_s|\leqslant\frac{(\beta-\alpha)^3}{324n^3}f''(\alpha).$$

証. 由

$$\int_0^{\frac{1}{2}}b_2(x)dx=\int_0^{\frac{1}{2}}\left(\frac{x^2}{2}-\frac{x}{2}+\frac{1}{12}\right)dx=0$$

及对 $0<\eta<\frac{1}{2}$，常有

$$\left|\int_0^\eta\left(b_2(x)+2b_2\left(x-\frac{1}{2}\right)\right)dx\right|=$$

$$=\left|\int_0^\eta\left(\frac{x^2}{2}-\frac{x}{2}+\frac{1}{12}+\left(x+\frac{1}{2}\right)^2-\left(x+\frac{1}{2}\right)+\frac{1}{6}\right)\right)dx\right|=$$

$$=\left|\int_0^\eta\left(\frac{3x^2}{2}-\frac{x}{2}\right)dx\right|=\left|\frac{\eta^3}{2}-\frac{\eta^2}{4}\right|\leqslant\frac{1}{108}.$$

由

$$R_s=\frac{(\beta-\alpha)^3}{3n^3}\int_0^n\left(b_2(x)+2b_2\left(x-\frac{1}{2}\right)\right)f''\left(\alpha+x\frac{\beta-\alpha}{n}\right)dx$$

及第二中值公式可得

$$|R_s|\leqslant\frac{(\beta-\alpha)^3}{3n^3}f''(\alpha)\left|\int_0^{\xi}\left(b_2(x)+2b_2\left(x-\frac{1}{2}\right)\right)dx\right|\leqslant\frac{(\beta-\alpha)^3}{324n^3}f''(\alpha),$$

即得定理 6.

附記 1. Euler 公式所包括的，实际上远不止以上的三个方法.

附記 2. 这方法的优点在于我們能把余項(誤差)用积分形式表出. 因之，我們可以用各种不同的方法进行估計，而以上的把絕对値拿进去，把上界拿出来，这是最簡单的估計方法. 它所給出的結果也就是普通书上所給出的誤差. 特别在处理具体問題时，应該根据被积分函数的特殊性，而对誤差項加以細致的处理. 因而往往可能得到較佳的結果.

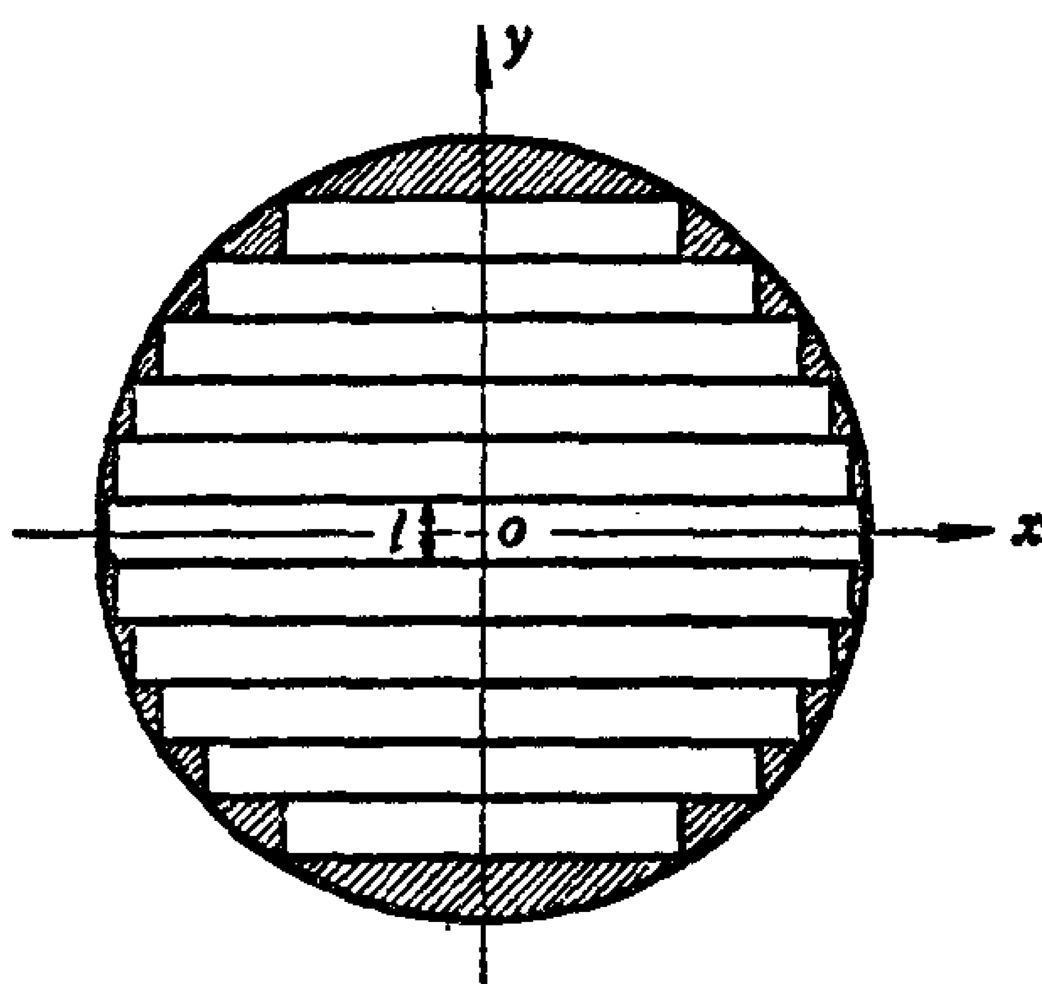


图 174

例如有半径为 R 的圓柱体木料，欲切成与柱体等高而厚度为 l 的长方形木板，試求木材的利用率.

显然，木材的利用率即木料的横切面的利用率. 命

$$h_i=\sqrt{R^2-\left(i+\frac{1}{2}\right)^2l^2},$$

則木板的横切面的总面积为

$$\sigma=4l\sum_{i=0}^{\left[\frac{R}{l}-\frac{1}{2}\right]}h_i-2l\sqrt{R^2-\frac{l^2}{4}}.$$

在 Euler 公式中，命

$$\varphi(x)=\sqrt{R^2-\left(x+\frac{1}{2}\right)^2l^2},\ a=-\frac{1}{2}\text{ 及 }b=\left[\frac{R}{l}-\frac{1}{2}\right],$$

則

$$\sum_{i=0}^{\left[\frac{R}{l}-\frac{1}{2}\right]}h_i=\int_{-\frac{1}{2}}^{\left[\frac{R}{l}-\frac{1}{2}\right]}\sqrt{R^2-\left(x+\frac{1}{2}\right)^2l^2}\,dx-$$

$$-\int_{-\frac{1}{2}}^{\left[\frac{R}{l}-\frac{1}{2}\right]}b_1(x)\frac{l^2\left(x+\frac{1}{2}\right)}{\sqrt{R^2-\left(x+\frac{1}{2}\right)^2l^2}}dx+$$

$$+\frac{1}{2}\sqrt{R^2-\left(\left[\frac{R}{l}-\frac{1}{2}\right]+\frac{1}{2}\right)^2l^2}.$$

由于

$$\int_{-\frac{1}{2}}^{\left[\frac{R}{l}-\frac{1}{2}\right]} \sqrt{R^2-\left(x+\frac{1}{2}\right)^2 l^2}\, dx = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{R}{l}-\frac{1}{2}} \sqrt{R^2-\left(x+\frac{1}{2}\right)^2 l^2}\, dx -$$

$$-\int_{\left[\frac{R}{l}-\frac{1}{2}\right]}^{\frac{R}{l}-\frac{1}{2}} \sqrt{R^2-\left(x+\frac{1}{2}\right)^2 l^2}\, dx = \frac{\pi R^2}{4l} - \int_{\left[\frac{R}{l}-\frac{1}{2}\right]}^{\frac{R}{l}-\frac{1}{2}} \sqrt{R^2-\left(x+\frac{1}{2}\right)^2 l^2}\, dx.$$

因此废料的横切面的总面积为

$$\pi R^2 - \sigma = 2l\sqrt{R^2-\frac{l^2}{4}} - 2l\sqrt{R^2-\left(\left[\frac{R}{l}-\frac{1}{2}\right]+\frac{1}{2}\right)^2 l^2} +$$

$$+4l\int_{\left[\frac{R}{l}-\frac{1}{2}\right]}^{\frac{R}{l}-\frac{1}{2}} \sqrt{R^2-\left(x+\frac{1}{2}\right)^2 l^2}\, dx + 4l\int_{-\frac{1}{2}}^{\left[\frac{R}{l}-\frac{1}{2}\right]} b_1(x) \frac{l^2\left(x+\frac{1}{2}\right)}{\sqrt{R^2-\left(x+\frac{1}{2}\right)^2 l^2}}\, dx.$$

由于

$$\left|4l\int_{\left[\frac{R}{l}-\frac{1}{2}\right]}^{\frac{R}{l}-\frac{1}{2}} \sqrt{R^2-\left(x+\frac{1}{2}\right)^2 l^2}\, dx - 2l\sqrt{R^2-\left(\left[\frac{R}{l}-\frac{1}{2}\right]+\frac{1}{2}\right)^2 l^2}\right| \leqslant$$

$$\leqslant 2l\sqrt{R^2-\left(\left[\frac{R}{l}-\frac{1}{2}\right]+\frac{1}{2}\right)^2 l^2}$$

及

$$\left|\int_{-\frac{1}{2}}^{\left[\frac{R}{l}-\frac{1}{2}\right]} b_1(x) \frac{l^2\left(x+\frac{1}{2}\right)}{\sqrt{R^2-\left(x+\frac{1}{2}\right)^2 l^2}}\, dx\right| \leqslant \left|\int_{-\frac{1}{2}}^{\lambda} b_1(x) \frac{l^2\left(x+\frac{1}{2}\right)}{\sqrt{R^2-\left(x+\frac{1}{2}\right)^2 l^2}}\, dx\right| +$$

$$+\left|\int_{\lambda}^{\left[\frac{R}{l}-\frac{1}{2}\right]} b_1(x) \frac{l^2\left(x+\frac{1}{2}\right)}{\sqrt{R^2-\left(x+\frac{1}{2}\right)^2 l^2}}\, dx\right| = I + J,$$

得

$$\pi R^2 - \sigma \leqslant 2l\sqrt{R^2-\frac{l^2}{4}} + 2l\sqrt{R^2-\left(\left[\frac{R}{l}-\frac{1}{2}\right]+\frac{1}{2}\right)^2 l^2} + 4l(I+J).$$

由第二中值公式可知

$$I = \left|\int_{-\frac{1}{2}}^{\lambda} b_1(x) \frac{l^2\left(x+\frac{1}{2}\right)}{\sqrt{R^2-\left(x+\frac{1}{2}\right)^2 l^2}}\, dx\right| = \frac{l^2\left(\lambda+\frac{1}{2}\right)}{\sqrt{R^2-\left(\lambda+\frac{1}{2}\right)^2 l^2}}\left|\int_{\mu}^{\lambda} b_1(x)\, dx\right| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{l^2\left(\lambda+\frac{1}{2}\right)}{8\sqrt{R^2-\left(\lambda+\frac{1}{2}\right)^2 l^2}}.$$

又由 $|b_1(x)|\leqslant\frac{1}{2}$ 得

$$J\leqslant\frac{1}{2}\left|\int_{\lambda}^{\left[\frac{R}{l}-\frac{1}{2}\right]}\frac{l^2\left(x+\frac{1}{2}\right)}{\sqrt{R^2-\left(x+\frac{1}{2}\right)^2l^2}}dx\right|=\frac{1}{2}\left(\sqrt{R^2-\left(\lambda+\frac{1}{2}\right)^2l^2}-\right.$$

$$\left.-\sqrt{R^2-\left(\left[\frac{R}{l}-\frac{1}{2}\right]+\frac{1}{2}\right)^2l^2}\right),$$

因此

$$\pi R^2-\sigma\leqslant 2l\sqrt{R^2-\frac{l^2}{4}}+\frac{l}{2}\cdot\frac{l^2\left(\lambda+\frac{1}{2}\right)}{\sqrt{R^2-\left(\lambda+\frac{1}{2}\right)^2l^2}}+2l\sqrt{R^2-\left(\lambda+\frac{1}{2}\right)^2l^2}.$$

取

$$\lambda=-\frac{5}{8}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{4R^2}{l^2}+\frac{1}{16}},$$

得

$$\pi R^2-\sigma\leqslant 2l\sqrt{R^2-\frac{l^2}{4}}+4l\sqrt{R^2-\left(\frac{1}{2}\sqrt{\frac{4R^2}{l^2}+\frac{1}{16}}-\frac{1}{8}\right)^2l^2}.$$

数值計算．取 $R=20$ 公分，$l=2.2$ 公分，則得

$$\frac{\pi R^2-\sigma}{\pi R^2}<\frac{121\cdot528}{12\cdot56}\%<10\%,$$

故木材利用率大于 90%.

例 1．試計算

$$W=\int_0^1 e^{-x^2}dx.$$

要求精确到 0.0001.

直接算出被积函数的四級微商之后，可知其四級微商的絕对值不超过 12．取 $n=5$．用 Simpson 公式，由定理 5 可知

$$|R_s|<\frac{12}{180\cdot(10)^4}<0.7\times10^{-5}.$$

$x_0=0,$	$y_0=1.00000$
$x_5=1,$	$y_5=0.36788$
	和 $=1.36788$
$x_{1/2}=0.1,$	$y_{1/2}=0.99005$
$x_{3/2}=0.3,$	$y_{3/2}=0.91393$
$x_{5/2}=0.5,$	$y_{5/2}=0.77680$
$x_{7/2}=0.7,$	$y_{7/2}=0.61263$
$x_{9/2}=0.9,$	$y_{9/2}=0.44486$
	和 $=3.74027$

$$x_1 = 0.2, \quad y_1 = 0.96079$$
$$x_2 = 0.4, \quad y_2 = 0.85214$$
$$x_3 = 0.6, \quad y_3 = 0.69768$$
$$x_4 = 0.8, \quad y_4 = 0.52729$$

$$\text{和} = 3.03790$$

$$\frac{1}{30}(1.36788 + 2 \times 3.03790 + 4 \times 3.74027) = 0.746825.$$

因此

$$0.746813 < W < 0.746837.$$

例 2. 求 $I = \int_0^1 \frac{\log x}{1-x} dx.$

这一积分的瑕点是 $x = 0$. 命

$$I = \int_0^1 (1 + x + x^2 + x^3 + x^4) \log x dx + \int_0^1 \frac{x^5 \log x}{1-x} dx = I_1 + I_2,$$

由分部积分法可知

$$I_1 = -1.46361\cdots.$$

再由 Simpson 方法算 I_2, 取 $n = 5$, 得

$$I_2 \doteq -0.18135,$$

于是

$$I \doteq -1.64496.$$

現在来估計誤差,粗略估計有 $|\varphi^{(4)}(x)| < 200$, 于是

$$|R_5| < \frac{1}{10^4} \cdot \frac{200}{180} = 0.00011.$$

故总的誤差在 -0.00013 与 $+0.00013$ 之間,因此

$$-1.6452 < I < -1.6448.$$

索　引　一

一　画

一一对应　1
一元函数的一致連續性　125
一元函数的微商　126
一元函数的微分　142
一阶綫性方程　282

二　画

十进位　1
二进位　1，22
二項式展开式　208
二阶綫性方程　286
力　58
力系　58
力的分解　58
力系的标准形式(螺旋系)　62
力偶　60
力矩　60
力臂　61
几何平均　172

三　画

三力平衡的条件　64
三次方程　34
三次方程根的 Cardan 公式　35
三矢量混合积　45
三矢量的矢量积　45
三角函数　71，120
三角函数的反函数　73
三角函数的微商　130
上极限　95
上升　156
下极限　95
下降　156
子貫　9
子切綫　184
子法綫　184

四　画

反函数　72
反函数的微商　132
反函数的积分　258
反三角函数　73
反三角函数的微商　133
反双曲函数　135
反双曲函数的微商　135
双曲函数　134
双曲函数的微商　135
开区間　67
无理数　2
无穷小　94
无穷大　94
无穷大的阶　115
方程的近似解　235
不定积分　186，254
不定积分换变数法则　254
不定积分的分部积分法　256
分項积分法　259
分离变量法　274
中值公式　165
五元素公式　53，55
內积(无向积，数性积)　43
切綫　184

五　画

外絕对誤差　31
外相对誤差　31
节綫角　48
四元素　20
四次方程　38
矢量　12，40
矢量的加法　13
矢量的减法　13
矢量的模数　14
矢量的內积(无向积，数性积)　16
矢量的方向余弦　40
矢量的分解　41
矢量的綫性关系　42
矢量积(外积)　43
矢量的多重积　45
矢量的四重积　46
平行力　59
平行力的合并　59
平衡力系　58
平衡方程　63
平衡条件　65
平方平均　172
平面方程　49
平面曲綫的切綫方程　128

平面曲綫的法綫方程 184
平面曲綫的作图 176
凸函数
左旋座标系 39
左极限 110
左連續 119
左間断 121
左微商 127
右旋坐标系 39
右极限 110
右連續 119
右間断 121
右微商 127
半角公式 54, 55
半开半閉区間 67
加速度 128
代数和的微商 129
齐次方程 276
可积函数 296
用冪級数解微分方程 229
对偶三角形 55
对偶原則 54
对数函数 120
对数函数的微商 130
正弦定律 53

六 画

有理数 1
有理数接近实数 26
有理分式 261
有理分式积分的 Остроградский 方法 263
有理曲綫 270
有理函数 119, 270
有理函数的积分 261
有效数字 32
有限遮盖 124
曲綫的上升与下降 156
曲綫向上凸 169
曲綫向下凸 169
曲綫族 90
自然数 1
自变量 67
自由矢量 40
因变量 67
多变元函数 69
多値函数 68
多項式的 Taylor 公式 199
全微分方程 278
刚体 58
导数(微商) 126
合力 58
合矢 58
收斂貫 19

七 画

余弦定律 16, 52, 55
余切公式 53
初等函数 70
初等函数的微商 129
初相 141
扭轉点 169
含有根式的函数积分 265
条件收斂的級数 101
阶梯函数 121

八 画

实数 3
实数集合的确上(下)界 11
实数貫(叙列) 6
实数部分 16
实軸 16
实系数多項式 250
直角坐标系統 12 ,39
直角三角形与直边三角形 55
极限 6 92
极限点(聚点) 94
极座标 14
极大 158
极小 158
变量 67
法綫 184
卦限 39
函数 68
函数的图表法 69
函数在一点的連續性 119
函数在一个区間上的变差 124
函数在一个区間上的連續性质 123
函数的微分 142
函数在一个区間上的振幅 295
函数的間断性 121
函数的极限 110
函数的和、差、积、商的微商 129
函数的极大(小)值 158
函数的最大(小)值 159
函数的递增(减)性 156
函数的图形 176
函数的差分 154
函数的 Taylor 展开式 200
奇函数 73
单值函数 68
单調函数 74
单調增(减)函数 74
单調趋限 93
单調上升貫 8

单調遞減貫 8
单位矢量 41
周期函数 75
空間直綫方程 51
空間直角座标系 39
参变数表示法的函数的高阶微商 152
参变数表示法的曲綫描图 182
阻尼运动 141
定积分 293
定积分换变数法 306
定积分的分部积分法 310
图解法 235
迭代法 236

九 画

复数 12
复数貫 19
复数乘法 14
复数的完备性 19
复合函数 131
复合函数的微商 131
叙列(实数貫) 6
显函数 68
指数函数 71, 120
指数函数的微商 132
祖冲之計算圓周率的方法 104
祖暅之的綴术 104
面积原理 321
約束力 64
約束公理 64
相对誤差 31
恰当方程 278
迴归直綫 77

十 画

矩形法 329
纵座标 12
座标系統 12
座标变换 47
旁压力的計算 107
振幅 141
偶函数 74
高阶微商 146
高阶微分 152
积的微商 129
积分原函数 186
积分公式表 187
积分学基本定理 301
积分中值定理 300
积分第二中值公式 302
积分的换变数法則 254
积分因子 280
級数 96
級数的部分和 96
級数的收斂性 96
級数的发散性 100
級数的 Cauchy 判别法 97
級数的比例判别法 97
級数的絕对收斂 96
級数的条件收斂 101
級数的 Abel 判别法 102
級数的 Dirichlet 判别法 102
級数的 Kummer 判别法 221
級数的 Gauss 判别法 222
眞分式 261
眞子集 1
逐步平分的原則 (Bolzano 原則) 10
連續趋限 110
連續 119
連續函数 119

十 一 画

球面三角 52
閉区間 67
虛数 16
虛数部分 16
虛軸 16
符号~, O, o 116
偏微商 190
商的微商 129
常量 67
常系数綫性方程 288
梯形法 328

十 二 画

插值法 240
距离 14
最大值 159
最小值 159
最大絕对誤差 31
最大相对誤差 31
絕对誤差 31
絕对值 5
确上限 11
确下限 11
循环小数 25
減函数 74
貫的极限 6
貫的趋限 92
貫的不趋限 94
超越几何級数 223
超越几何微分方程 231
等效力系 58
联合法 244

十三画

聚点(极限点) 94
傾角 48
数貫 6
数 e, 107
数性积(內积,无向积) 43
經驗公式 70, 84
圓周率 28
圓形立方曲綫 179
微分 126, 142
微商(导数) 126
微商公式表 136
微商的应用 156
微分方程 274
微分方程的換变数法 276
微分算子 286
環积分 313
環点 313
賈宪法 245
滑动矢量 40
零矢量 41

十四画

稳函数 68
稳函数的微分 189
稳函数的高阶微商 191
算术平均 172
漸近綫 173
漸近分数 27
綫性微分方程 288
綫性方程解的綫性性質 288
誤差 30
誤差的估計 143

十五画

横坐标 12
增函数 74
調和級数 100
冪函数 70
冪級数 215
冪級数的收斂半径 216
冪級数的四則运算 217
冪級数的逐項微商 219
冪級数的逐項积分 220
冪級数的唯一性定理 220
冪級数的反函数 220

十六画

整数 2
靜力学 58
頻率 141
輻角 14

十七画

螺旋系 62
螺旋力系 63
簡諧振动 140

索　引　二

A

Abel 判别法　102
Abel 积分　270
Abel 定理　215　302
Archimedes 公設　4
Archimedes 求抛物形面积法　105
Avogadro 数　33

B

Bernoulli 方程　286
Bessel 函数　286
Bessel 微分方程　233
Bessel 插入公式　82
Bolzano 原則（Bolzano 法）　10，123
Bolzano-Weierstrass 定理　10
Boyle-Mariotte 定律　67　70

C

Cardan 公式　35
Cauchy 貫　7
Cauchy 余項　203
Cauchy 定理　165，203
Cauchy 判别法　97

D

De Moivre 定理　17
Descartes 座标系　39
Descartes 定理　251
Darboux 定理　165
Dirichlet 函数　294
Dirichlet 积分　314
Dirichlet 判别法　102
Dirichlet 公式　304

E

Euler 积分　316
Euler 常数　324
Euler 求和公式　325
Euler 函数　327
Euler-Poisson 积分　318
Euler 角　48

F

Férmat 定理　164
Fejér 公式　304
Frouliani 积分　319

G

Gauss 判别法　222
Gauss 級数　223

H

Heine-Borel 有限遮盖定理　124
Huygens 公式　207

K

Kepler 方程　157
Kummer 判别法　221

L

Lagrange 插入公式　80
Lagrange 中值定理　165
Lagrange 余項　203
Lamé 函数　286
Legendre 多項式　151
Legendre 微分方程　232
Leibnitz 公式　149
Loschmidt 数　33
L'Hospital 法則　192
Лобачевский 法　247

M

Maclaurin 展开式　203
Mathien 函数　286

N

Newton 插入公式　82
Newton 法　241

O

Остроградский 方法　263

R

Riccati 方程　285
Riemann 定积分　294
Riemann 可积函数　294
Rolle 定理　165

S

Schlömilch-Roché 余項定理　202

Schwarzian 288
Simpson 法 331
Stirling 公式 326
Stirling 插入公式 82
Sturm 組 252
Sturm 定理 252
Stolz 定理 195

T

Taylor 級数的余項 201
Taylor 展开式 315

V

van der Waals 公式 68, 177

W

Weierstrass 123
Wallis 公式 316
Weber 函数 286

Ч

Чебышев 266

［Ｇｅｎｅｒａｌ　Ｉｎｆｏｒｍａｔｉｏｎ］
书名＝高等数学引论　　第一卷　第一分册
作者＝华罗庚
页数＝３４２
ＳＳ号＝１０１８６５８３
出版日期＝１９６３年０７月第１版

前言
目录
第一章　实数与复数
１．　有理数
２．　无理数的存在
３．　实数的描述
４．　极限
５．　Ｂｏｌｚａｎｏ－Ｗｅｉｅｒｓｔｒａｓｓ定理
６．　复数的定义和矢量
７．　极坐标及复数乘法
８．　Ｄｅ　Ｍｏｉｖｒｅ定理
９．　复数的完备性
１０．　四元数简介
补充：
１１．　二进位计算
１２．　循环小数
１３．　有理数接近实数
１４．　误差
１５．　三、四次方程解法
第二章　矢量代数
１．　空间坐标系及矢量的定义
２．　矢量的加法
３．　矢量的分解
４．　内积（无向积，数性积）
５．　矢量积（外积）
６．　多重积
７．　坐标的变换
８．　平面
９．　空间直线方程
补充：
１０．　球面三角的主要公式
１１．　对偶原则
１２．　直角三角形与直边三角形的计算规则
１３．　力，力系，等效力系
１４．　平行力的合并
１５．　力矩
１６．　力偶
１７．　力系的标准形式
１８．　平衡方程及其应用
第三章　函数与图形
１．　变量
２．　函数
３．　隐函数
４．　函数的图表法
５．　几个初等函数
６．　函数的一些简单特性
７．　周期函数
８．　复变数函数表示举例
９．　回归直线
１０．　Ｌａｇｒａｎｇｅ插入公式
１１．Ｎｅｗｔｏｎ，Ｂｅｓｓｅｌ，Ｓｔｉｒｌｉｎｇ插入公式
１２．　经验公式
１３．　曲线族
第四章　极限
１．　贯的趋限情况
２．　贯的不趋限情况
３．　级数
４．　条件收敛的级数
５．　祖冲之计算圆周率的方法
６．　Ａｒｃｈｉｒｎｅｄｅｓ求抛物形面积法
７．　旁压力的计算

８． 数ｅ
９． 连续趋限
１０． 几个重要极限
１１． 一些例子
１２． 无穷大之阶
１３． 符号～，Ｏ与ｏ
１４． 连续函数
１５． 间断种种
１６． 连续函数的一些基本性质
１７． Ｈｅｉｎｅ－Ｂｏｒｅｌ定理
第五章 微分
１． 微商概念
２． 微商的几何意义
３． 函数的和、差、积、商的微商
４． 初等函数的微商
５． 复合函数的微商
６． 双曲函数
７． 微商的公式表
８． 例题
９． 微分
１０． 误差的估计
１１． 高阶微商
１２． Ｌｅｉｂｎｉｔｚ公式
１３． 高阶微分
１４． 函数的差分
第六章 微商的应用
１． 曲线的上升与下降
２． 极大与极小
３． Ｆｅｒｍａｔ定理
４． 中值公式
５． 凸性、凹性与扭转点
６． 渐近线
７． 作图要点
８． 参变表示法的曲线描图
９． 切线，法线，子切线，子法线
１０．积分公式
１１． 隐函数的微分
１２． ？型的不定式
１３． ？型的不定式
１４． 其他型的不定式
第七章 函数的Ｔａｙｌｏｒ展开式
１． 多项式的Ｔａｙｌｏｒ公式
２． 函数的Ｔａｙｌｏｒ展开式
３． Ｔａｙｌｏｒ级数的余项
４． ｅｘ的展开式
５． ｓｉｎ ｘ 与ｃｏｓ ｘ 的展开式
６． 二项式展开式
７． ｌｏｇ（１＋ｘ）的展开式
８． ａｒｃ ｔｇ ｘ 的展开式
９． 幂级数，收剑半径
１０． 幂级数的四则运算
１１． 幂级数的微分与积分
１２． 幂级数的唯一性定理及反函数
１３． Ｋｕｍｍｅｒ判别法，Ｇａｕｓｓ判别法
１４． 超越几何级数
１５． 用幂级数解微分方程
第八章 方程的近似解
１． 引言
２． 图解法
３． 迭代法
４． 插值法

５． Ｎｅｗｔｏｎ法
６． 联合法
７． 贾宪法
８． Ｌｏбачевский法
补充：
９． 实数根的几个定理
１０． Ｓｔｕｒｍ定理
第九章 不定积分
１． 换变数法则
２． 分部积分法
３． 分项积分法
４． 有理分式的积分
５． М．В．Остроградский方法
６． 某些含有根式的函数的积分
７． 求积分∫Ｒ（ｘ，？）ｄｘ
８． Ａｂｅｌ积分
９． 一些不能用已知函数表达的积分
１０． 微分方程．分离变量法
１１． 换变数法
１２． 积分因子法
１３． 一阶线性方程
１４． 二阶线性方程
１５． 常系数线性方程
第十章 定积分
１． 求面积
２． 定积分的概念
３． 可积函数的性质
４． 定积分的基本性质
５． 中值公式及积分基本定理
６． 第二中值公式
７． 例子
８． 换变数公式
９． 分部积分
１０． 瑕积分
１１． 定积分的一些应用
１２． 求定积分的特殊方法
１３． 面积原理的应用
１４． Ｅｕｌｅｒ求和公式及Ｅｕｌｅｒ函数
１５． 梯形法，矩形法与Ｓｉｍｐｓｏｎ法
索引一
索引二